гия покоя нуклона ~ 931 *Мэв*, поэтому при исследовании рассеяния нуклонов выведенными здесь формулами можно пользоваться вплоть до энергий ~ 100 *Мэв*.

В дальнейшем изложении, если не будет делаться специальная оговорка, мы будем пользоваться только системой координат центра инерции.

§ 43. Упругое рассеяние в потенциальном поле

Упругим рассеянием называется рассеяние, при котором не меняются внутренние состояния и состав сталкивающихся частиц.

В нерелятивистском приближении задача рассеяния одной частицы (m_1) на другой (m_2) может быть сведена к задаче рассеяния некоторой фиктивной частицы, обладающей приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в потенциальном поле, являющемся функцией относительных координат и спинов сталкивающихся частиц *). Такое сведение задачи упругого рассеяния двух частиц к движению фиктивной частицы с приведенной массой в потенциальном поле осуществляется простым переходом к системе координат, связанной с центром инерции сталкивающихся частиц, которой мы и будем дальше пользоваться. Предположим далее для простоты, что спины сталкивающихся частиц равны нулю.

Начальной стадией процесса рассеяния является движение навстречу друг другу двух бесконечно удаленных частиц. При их сближении взаимодействие между частицами меняет состояние их движения, затем частицы разлетаются. Конечной стадией процесса рассеяния является движение частиц друг от друга.

Часто удобно вместо временного описания задачи рассеяния рассматривать эквивалентную стационарную задачу (см. главу IX). При стационарном описании явления рассеяния предполагается, что имеется непрерывный поток частиц, летящих из бесконечности, который из-за взаимодействия с рассеивающим центром переходит в поток разлетающихся (рассеянных) частиц. Задача рассеяния состоит в вычислении при заданном силовом поле потока рассеянных частиц на бесконечном расстоянии от рассеивающего центра как функции потока падающих частиц.

В стационарной формулировке рассеяние частицы с массой μ и положительной энергией ε в потенциальном поле $V(\boldsymbol{r})$ определяется уравнением Шредингера

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\boldsymbol{r}) = u(r)\,\psi(\boldsymbol{r}), \qquad (43,1)$$

где Δ — оператор Лапласа; $k^2 = \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2}$; ε — энергия относительного движения двух сталкивающихся частиц; $u(\boldsymbol{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\boldsymbol{r})$.

---

*) В некоторых задачах рассеяния приходится учитывать и спин-орбитальное взаимодействие.

Предположим, что $u(\boldsymbol{r})$ отлично от нуля только в некоторой ограниченной области пространства $|\boldsymbol{r}| \leqslant d$. Эту часть пространства будем называть областью действия сил. Вне области действия сил частицы движутся свободно и их состояние движения можно описывать плоской волной

$$\varphi_a(\boldsymbol{r}) = \exp(i\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{k}_a^2 = \boldsymbol{k}^2, \tag{43,2}$$

удовлетворяющей волновому уравнению (43,1) без правой части. Волновой вектор $\boldsymbol{k}_a$ связан с импульсом $\boldsymbol{p}$ относительного движения простым соотношением $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}_a$. Функция (43,2) нормирована так, чтобы плотность потока частиц $\boldsymbol{j}$ численно равнялась скорости частицы:

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2\mu i}(\varphi_a^* \nabla\varphi_a - \varphi_a\nabla\varphi_a^*) = \frac{\hbar \boldsymbol{k}_a}{\mu}. \tag{43,3}$$

Общее решение уравнения (43,1) выразим через функцию Грина $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, которая удовлетворяет уравнению (43,1) для точечного единичного источника:

$$(\Delta + k^2)\, G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{43,4}$$

Нас будут интересовать только такие решения уравнения (43,1), которые содержат рассеянные (т. е. уходящие от центра) волны. Функция Грина $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, соответствующая этим решениям, имеет вид

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{\exp(ik|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{43,5}$$

Определив функцию Грина (43,5), т. е. решение уравнения (43,4) с точечным источником, мы можем написать общее решение уравнения (43,1), содержащее падающую волну (43,2) с волновым вектором $\boldsymbol{k}_a$ и рассеянные уходящие волны *):

$$\psi_a(\boldsymbol{r}) = \varphi_a(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\exp(ik|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, u(\boldsymbol{r}')\, \psi_a(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'. \tag{43,6}$$

Уравнение (43,6) является интегральным уравнением относительно неизвестной функции $\psi_a(\boldsymbol{r})$.

---

*) Выражение (43,6), являющееся решением уравнения (43,1), может быть записано в краткой символической форме:

$$\psi_a(\boldsymbol{r}) = \varphi_a(\boldsymbol{r}) + D^{-1}\, u(\boldsymbol{r})\, \psi_a(\boldsymbol{r}), \tag{43,6а}$$

где

$$D \equiv (k^2 + \Delta + i\eta); \tag{43,6б}$$

η — малый положительный параметр, обеспечивающий присутствие в (43,6а) только уходящих рассеянных волн. После вычисления интегралов в (43,6а) надо устремить η к нулю.

На больших расстояниях ($r \gg d$, $kr \gg 1$), можно положить $k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \approx kr - \boldsymbol{k}_b\boldsymbol{r}'$, где $\boldsymbol{k}_b = k\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; поэтому асимптотическое значение (43,6) примет вид

$$\psi_a(r) = \varphi_a(r) + A_{ba}\frac{e^{ikr}}{r}, \quad kr \gg 1, \tag{43,7}$$

где

$$A_{ba} = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{r}'}\, u(\boldsymbol{r}')\,\psi_a(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'. \tag{43,8}$$

Принимая во внимание, что выражение $e^{-i\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{r}} = \varphi_b^*(\boldsymbol{r})$ можно рассматривать как плоскую волну с волновым вектором $\boldsymbol{k}_b$; запишем соотношение (43,8) в виде

$$A_{ba} = -\frac{1}{4\pi}(\varphi_b, u\psi_a) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}(\varphi_b, V\psi_a), \tag{43,8а}$$

где использовано обозначение $(\varphi, \psi) \equiv \int \varphi^*\psi\, d\tau$. Функция A_{ba} называется *амплитудой рассеяния*. Согласно (43,8а) амплитуда рассеяния пропорциональна приведенной массе μ и зависит от энергии и угла рассеяния θ, т. е. угла между векторами $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$.

Дифференциальное эффективное сечение $d\sigma(\theta, \varphi)$ упругого рассеяния в элемент телесного угла $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ определяется как отношение числа рассеянных в этот элемент частиц в единицу времени к плотности потока падающих частиц. Вычисляя это отношение, получим:

$$d\sigma = |A_{ba}|^2\, d\Omega. \tag{43,9}$$

Итак, вычисление эффективного сечения рассеяния (43,9) сводится к решению интегрального уравнения (43,6) и последующему вычислению амплитуды рассеяния с помощью (43,8).

Если энергию взаимодействия $u(\boldsymbol{r})$ можно рассматривать как малое возмущение, то уравнение (43,6) можно решать методом итераций. В результате получим:

$$\psi_a(\boldsymbol{r}) = \varphi_a(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, u(\boldsymbol{r}')\,\varphi_a(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}' + \ldots$$

Подставляя это выражение для ψ_a в (43,8), мы представим амплитуду рассеяния в виде ряда

$$A_{ba} = -\frac{1}{4\pi}\int \varphi_b^*(\boldsymbol{r})\, u(\boldsymbol{r})\,\varphi_a(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} + \\ + \frac{1}{(4\pi)^2}\int \varphi_b^*(\boldsymbol{r})\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, u(\boldsymbol{r})\,u(\boldsymbol{r}')\,\varphi_a(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}' + \ldots$$

Если этот ряд сходится и мы сохраним первые N членов, а остальные отбросим, то полученное приближенное выражение называют *N-м бор-*

новским приближением. В частности, в первом борновском приближении

$$A_{ba}^{(1)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}(\varphi_b, V\varphi_a). \tag{43,10}$$

При упругом рассеянии частиц без спина амплитуда рассеяния является комплексной функцией волновых векторов $\boldsymbol{k}_a$, $\boldsymbol{k}_b$ начального и конечного состояний соответственно:

$$A_{ba} = F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a), \quad |\boldsymbol{k}_b| = |\boldsymbol{k}_a|.$$

Дифференциальное сечение (43,9) определяется через квадраты модуля амплитуды рассеяния, поэтому измерение $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ при данной энергии и угле рассеяния не позволяет определить фазу комплексной функции $F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a)$. Однако, как мы увидим ниже, исследование упругого рассеяния при всех углах позволяет определить и фазу функции $F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a)$. Эта возможность обусловлена общим соотношением унитарности, которому удовлетворяет амплитуда упругого рассеяния. Перейдем к выводу этого соотношения, следуя работе Глаубера и Шомакера [18].

Рассмотрим три функции, удовлетворяющие уравнению (43,1) и имеющие следующий асимптотический вид при достаточно большом r:

$$\left.\begin{aligned} \psi_a &= \exp(i\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{r}) + F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a)\frac{\exp(ikr)}{r}, \\ \psi_{-b} &= \exp(-i\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{r}) + F(-\boldsymbol{k}_a, -\boldsymbol{k}_b)\frac{\exp(-ikr)}{r}, \\ \psi_b^* &= \exp(-i\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{r}) + F^*(\boldsymbol{k}_a, \boldsymbol{k}_b)\frac{\exp(-ikr)}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{43,11}$$

где $\boldsymbol{k}_a^2 = \boldsymbol{k}_b^2 = k^2$. Пользуясь (43,1), легко убедиться, что функции (43,11) должны удовлетворять соотношениям:

$$\psi_{-b}\Delta\psi_a - \psi_a\Delta\psi_{-b} = 0,$$
$$\psi_b^*\Delta\psi_a - \psi_a\Delta\psi_b^* = 0.$$

Интегрируя эти равенства по объему, окружающему силовой центр, и используя теорему Грина, получим следующие поверхностные интегралы:

$$\oint_S \left(\psi_{-b}\frac{\partial\psi_a}{\partial r} - \psi_a\frac{\partial\psi_{-b}}{\partial r}\right) df = 0, \tag{43,12а}$$

$$\oint_S \left(\psi_b^*\frac{\partial\psi_a}{\partial r} - \psi_a\frac{\partial\psi_b^*}{\partial r}\right) df = 0, \tag{43,12б}$$

где df — элемент сферы радиуса R. При достаточно большом R волновые функции на поверхности сферы можно заменить их асимптотическими значениями (43,11). Тогда из (43,12а) будет следовать условие равенства амплитуд упругого рассеяния при обращении времени

$$F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a) = F(-\boldsymbol{k}_a, -\boldsymbol{k}_b), \tag{43,13}$$

так как рассеяние из состояния $(-\boldsymbol{k}_b)$ в состояние $(-\boldsymbol{k}_a)$ соответствует обращенному во времени рассеянию $\boldsymbol{k}_a \longrightarrow \boldsymbol{k}_b$ (см. § 51). Далее, из равенства (43,12б) следует

$$2\pi\left[F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a) - F^*(\boldsymbol{k}_a, \boldsymbol{k}_b)\right] = ik \int F^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_b) F(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_a)\, d\Omega_{\boldsymbol{k}}, \tag{43,14}$$

где справа проводится интегрирование по всем направлениям вектора $\boldsymbol{k}$.

Если в (43,14) положить $\boldsymbol{k}_a = \boldsymbol{k}_b$, то находим соотношение между мнимой частью амплитуды рассеяния вперед и полным сечением рассеяния:

$$\operatorname{Im} F(\boldsymbol{k}_a, \boldsymbol{k}_a) = \frac{k}{4\pi} \int |F(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_a)|^2\, d\Omega_k = \frac{k}{4\pi}\sigma, \tag{43,15}$$

где $\sigma = \int |F|^2\, d\Omega$ — полное сечение рассеяния. Соотношение (43,15) носит название *оптической теоремы*.

Итак, амплитуда рассеяния любых частиц с нулевым спином в произвольном силовом поле должна удовлетворять общим соотношениям (43,13), (43,14) и (43,15).

Рассмотрим теперь частный случай упругого рассеяния в поле, инвариантном относительно преобразования инверсии, т. е. если $\hat{I}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}$, то

$$\hat{I} u(\boldsymbol{r}) = u(-\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r}). \tag{43,16}$$

К такому типу полей относится, в частности, центрально-симметричное поле.

Если силовое поле $u(\boldsymbol{r})$ инвариантно относительно преобразования инверсии пространственных координат, то и амплитуда рассеяния также инвариантна относительно преобразования инверсии:

$$\hat{I} F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a) = F(-\boldsymbol{k}_b, -\boldsymbol{k}_a) = F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a). \tag{43,17}$$

Условие инвариантности (43,17) относительно инверсии пространственных координат вместе с условием (43,13) приводит к равенству

$$F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a) = F(\boldsymbol{k}_a, \boldsymbol{k}_b), \tag{43,18}$$

показывающему, что амплитуда рассеяния является симметричной функцией волновых векторов $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$.

Далее из (43,14) следует, что при инвариантности взаимодействия относительно пространственной инверсии амплитуда рассеяния удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im} F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a) = \frac{k}{4\pi} \int F^*(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}) F(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_a)\, d\Omega_{\boldsymbol{k}}, \tag{43,19}$$

которое мы будем называть *соотношением унитарности для амплитуды рассеяния.*

Обозначим дифференциальное сечение упругого рассеяния на угол θ через $\sigma(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$; тогда, учитывая формулу (43,9), можем написать:

$$F(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{k}_a) \equiv A_{ba}(\theta) = \sqrt{\sigma(\theta)} \exp(i\alpha(\theta)), \tag{43,20}$$

где модуль амплитуды рассеяния $\sqrt{\sigma(\theta)}$ и фаза $\alpha(\theta)$ являются функциями энергии; θ — угол между $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$.

Если дифференциальное сечение $\sigma(\theta)$ для данной энергии рассеяния измерено для всех углов θ, то фаза амплитуды рассеяния $\alpha(\theta)$ может быть определена как решение интегрального уравнения [1]:

$$\sin\alpha(\theta) = \frac{k}{4\pi} \int \left[\frac{\sigma(\theta')\,\sigma(\theta'')}{\sigma(\theta)}\right]^{1/2} \cos[\alpha(\theta') - \alpha(\theta'')]\, d\Omega_k, \tag{43,21}$$

где θ' — угол между векторами $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}$; θ'' — угол между векторами $\boldsymbol{k}_b$ и $\boldsymbol{k}$; интегрирование производится по всем направлениям вектора $\boldsymbol{k}$. Вследствие того, что уравнение (43,21) инвариантно относительно преобразования

$$\alpha(\theta) \longrightarrow \pi - \alpha(\theta), \tag{43,22}$$

фазу амплитуды рассеяния можно вычислить только с точностью до преобразования

$$A(\theta) \longrightarrow -A^*(\theta). \tag{43,23}$$

Таким образом, измерение сечения рассеяния на все углы при заданной энергии позволяет определить амплитуду рассеяния с точностью до преобразования (43,23).

§ 44. Рассеяние частиц с нулевым спином в центрально-симметричном поле

Если потенциал поля, в котором происходит рассеяние, обладает сферической симметрией $V(\boldsymbol{r}) = V(|\boldsymbol{r}|)$, то решение уравнения (43,1)

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\boldsymbol{r}) = u(r)\,\psi(\boldsymbol{r})$$

можно представить в виде суперпозиции парциальных волн, соответствующих состояниям с определенным моментом количества движения:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l\, \frac{R_l(r)}{kr}\, P_l(\cos\theta), \tag{44,1}$$

где θ — угол между направлением $\boldsymbol{r}$ и направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}_a$