

которое мы будем называть *соотношением унитарности для амплитуды рассеяния*.

Обозначим дифференциальное сечение упругого рассеяния на угол  $\theta$  через  $\sigma(\theta) \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}$ ; тогда, учитывая формулу (43,9), можем написать:

$$F(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a) \equiv A_{ba}(\theta) = \sqrt{\sigma(\theta)} \exp(i\alpha(\theta)), \quad (43,20)$$

где модуль амплитуды рассеяния  $\sqrt{\sigma(\theta)}$  и фаза  $\alpha(\theta)$  являются функциями энергии;  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}_a$  и  $\mathbf{k}_b$ .

Если дифференциальное сечение  $\sigma(\theta)$  для данной энергии рассеяния измерено для всех углов  $\theta$ , то фаза амплитуды рассеяния  $\alpha(\theta)$  может быть определена как решение интегрального уравнения [1]:

$$\sin \alpha(\theta) = \frac{k}{4\pi} \int \left[ \frac{\sigma(\theta') \sigma(\theta'')}{\sigma(\theta)} \right]^{1/2} \cos[\alpha(\theta') - \alpha(\theta'')] d\Omega_k, \quad (43,21)$$

где  $\theta'$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_a$  и  $\mathbf{k}$ ;  $\theta''$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_b$  и  $\mathbf{k}$ ; интегрирование производится по всем направлениям вектора  $\mathbf{k}$ . Вследствие того, что уравнение (43,21) инвариантно относительно преобразования

$$\alpha(\theta) \rightarrow \pi - \alpha(\theta), \quad (43,22)$$

фазу амплитуды рассеяния можно вычислить только с точностью до преобразования

$$A(\theta) \rightarrow -A^*(\theta). \quad (43,23)$$

Таким образом, измерение сечения рассеяния на все углы при заданной энергии позволяет определить амплитуду рассеяния с точностью до преобразования (43,23).

#### § 44. Рассеяние частиц с нулевым спином в центрально-симметричном поле

Если потенциал поля, в котором происходит рассеяние, обладает сферической симметрией  $V(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$ , то решение уравнения (43,1)

$$(\Delta + k^2) \psi(\mathbf{r}) = u(r) \psi(r)$$

можно представить в виде суперпозиции парциальных волн, соответствующих состояниям с определенным моментом количества движения:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{R_l(r)}{kr} P_l(\cos \theta), \quad (44,1)$$

где  $\theta$  — угол между направлением  $\mathbf{r}$  и направлением волнового вектора  $\mathbf{k}_a$

падающей волны, а радиальная функция  $R_l(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} R_l(r) = u(r) R_l(r) \quad (44,2)$$

и граничному условию

$$R_l(0) = 0. \quad (44,3)$$

Разложим падающую плоскую волну  $\varphi_a(r)$  по собственным функциям оператора момента количества движения:

$$\varphi_a(r) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (44,4)$$

где  $j_l(kr)$  — сферическая функция Бесселя, выражающаяся через обычную функцию Бесселя полуцелого порядка с помощью соотношения

$$j_l(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x).$$

Сферическая функция Бесселя  $j_l(x)$  имеет следующие асимптотические выражения\*):

$$j_l(x) = \begin{cases} \frac{x^l}{(2l+1)!}, & \text{если } x \ll 1, \\ \frac{\sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right)}{x}, & \text{если } x \gg 1, \end{cases} \quad (44,5)$$

где  $(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l+1)$ .

Итак, плоская волна на больших расстояниях от области действия сил  $kr \gg 1$  может быть записана в виде:

$$\varphi_a(r) = \frac{1}{k_a r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \rho_l(r), \quad (44,6)$$

где

$$\rho_l(r) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)} \right\}. \quad (44,7)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках (44,7) соответствует сходящимся, а второе расходящимся от центра волнам.

\*). Напомним явный вид сферических функций Бесселя для трех первых значений  $l$ :

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$j_1(x) = \left( \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right); \quad j_2(x) = \frac{1}{x} \left\{ \left( \frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right\}.$$

Взаимодействие потока падающих частиц с рассеивающим центром изменит амплитуду расходящихся от центра волн, поэтому радиальная часть волновой функции, описываемая уравнением Шредингера (44,2), при  $kr \gg 1$  может быть записана в виде

$$R_l(r) = \frac{i}{2} \left\{ e^{-i \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right)} - S_l e^{i \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right)} \right\} \equiv \\ \equiv \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) + \frac{S_l - 1}{2i} \exp \left[ i \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right]. \quad (44,8)$$

Коэффициент  $S_l$  в (44,8), определяющий соотношение между амплитудами расходящихся и сходящихся волн, является диагональным элементом *матрицы рассеяния*, соответствующим орбитальному моменту  $l$ .

Подставляя (44,8) в (44,1), получим:

$$\psi(r) = \varphi_a(r) + A(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad kr \gg 1, \quad (44,9)$$

где амплитуда рассеяния  $A(\theta)$  выражается через элементы  $S_l$  матрицы рассеяния:

$$A(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) (1 - S_l). \quad (44,10)$$

Элементы матрицы рассеяния  $S_l$  являются комплексными числами; в случае упругого рассеяния они могут быть выражены через вещественные *фазовые смещения* (фазовые сдвиги или фазы рассеяния)  $\delta_l$ :

$$S_l = \exp(2i\delta_l), \quad \text{или} \quad S_l - 1 = 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l. \quad (44,11)$$

Из (44,11) следует, что фазовые смещения  $\delta_l$  определяются неоднозначно. Область изменения фазовых смещений может быть выбрана произвольно либо в интервале  $(0, \pi)$ , либо  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . В дальнейшем, если не будут делаться специальные оговорки, мы будем пользоваться интервалом  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ .

С помощью (44,10) и (44,11) мы можем представить дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол  $d\Omega$  в следующем виде:

$$d\sigma = |A(\theta)|^2 d\Omega = \\ = \frac{1}{k^2} \sum_{l, l'} (2l+1)(2l'+1) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}) d\Omega. \quad (44,12)$$

Воспользуемся далее известной формулой для произведения полиномов Лежандра

$$P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} [(l'l'00 | L0)]^2 P_L(\cos \theta),$$

где  $(U'00|L0)$  — коэффиценты векторного сложения (см. приложение I)  
Тогда (44,12) примет вид

$$d\sigma = \frac{1}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} B_L P_L(\cos \theta) d\Omega, \quad (44,13)$$

где

$$B_L = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=|L-l|}^{L+l} (2l+1)(2l'+1) [(U'00|L0)]^2 \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \cos(\delta_l - \delta_{l'}). \quad (44,13a)$$

Интегрируя выражение (44,13) по всем углам, получим интегральное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} B_0, \quad (44,14)$$

где согласно (44,13a)

$$B_0 = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (44,14a)$$

так как

$$[(U'00|L0)]^2 = \frac{\delta_{l'}}{2l+1}.$$

Итак, интегральное сечение рассеяния можно представить в виде суммы парциальных сечений рассеяния  $\sigma_l$ , относящихся к определенным значениям  $l$ :

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad (44,15)$$

где

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - S_l|^2. \quad (44,15a)$$

Если рассеяние характеризуется небольшим числом отличных от нуля фазовых смещений (условия этого мы определим ниже), то, определяя эффективное сечение рассеяния как функцию угла  $\theta$ , можно с помощью формулы (44,13) вычислить  $B_L$ , а затем, используя (44,13a) и (44,14a), определить фазы рассеяния. Такая обработка экспериментальных данных носит название *фазового анализа сечений рассеяния*.

Задачей теории рассеяния является вычисление фазовых смещений или амплитуды рассеяния по заданному потенциалу  $V(r)$ . Поскольку, однако, в ядерной физике законы ядерных взаимодействий еще недостаточно изучены, то особенно большое значение имеет обратная задача — определение вида потенциала по экспериментальным значениям фазовых смещений или определения амплитуды рассеяния по измерен-

ным эффективным сечениям рассеяния. Эти величины связаны соотношением  $d\sigma(\theta) = |A(\theta)|^2 d\Omega$ , поэтому из экспериментального значения  $d\sigma$  амплитуда рассеяния определяется только с точностью до фазового множителя, так как  $A(\theta)$  и  $A^*(\theta)$  дают одинаковое сечение рассеяния. Эта неоднозначность частично устраняется так называемыми дисперсионными соотношениями теории рассеяния, которые связывают мнимую и действительную части амплитуды рассеяния (см. § 52).

Пользуясь (44,10) легко показать, что мнимая часть амплитуды рассеяния вперед имеет вид  $\text{Im } A(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$ . Сравнивая это значение с (44,14а), мы убедимся, что интегральное сечение рассеяния связано с мнимой частью амплитуды рассеяния вперед простым соотношением:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } A(0), \quad (44,16)$$

которое уже было получено в § 43. Там же было показано, что если дифференциальное сечение рассеяния известно для всех углов рассеяния, то можно определить амплитуды рассеяния только с точностью до преобразования  $A(\theta) \rightarrow -A^*(\theta)$ . Это преобразование, как легко видеть из (44,10) и (44,11), соответствует замене знаков у всех фазовых смещений.

Посмотрим, каким же образом связаны фазовые смещения  $\delta_l$  (или матрица рассеяния  $S_l$ ) с потенциальной энергией взаимодействия  $V(r)$ . Для решения этой задачи необходимо общее решение волнового уравнения для радиальной части (44,2) представить в виде суммы падающей и уходящих волн.

Дифференциальному уравнению (44,2) с граничным условием (44,3) в нуле и (44,8) в бесконечности соответствует интегральное уравнение

$$R_l(r) = g_l(r) + \int_0^{\infty} G_l(r, r') u(r') R_l(r') dr', \quad (44,17)$$

где функция Грина левой части уравнения (44,2) определяется условиями:

$$G(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{k} g_l(r) W_l(r'), & \text{если } r \leq r'; \\ \frac{1}{k} W_l(r) g_l(r'), & \text{если } r \geq r'; \end{cases} \quad (44,18)$$

при этом функции

$$\left. \begin{aligned} g_l(r) &= kr j_l(kr), \\ W_l(r) &= kr [n_l(kr) - i j_l(kr)] \end{aligned} \right\} \quad (44,18a)$$

являются собственными функциями оператора

$$\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2.$$

Из формул (44,18а) видно, что они выражаются через сферическую функцию Бесселя  $j_l(x)$  и сферическую функцию Неймана  $n_l(x)$ , сингулярную при  $x=0$ . Сферическая функция Неймана определяется через функцию Неймана полуцелого порядка

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x)$$

и имеет следующие асимптотические свойства:

$$n_l(x) = \begin{cases} -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, & \text{если } x \ll 1; \\ -\frac{\cos\left(x - \frac{\pi l}{2}\right)}{x}, & \text{если } x \gg 1. \end{cases}$$

Подставляя в (44,17) асимптотическое значение функции  $W_l(x)$  при  $x \gg 1$ :

$$W_l(x) = -\exp\left(i\left[x - \frac{l\pi}{2}\right]\right),$$

получим:

$$R_l(r) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) - \left[\frac{1}{k} \int_0^\infty g(r') u(r') R_l(r') dr'\right] e^{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}, \quad kr \gg 1.$$

Сравнивая это выражение с (44,8), имеем:

$$S_l \equiv e^{2i\delta_l} = 1 + \frac{2}{ik} \int_0^\infty g_l(r) u(r) R_l(r) dr. \quad (44,19)$$

Пользуясь (44,11), можно также написать:

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l = -\frac{1}{k} \int_0^\infty g_l(r) u(r) R_l(r) dr. \quad (44,19a)$$

Таким образом, если известно решение интегрального уравнения (44,17), то можно вычислить матрицу рассеяния и фазовые смещения  $\delta_l$ .

При малых значениях фаз  $\exp\{2i\delta_l\}$  можно разложить в ряд: тогда, утя (44,19), находим:

$$\delta_l = -\int_0^\infty j_l(kr) u(r) R_l(r) r dr. \quad (44,20)$$

Если система не обладает связанными уровнями, то знак  $j_l(kr)$  и  $R_l(r)$  в области действия потенциала  $u(r)$  одинаков. В этом случае при силах отталкивания ( $u(r) > 0$ ) фазовое смещение согласно формуле (44,20) будет отрицательным ( $\delta_l < 0$ ). Для сил притяжения ( $u(r) < 0$ ) фазовое смещение положительно ( $\delta_l > 0$ ). Если энергия взаимодействия меняет знак, то знак фазового смещения будет определяться условием преобладания сил притяжения или сил отталкивания.

На рис. 50 схематически изображена радиальная функция  $R_l(r)$  для потенциала притяжения и отталкивания по сравнению с функцией  $j_l(kr)$ , соответствующей случаю отсутствия сил взаимодействия.

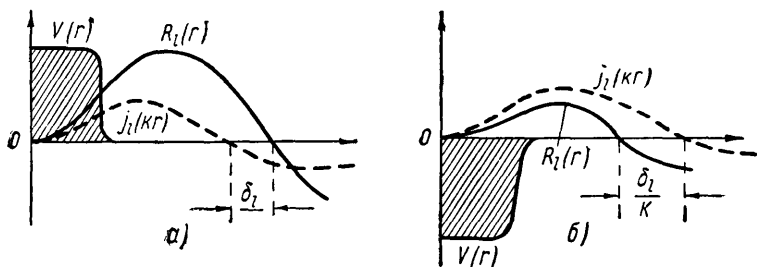


Рис. 50. Схематическое изображение радиальной функции  $R_l(r)$  для потенциала отталкивания (а) и потенциала притяжения (б) при отсутствии связанных уровней.

Предположим, что потенциал взаимодействия имеет радиус действия  $d$  и  $kd \ll 1$ ; тогда, используя асимптотическое значение (44,5), получим:

$$\delta_l = - \int_0^d j_l(kr) u(r) R_l(r) r dr \approx - \frac{k^l}{(2l+1)!!} \int_0^d r^{l+1} u(r) R_l(r) dr.$$

Для грубой оценки этого интеграла вместо  $R_l(r)$  можно подставить первый член (44,17); тогда получим:

$$\delta_l \approx - \frac{k^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \int_0^d r^{2l+2} u(r) dr \approx - \frac{(kd_1)^{2l+1}}{[(2l+1)!!]^2} \int_0^d r u(r) dr,$$

где  $d_1$  — некоторый эффективный радиус взаимодействия. Итак, с уменьшением энергии все фазовые смещения уменьшаются:

$$\delta_l \sim (kd)^{2l+1} \sim (\sqrt{E} d)^{2l+1}, \quad (44,21)$$

и тем быстрее, чем больше  $l$ . Факториалы в знаменателе также сильно

растут с ростом  $l$ :

$l$	0	1	2	3
$[(2l + 1)!!]^2$	1	9	225	11 025

Следовательно, при малых энергиях и малом радиусе действия ядерных сил ( $kd \ll 1$ ) существенный вклад в сечение рассеяния будет вносить только фазовое смещение  $\delta_0$ . В этом случае рассеяние будет обладать сферической симметрией в системе центра инерции.

На рис. 51 изображено изменение значений фазовых смещений  $\delta_0$  и  $\delta_1$  с ростом энергии нейтрона, рассеиваемого потенциальным полем

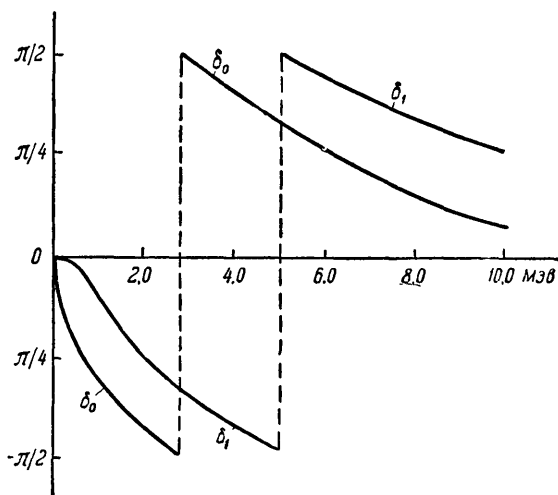


Рис. 51. Изменение фазовых смещений  $\delta_0$  и  $\delta_1$  с ростом энергии при рассеянии нейтронов на потенциальной прямоугольной яме.

прямоугольной формы ( $V_0 = -42$  Мэв,  $d = 4,2 \cdot 10^{-13}$  см). Мы видим, что с ростом энергии нейтрона абсолютные значения  $\delta_0$  и  $\delta_1$  растут, достигая значения  $-\pi/2$  соответственно при энергиях 2,83 и 5,01 Мэв. При переходе через эти значения энергии фазовые смещения изменяются скачком до  $+\pi/2$ , а затем уменьшаются при дальнейшем возрастании энергии. Парциальные эффективные сечения

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2 \delta_l$$

имеют максимальные значения для значений энергии, при которых  $|\delta_l| = \pi/2$ , если не учитывать небольшого смещения, вызываемого



множителем  $k^{-2}$ . Поэтому значения энергии, при которых  $\delta_l = \frac{\pi}{2}$ , называют *виртуальными уровнями* нейтрона в потенциальной яме.

Иногда вместо асимптотического поведения радиальной части функции (44,8):

$$R_l(r) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \frac{S_l - 1}{2i} \exp\left\{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right\},$$

используют другое выражение:

$$R'_l(r) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \operatorname{tg} \delta_l \cdot \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right). \quad (44,22)$$

При таком асимптотическом поведении радиальной волновой функции, соответствующей не расходящимся, а стоячим волнам, для вычисления  $\operatorname{tg} \delta_l$ , определяющего фазовые смещения, надо исходить из интегрального уравнения

$$R'_l(r) = g_l(r) + \int_0^{\infty} K_l(r, r') u(r') R'_l(r') dr', \quad (44,23)$$

где функция Грина должна определяться из условий:

$$K_l(r, r') = \begin{cases} \frac{1}{k} g_l(r) \nu_l(r'), & \text{если } r \leq r'; \\ \frac{1}{k} g_l(r') \nu_l(r), & \text{если } r > r'. \end{cases}$$

При этом функция  $\nu_l(r) = kr n_l(kr)$  и имеет асимптотическое значение при больших  $r$ :

$$\nu_l(r) = -\cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right), \quad kr \gg 1. \quad (44,24)$$

Принимая во внимание (44,24), из (44,23) получим асимптотическое значение

$$R'_l(r) = \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) - \left[ \frac{1}{k} \int_0^{\infty} g(r) u(r) R'(r) dr \right] \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right). \quad (44,25)$$

Сравнивая (44,25) с (44,22), имеем:

$$\operatorname{tg} \delta_l = -\frac{1}{k} \int_0^{\infty} g_l(kr) u(r) R'_l(r) dr. \quad (44,26)$$

Для вычисления фазовых смещений  $\delta_l$  с помощью (44,26) надо предварительно определить  $R'_l(r)$  из интегрального уравнения (44,23).

Швингер [2] предложил заменить интегральное уравнение (44,23) вариационным уравнением. Для получения уравнения Швингера умно-

жим уравнение (44,23) на  $u(r) R'_l(r) dr$  и проинтегрируем по  $r$ ; тогда

$$\int_0^{\infty} u(r) [R'_l(r)]^2 dr = \\ = \int_0^{\infty} g_l(r) u(r) R'_l(r) dr + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' u(r) R'_l(r) K(r, r') u(r') R'_l(r').$$

Разделив это равенство на

$$\left\{ \int_0^{\infty} g_l(r) u(r) R'_l(r) dr \right\}^2,$$

получим:

$$\left\{ \int_0^{\infty} g_l(r) u(r) R'_l(r) dr \right\}^{-1} = \\ = \frac{\int_0^{\infty} u(r) [R'_l(r)]^2 dr - \int dr \int dr' u(r) R'_l(r) K(r, r') u(r') R'_l(r')}{\left[ \int_0^{\infty} g_l(r) u(r) R'_l(r) dr \right]^2}.$$

Используя (44,26), имеем окончательно:

$$k \operatorname{ctg} \delta_l = \frac{\int dr \int dr' u(r) R'_l(r) K(r, r') u(r') R'_l(r') - \int u(r) R_l'^2(r) dr}{\left[ \frac{1}{k} \int g_l(r) u(r) R'_l(r) dr \right]^2}. \quad (44,27)$$

Уравнение (44,27) можно рассматривать как вариационный принцип для  $k \operatorname{ctg} \delta_l$ , так как функция  $R'_l(r)$ , удовлетворяющая интегральному уравнению (44,23), делает (44,27) стационарным. Из стационарных свойств (44,27) следует, что ошибка в  $k \operatorname{ctg} \delta_l$ , полученная из (44,27), будет порядка квадрата ошибки в волновой функции  $R'_l(r)$  (в области действия сил). Вторым преимуществом (44,27) будет его однородность относительно  $R'_l(r)$ . Поэтому при вычислении (44,27) не следует заботиться о нормировке функции  $R'_l(r)$ .

### § 45. Рассеяние нуклонов центральным потенциалом, содержащим спин-орбитальное взаимодействие

В предыдущем параграфе при исследовании рассеяния частиц центрально-симметричным потенциалом мы не учитывали спина частиц. Это допустимо в том случае, когда частицы имеют спин равный нулю или потенциал взаимодействия не зависит от ориентации спина по отношению к направлению орбитального момента количества движения нуклона. Рассмотрим теперь рассеяние нуклона на потенциале, который