жим уравнение (44,23) на $u(r)R_l'(r)\,dr$ и проинтегрируем по r; тогда

$$\int_0^{\infty} u(r)\,[R_l'(r)]^2 dr = \int_0^{\infty} g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr'\,u(r)\,R_l(r)\,K(r, r')\,u(r')\,R_l'(r').$$

Разделив это равенство на

$$\left\{\int_0^{\infty} g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right\}^2,$$

получим:

$$\left\{\int g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right\}^{-1} = \frac{\int_0^{\infty} u(r)\,[R_l'(r)]^2\,dr - \int dr \int dr'u(r)\,R'(r)\,K(r, r')\,u(r')\,R'(r')}{\left[\int_0^{\infty} g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right]^2}.$$

Используя (44,26), имеем окончательно:

$$k \operatorname{ctg} \delta_l = \frac{\int dr \int dr'u(r)\,R_l'(r)\,K(r, r')\,u(r')\,R_l'(r) - \int u(r)\,R_l'^2(r)\,dr}{\left[\frac{1}{k}\int g_l(r)\,u(r)\,R_l'(r)\,dr\right]^2}. \quad (44,27)$$

Уравнение (44,27) можно рассматривать как вариационный принцип для $k \operatorname{ctg} \delta_l$, так как функция $R_l'(r)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (44,23), делает (44,27) стационарным. Из стационарных свойств (44,27) следует, что ошибка в $k \operatorname{ctg} \delta_l$, полученная из (44,27), будет порядка квадрата ошибки в волновой функции $R'(r)$ (в области действия сил). Вторым преимуществом (44,27) будет его однородность относительно $R_l'(r)$. Поэтому при вычислении (44,27) не следует заботиться о нормировке функции $R_l'(r)$.

§ 45. Рассеяние нуклонов центральным потенциалом, содержащим спин-орбитальное взаимодействие

В предыдущем параграфе при исследовании рассеяния частиц центрально-симметричным потенциалом мы не учитывали спина частиц. Это допустимо в том случае, когда частицы имеют спин равный нулю или потенциал взаимодействия не зависит от ориентации спина по отношению к направлению орбитального момента количества движения нуклона. Рассмотрим теперь рассеяние нуклона на потенциале, который содержит спин-орбитальную часть, т. е. зависит от ориентации спина нуклона относительно орбитального момента количества движения. Примером такого потенциала является потенциал, используемый в оптической модели взаимодействия нуклонов и ядер (см. также § 15), который можно записать в виде

$$V(r)=V_1(r)+V_2(r)\boldsymbol{ls}. \tag{45,1}$$

Падающая волна при учете спинового состояния нуклона имеет вид

$$\varphi_a(\boldsymbol{r}, \sigma)=\chi_{^1\!/_2 m}(\sigma)\exp(i\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{r}). \tag{45,2}$$

Для наиболее простого описания процесса рассеяния удобно разложить функцию (45,2) по собственным функциям оператора Гамильтона, содержащего потенциал (45,1). Поскольку интегралами движения при таком гамильтониане являются полный момент количества движения и спиновый момент нуклона, то разложение (45,2) надо проводить по (спин-угловым) сферическим функциям со спином Φ_{ljm} (см. приложение I, § В). Такое разложение легко получить, если разложить $\exp(i\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{r})$ по сферическим функциям и использовать теорему о векторном сложении:

$$\chi_{^1\!/_2 m}(\sigma)\, Y_{l0}(\theta)=\sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\, lm0\,|\,jm\right)\Phi_{ljm}(\sigma, \theta). \tag{45,3}$$

Тогда имеем:

$$\varphi_a(\boldsymbol{r}, \sigma)=\sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left(\frac{1}{2}\, lm0\,|\,jm\right)\Phi_{ljm}(\sigma, \theta)\, j_l(k_a r). \tag{45,4}$$

Если потенциал (45,1) имеет ограниченную область действия, радиус которой равен R, то при $r>R$, используя асимптотическое представление сферической функции Бесселя, можно написать:

$$\varphi_a(\boldsymbol{r}, \sigma)=\sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\, lm0\,|\,jm\right)\Phi_{ljm}\frac{i}{2kr}\left\{e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}-e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\}. \tag{45,5}$$

Волновая функция, учитывающая взаимодействие с потенциалом (45,1), теперь может быть записана в виде (при $r>R$)

$$\psi(\boldsymbol{r}, \sigma)=\sum_{l,j} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\, lm0\,|\,jm\right)\Phi_{ljm}\frac{i}{2kr}\left\{e^{-i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}-S_{lj}e^{i\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\}, \tag{45,6}$$

где S_{lj} — коэффициент, определяющий изменение (вследствие действия потенциала) амплитуды расходящихся сферических волн, S_{lj} является элементом матрицы рассеяния, зависящей от вида потенциала (45,1) и энергии частицы.

Если выделить из (45,6) падающую волну, то можно написать:

$$\psi(\boldsymbol{r}, \sigma) = \varphi_a(\boldsymbol{r}, \sigma) + \\ + \sum_{l,j} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left(\tfrac{1}{2}\, lm0 \mid jm\right) \Phi_{ljm} \frac{S_{lj}-1}{2ikr} \exp\left\{i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right\}. \quad (45,7)$$

Учитывая, что $\dfrac{\exp\left(i\left[x - \frac{l\pi}{2}\right]\right)}{ix} = h_l(x)$, если $x \gg 1$, где $h_l(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода, можно привести (45,7) к виду, часто используемому в литературе:

$$\psi = \varphi_a + \sum_{l,j} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left(\tfrac{1}{2}\, lm0 \mid jm\right) \Phi_{ljm} \frac{S_{lj}-1}{2} h_l(kr). \quad (45,7а)$$

Волновую функцию (45,7) можно записать в виде

$$\psi = \varphi_a + A\frac{e^{ikr}}{r}, \quad (45,8)$$

где амплитуда рассеяния

$$A(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l,j} \sqrt{4\pi(2l+1)} \left(\tfrac{1}{2}\, lm0 \mid jm\right) \Phi_{ljm} (1 - S_{lj}). \quad (45,9)$$

Дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ определится через амплитуду рассеяния обычной формулой:

$$d\sigma = |A(\theta)|^2\, d\Omega. \quad (45,10)$$

Интегрируя по всему телесному углу и усредняя по состояниям поляризации нуклона, получим эффективное интегральное сечение рассеяния:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_m \int |A(\theta)|^2\, d\Omega = \sum_l \sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \frac{2\pi}{k^2} (2j+1) |1 - S_{lj}|^2. \quad (45,11)$$

При получении (45,11) были использованы свойства ортонормированности функций Φ_{ljm} и соотношение

$$\sum_m \left[\left(\tfrac{1}{2}\, lm0 \mid jm\right)\right]^2 = \frac{2j+1}{2l+1}.$$

Если ввести фазовые смещения δ_{lj} с помощью соотношения

$$S_{lj} - 1 = 2i \sin \delta_{lj} \exp(i\delta_{lj}),$$

то (45,11) можно переписать в виде

$$\bar{\sigma}=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}\sum_{j=l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}}(2j+1)\sin^2\delta_{lj}. \qquad (45,12)$$

На рис. 52 изображены фазовые смещения, которые согласно данным Губера и Балдингера [3] хорошо описывают интегральное $\bar{\sigma}$ и дифференциальные эффективные сечения рассеяния нейтронов на He^4 в области от 0 до 4 *Мэв*.

Для исследования поляризации нуклонов при рассеянии в потенциальном поле, содержащем спин-орбитальное взаимодействие, удобно сохранять при вычислениях спиновую волновую функцию $\chi_{^1/_2\,m}$. Другими словами, удобно искать волновую функцию, изображающую состояние системы на больших расстояниях от центра рассеяния, в виде

$$\psi=\varphi_a+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\chi_{^1/_2 m}. \qquad (45,13)$$

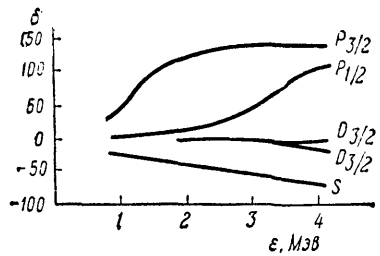

Рис. 52. Фазовые смещения, описывающие рассеяние нейтронов на He^4.

Такое представление возможно, если ввести два проекционных оператора Π^+ и Π^-, обладающих следующими свойствами: Π^+, действуя на функцию $Y_{l0}\chi_{^1/_2 m}$, обращает в нуль в разложении (45,3) слагаемое, соответствующее функции $\Phi_{l,\,l-^1/_2,\,m}$, и оставляет неизменным слагаемое, соответствующее $j=l+{}^1/_2$. Оператор Π^- обращает в нуль слагаемое с $j=l+{}^1/_2$ и оставляет неизменным слагаемое с $j=l-{}^1/_2$. Учитывая, что функции Φ_{ljm} (см. приложение I, § В) являются собственными функциями оператора $\hat{\sigma}\hat{l}$ с собственными значениями:

$$(\hat{\sigma}\hat{l})\,\Phi_{l,\,l+^1/_2,\,m}=l\Phi_{l,\,l+^1/_2,\,m},\quad \hat{l}=-i\,[\boldsymbol{r}\nabla],$$

$$(\hat{\sigma}\hat{l})\,\Phi_{l,\,l-^1/_2,\,m}=-(l+1)\,\Phi_{l,\,l-^1/_2,\,m},$$

можно написать проекционные операторы Π^+ и Π^- в виде

$$\Pi^+=\frac{l+1+\hat{\sigma}\hat{l}}{2l+1},\quad \Pi^-=\frac{l-\hat{\sigma}\hat{l}}{2l+1}. \qquad (45,14)$$

С помощью операторов (45,14) функцию (45,7) можно привести к виду

$$\psi=\varphi_a+\sum_l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,\{\Pi^+(S_{l,\,l+^1/_2}-1)+$$
$$+\Pi^-(S_{l,\,l-^1/_2}-1)\}\,Y_{l0}\chi_{^1/_2 m}\frac{e^{ikr}}{2ikr}. \qquad (45,15)$$

Вводя фазовые смещения δ_l^+ и δ_l^- с помощью соотношений

$$S_{l,\, l\pm 1/2} - 1 = 2i \exp(i\delta_l^{\pm}) \sin \delta_l^{\pm}$$

и используя явный вид операторов (45,14), можно написать:

$$\psi = \varphi_a + \sum_l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \{[(l+1)\exp(i\delta_l^+)\sin\delta_l^+ + l\exp(i\delta_l^-)\sin\delta_l^-] Y_{l0} + \\ + [\exp(i\delta_l^+)\sin\delta_l^+ - \exp(i\delta_l^-)\sin\delta_l^-]\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{l}}\, Y_{l0}\} \frac{e^{ikr}}{kr}\chi_{1/2 m}. \quad (45,16)$$

Если вектор $\boldsymbol{k}_b$ определяет направление рассеяния, то легко убедиться, что

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{l}})\, Y_{l0} = i \sin\theta \frac{\partial Y_{l0}}{\partial \cos\theta}\, \boldsymbol{\sigma n}, \quad (45,17)$$

где единичный вектор $\boldsymbol{n}$ определяется равенством

$$\boldsymbol{n} k^2 \sin\theta = [\boldsymbol{k}_b,\ \boldsymbol{k}_a].$$

Учитывая (45,17), можно привести функцию (45,16) к виду (45,13), если

$$f(\theta) = A(\theta)\, \mathrm{I} + B(\theta)\, \boldsymbol{\sigma n}, \quad (45,18)$$

$$\left.\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,[(l+1)\exp(i\delta_l^+)\sin\delta_l^+ + \\ &\qquad + l\exp(i\delta_l^-)\sin\delta_l^-]\, Y_{l0}, \\ B(\theta) &= \frac{i\sin\theta}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,[\exp(i\delta_l^+)\sin\delta_l^+ - \\ &\qquad - \exp(i\delta_l^-)\sin\delta_l^-]\,\frac{\partial Y_{l0}}{\partial\cos\theta}; \end{aligned}\right\} \quad (45,19)$$

I — единичная двухмерная матрица.

Если падающие нуклоны не поляризованы, то дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\sum_m |f(\theta)|^2 = |A(\theta)|^2 + |B(\theta)|^2. \quad (45,20)$$

Итак, при рассеянии частиц со спином $^1/_2$ в поле, потенциал которого содержит спин-орбитальное взаимодействие, асимптотическое значение волновой функции на больших расстояниях от области действия ядерных сил может быть представлено в виде

$$\psi_f = \psi_a - \varphi_a = f(\theta)\, \frac{\exp(ikr)}{r}\, \chi_{1/2 m}, \quad (45,21)$$

где амплитуда рассеяния является матрицей

$$f(\theta) = A(\theta)\, \mathrm{I} + B(\theta)\, \boldsymbol{\sigma n}. \tag{45,22}$$

К задаче рассеяния центрально симметричным потенциалом, содержащим спин-орбитальное взаимодействие, относится и задача рассеяния частиц со спином $^1/_2$ на ядрах с нулевым спином. В этом случае рассеяние характеризуется дифференциальным сечением и состоянием поляризации рассеянных частиц.

Определим вектор относительной поляризации частиц с помощью соотношения

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum\limits_m (\psi_f, \boldsymbol{\sigma}\psi_f)}{\sum\limits_m (\psi_f, \psi_f)};$$

тогда, подставляя (45,21), находим:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{n}\frac{A^*B + B^*A}{|A|^2 + |B|^2} = \boldsymbol{n}\frac{2\,\mathrm{Re}\,AB^*}{\frac{d\sigma}{d\Omega}}. \tag{45,23}$$

Таким образом, вектор поляризации рассеянных частиц на ядрах нулевого спина всегда направлен перпендикулярно к плоскости рассеяния.

Исходя из требования инвариантности при пространственных вращениях и отражениях легко убедиться, что формула (45,22) является наиболее общим видом амплитуды рассеяния частиц со спином $^1/_2$ на ядрах, не имеющих спина. В самом деле, амплитуда рассеяния $f(\theta)$ в спиновом пространстве частиц со спином $^1/_2$ должна изображаться матрицей, составленной из единичной матрицы I и трех спиновых матриц Паули σ_x, σ_y, σ_z. Из этих четырех матриц можно построить следующие неприводимые тензорные величины:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{I} \text{ — скаляр,}\\ &\boldsymbol{\sigma} \text{ — аксиальный вектор.}\end{aligned}\right\} \tag{а}$$

Кроме спина частица характеризуется двумя векторами $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$ начального и конечного состояний соответственно. Из этих двух векторов можно построить следующие неприводимые тензоры:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{k}_b \text{ — скаляр,}\\ &\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{k}_b - \boldsymbol{k}_a}{|\boldsymbol{k}_b - \boldsymbol{k}_a|} \text{ — полярный вектор,}\\ &\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{k}_a]\,(|[\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{k}_a]|)^{-1} \text{ — аксиальный вектор,}\\ &\boldsymbol{N} = \frac{[\boldsymbol{nK}]}{|[\boldsymbol{nK}]|} = \frac{\boldsymbol{k}_b + \boldsymbol{k}_a}{|\boldsymbol{k}_b + \boldsymbol{k}_a|} \text{ — полярный вектор.}\end{aligned}\right\} \tag{б}$$

Единичные векторы $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{n}$ взаимно ортогональны, при этом $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{N}$ лежат в плоскости рассеяния, а $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен к плоскости рассеяния.

Из величин (а) и (б) можно образовать только два скаляра, инвариантных при пространственном вращении и отражении:

$$\mathrm{I} \text{ и } \boldsymbol{n\sigma}.$$

Следовательно, наиболее общий вид амплитуды рассеяния неполяризованного пучка частиц со спином $^1/_2$ на ядрах со спином нуль должен быть

$$f(0) = A\cdot\mathrm{I} + B\,\boldsymbol{n\sigma}, \tag{45,24}$$

где A и B — функции скаляров $k_a^2 = k_b^2$ и $(\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{k}_a)$, т. е. функции энергии относительного движения и косинуса угла рассеяния. Если учесть, что при обращении времени (см. § 51) имеет место преобразование

$$\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{k}_a \to -\boldsymbol{k}_a, \quad \boldsymbol{k}_b = -\boldsymbol{k}_b,$$

то легко видеть, что (45,24) инвариантно относительно операции обращения времени.

Упругое рассеяние нуклонов нуклонами и нуклонов ядрами, обладающими спином, также сводится к задаче рассеяния частиц потенциальным полем. Однако в этом случае вследствие того, что спиновое пространство системы имеет большее число степеней свободы, общее выражение для амплитуды рассеяния имеет более сложный вид, чем (45,24).

Определим общий вид амплитуды рассеяния при взаимодействии двух частиц, имеющих спин $^1/_2$. Теперь амплитуда рассеяния будет изображаться матрицей, составленной из матриц I, σ_{1x}, σ_{1y}, σ_{1z}, σ_{2x}, σ_{2y}, σ_{2z}. Из этих матриц можно построить следующие неприводимые тензорные величины [4]:

$$\left.\begin{array}{r l} \mathrm{I} & \text{— скаляр,} \\ (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 - \mathrm{I}) & \text{— скаляр,} \\ (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) & \text{— аксиальный вектор,} \\ (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) & \text{— аксиальный вектор,} \\ [\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2] & \text{— аксиальный вектор,} \\ t_{xy} = (\sigma_{1x}\sigma_{2y} + \sigma_{1y}\sigma_{2x}),\ t_{yz},\ \ldots & \text{— симметричные тензоры} \\ & \quad \text{второго ранга.} \end{array}\right\} \quad (\text{в})$$

Тензоры, образованные из $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$, кроме (б) должны включать еще симметричные тензоры:

$$\left.\begin{array}{l} K_xK_y, \quad n_xn_y, \quad N_xN_y, \ \ldots, \\ K_xN_y + K_yN_x, \ \ldots \end{array}\right\} \quad (\text{г})$$

Из величин (б) — (г) можно образовать следующее общее выражение для амплитуды рассеяния частиц спина $^1/_2$ на частицах спина $^1/_2$, инвариантное относительно операций обращения времени, пространственных вращений и отражений:

$$f = A\cdot\mathrm{I} + B(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 - \mathrm{I}) + C(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{n} + D(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)\boldsymbol{n} + \\ + E(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{K})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{K}) + F(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{N})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{N}). \tag{45,25}$$

Если мы интересуемся спиновыми состояниями только первой частицы, то амплитуду рассеяния можно представить в виде

$$f = a1 + b\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{n}) + c\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{K}) + d\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{N}), \tag{45,26}$$

где a, b, c, d — зависящие от энергии относительного движения и угла рассеяния функции, содержащие спиновые операторы второй частицы.

При упругом рассеянии частиц с произвольными спинами s_1 и s_2 амплитуда рассеяния должна определяться в спиновом пространстве $(2s_1+1)(2s_2+1)$ измерений. В этом случае амплитуда рассеяния должна строиться из произведений $(2s_1+1)$ спиновых состояний операторов первой частицы, $(2s_2+1)$ спиновых операторов второй частицы и тензорных операторов, построенных из $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$. Амплитуда рассеяния сохраняет свой вид (45,26) и в случае рассеяния частицы спина $^1/_2$ на ядрах с произвольным спином, если интересуются только спиновыми состояниями этой частицы.

Коэффициенты A, B, C, D, E и F в (45,25) зависят, вообще говоря, от энергии относительного движения частиц и косинуса угла рассеяния. При рассеянии тождественных частиц амплитуда рассеяния должна быть инвариантной относительно перестановки обеих частиц. Отсюда следует, что коэффициенты A, B, C, E, F должны быть симметричными, а коэффициент D антисимметричным относительно преобразования $\theta \to \pi - \theta$.

§ 46. Рассеяние нейтронов малой энергии на свободных протонах

При рассеянии нейтронов на протонах последние можно считать свободными, если энергия нейтрона велика по сравнению с энергией химической связи протона (~ 1 *эв*) в молекуле или кристалле. Поэтому при рассеянии нейтронов с энергией, превышающей несколько *эв*, можно не учитывать эффект химической связи.

Длина волны $\lambdabar = \frac{\hbar}{\mu v}$, соответствующая относительной скорости нейтрона и протона v (μ-приведенная масса), выражается через энергию $E_л$ (*Мэв*) нейтронов в лабораторной системе координат простой формулой:

$$\lambdabar = \frac{9\cdot 10^{-13}}{\sqrt{E_л}}\ см. \tag{46,1}$$

Для $E_л < 10$ *Мэв* длина волны превышает радиус действия ядерных сил и согласно оценкам, сделанным в § 44, в рассеянии могут участвовать только S-волны ($l=0$). Рассеяние будет изотропным в системе центра инерции до тех пор, пока протон можно рассматривать как свободную частицу. В этом параграфе будет исследовано рассеяние протонами нейтронов с энергией в интервале 1 *эв* $< E_л < 10$ *Мэв*.

Радиальная волновая функция в случае S-состояния системы удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - u(r)\right] R(r) = 0, \quad R(0) = 0, \tag{46,2}$$