Если мы интересуемся спиновыми состояниями только первой частицы, то амплитуду рассеяния можно представить в виде

$$f = a\mathrm{I} + b\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{n}) + c\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{K}) + d\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{N}), \tag{45,26}$$

где a, b, c, d — зависящие от энергии относительного движения и угла рассеяния функции, содержащие спиновые операторы второй частицы.

При упругом рассеянии частиц с произвольными спинами s_1 и s_2 амплитуда рассеяния должна определяться в спиновом пространстве $(2s_1+1)(2s_2+1)$ измерений. В этом случае амплитуда рассеяния должна строиться из произведений $(2s_1+1)$ спиновых состояний операторов первой частицы, $(2s_2+1)$ спиновых операторов второй частицы и тензорных операторов, построенных из $\boldsymbol{k}_a$ и $\boldsymbol{k}_b$. Амплитуда рассеяния сохраняет свой вид (45,26) и в случае рассеяния частицы спина $^1/_2$ на ядрах с произвольным спином, если интересуются только спиновыми состояниями этой частицы.

Коэффициенты A, B, C, D, E и F в (45,25) зависят, вообще говоря, от энергии относительного движения частиц и косинуса угла рассеяния. При рассеянии тождественных частиц амплитуда рассеяния должна быть инвариантной относительно перестановки обеих частиц. Отсюда следует, что коэффициенты A, B, C, E, F должны быть симметричными, а коэффициент D антисимметричным относительно преобразования $\theta \to \pi - \theta$.

§ 46. Рассеяние нейтронов малой энергии на свободных протонах

При рассеянии нейтронов на протонах последние можно считать свободными, если энергия нейтрона велика по сравнению с энергией химической связи протона (~ 1 *эв*) в молекуле или кристалле. Поэтому при рассеянии нейтронов с энергией, превышающей несколько *эв*, можно не учитывать эффект химической связи.

Длина волны $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{\mu v}$, соответствующая относительной скорости нейтрона и протона v (μ-приведенная масса), выражается через энергию $E_л$ (*Мэв*) нейтронов в лабораторной системе координат простой формулой:

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{9\cdot 10^{-13}}{\sqrt{E_л}}\ см. \tag{46,1}$$

Для $E_л < 10$ *Мэв* длина волны превышает радиус действия ядерных сил и согласно оценкам, сделанным в § 44, в рассеянии могут участвовать только S-волны ($l=0$). Рассеяние будет изотропным в системе центра инерции до тех пор, пока протон можно рассматривать как свободную частицу. В этом параграфе будет исследовано рассеяние протонами нейтронов с энергией в интервале 1 *эв* $< E_л < 10$ *Мэв*.

Радиальная волновая функция в случае S-состояния системы удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - u(r)\right] R(r) = 0, \quad R(0) = 0, \tag{46,2}$$

где

$$k^2 = \frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} = \frac{ME_л}{\hbar^2}; \quad u(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r);$$

ε — энергия относительного движения, равная половине энергии нейтронов падающего пучка в лабораторной системе координат $E_л$ (см. § 42).

Система, состоящая из протона и нейтрона, может находиться в двух спиновых состояниях: синглетном и триплетном. Энергия их взаимодействия в каждом из этих состояний будет различной. Вначале рассмотрим случай синглетного состояния, снабдив u и R индексом s:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - u_s(r)\right] R_s(r) = 0, \quad R_s(0) = 0. \tag{46,3}$$

Наряду с этим уравнением рассмотрим аналогичное уравнение для $k = 0$*):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - u_s(r)\right] R_{0s}(r) = 0, \quad R_{0s}(0) = 0. \tag{46,4}$$

Умножая (46,3) на R_{0s}, а (46,4) на R_s и вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$\frac{d}{dr}\left(R_s \frac{dR_{0s}}{dr} - R_{0s}\frac{dR_s}{dr}\right) = k^2 R_s R_{0s}. \tag{46,5}$$

Введем теперь вспомогательные функции Φ_s и Φ_{0s}, удовлетворяющие соответственно уравнениям (46,3) и (46,4) при $u_s = 0$ и при $r = 0$, равные 1, а при $r \to \infty$ переходящие в R_s и R_{0s}. Этим условиям удовлетворяют функции

$$\Phi_s = \frac{\sin(kr + \delta_s)}{\sin \delta_s}, \quad \Phi_{0s} = \frac{a_s - r}{a_s}, \tag{46,6}$$

где a_s — некоторая постоянная величина, называемая *длиной рассеяния*; δ_s — фазовый сдвиг рассеянной волны в синглетном спиновом состоянии. Функции (46,6) удовлетворяют соотношению

$$\frac{d}{dr}\left(\Phi_s \frac{d\Phi_{0s}}{dr} - \Phi_{0s}\frac{d\Phi_s}{dr}\right) = k^2 \Phi_s \Phi_{0s}. \tag{46,7}$$

Вычтем (46,7) из (46,5) и проинтегрируем полученную разность по r от нуля до бесконечности. Принимая во внимание (46,6), граничные условия в нуле и условие совпадения функций R и Φ при больших r, получим:

$$k \operatorname{ctg} \delta_s = -\frac{1}{a_s} + k^2 \int_0^\infty (\Phi_s \Phi_{0s} - R_s R_{0s})\, dr. \tag{46,8}$$

*) Поскольку мы не учитываем химической связи протона, то переход к пределу $k \to 0$ следует рассматривать как экстраполяцию случая отсутствия связи, а не как истинное рассеяние при малых энергиях.

Уравнение (46,8) является точным; с его помощью можно найти приближенное выражение, имеющее большое практическое значение. Прежде всего отметим, что $\int\limits_0^\infty R_s R_{0s}\, dr = 0$, так как функции R_s и R_{0s} принадлежат к разным энергетическим состояниям. Однако удобно сохранить произведение $R_s R_{0s}$ под знаком интеграла; тогда подынтегральная функция будет отлична от нуля в основном только внутри области действия ядерных сил ($r < d$). Для рассматриваемого случая малых энергий ($kd \ll 1$) подынтегральное выражение будет слабо зависеть от энергии и можно положить:

$$\int\limits_0^\infty (\Phi_0 \Phi_{0s} - R_s R_{0s})\, dr = \frac{1}{2} r_{0s} + k^2 \gamma_s + \ldots, \tag{46,9}$$

где

$$r_{0s} = 2 \int\limits_0^\infty (\Phi_{0s}^2 - R_{0s}^2)\, dr$$

не зависит от энергии, имеет размерность длины и называется *эффективным радиусом действия ядерных сил.*

Итак, при учете (46,9) находим:

$$k \operatorname{ctg} \delta_s = -\frac{1}{a_s} + \frac{k^2 r_{0s}}{2} + k^4 \gamma_s + \ldots \tag{46,10}$$

Проведя аналогичные рассуждения для случая триплетного рассеяния, получим:

$$k \operatorname{ctg} \delta_t = -\frac{1}{a_t} + \frac{k^2 r_{0t}}{2} + k^4 \gamma_t + \ldots \tag{46,11}$$

Из (46,10) и (46,11) следует, что в пределе малых энергий фазовое смещение синглетного (триплетного) рассеяния определяется только одним параметром — длиной рассеяния a_s (a_t). Длиной рассеяния a называют такое значение r, при котором волновая функция, соответствующая экстраполяции к нулевой энергии, первый раз обращается в нуль. При $k = 0$ волновая функция вне радиуса действия ядерных сил $\psi = e^{ikr} + \frac{A}{r} e^{ikr}$ принимает вид $\psi = 1 + \frac{A}{r}$. По определению длина рассеяния a находится из условия $\psi|_{r=a} = 0$; следовательно, длина рассеяния a и амплитуда рассеяния A (при нулевой энергии) связана простым соотношением

$$a = -A. \tag{46,12}$$

На рис. 53 изображены радиальные функции $R_0(r)$ и $\Phi_0(r)$ для потенциала притяжения и трех значений длин рассеяния. При $a > 0$ в потенциальной яме возможны связанные состояния. При $a = \infty$ в потенциальной яме возможно только одно связанное состояние с нулевой энергией. При $a < 0$ в потенциальной яме нет связанных состояний.

При нулевой энергии (или бесконечно малом радиусе действия ядерных сил) формулы (46,10) и (46,11) переходят соответственно в

$$k \operatorname{ctg} \delta_s = -\frac{1}{a_s}, \quad k \operatorname{ctg} \delta_t = -\frac{1}{a_t}. \tag{46,13}$$

Если фазовые смещения определены в интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$, то согласно (46,13) положительным значениям длины рассеяния соответствуют отрицательные фазовые смещения $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \delta < 0\right)$, а отрицательным значениям длины рассеяния соответствуют положительные

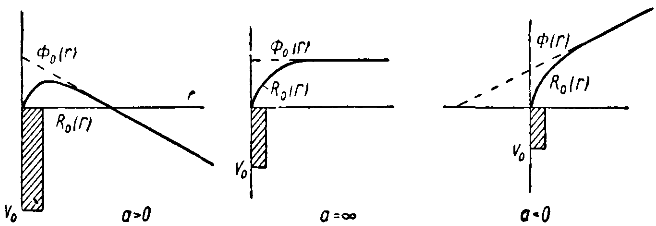

Рис. 53. Радиальные волновые функции, соответствующие рассеянию при нулевой энергии для положительной, отрицательной и бесконечной длин рассеяния.

фазовые смещения $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если фазовые смещения определены в интервале $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$, то согласно (46,13) положительным значениям длины рассеяния будут соответствовать фазовые смещения из интервала: $\frac{\pi}{2} < \delta \leqslant \pi$, а отрицательным значениям длины рассеяния фазовые смещения из интервала $0 \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$.

Учет конечного радиуса действия ядерных сил позволяет с помощью (46,10) и (46,11) определить зависимость фазовых смещений от энергии (при малых энергиях). Формулы (46,10) и (46,11) впервые получены Ландау и Смородинским [5] и называются в литературе приближением, «не зависящим от формы потенциала». Более строгое обоснование этого приближения дано в [2, 6].

Согласно (46,10) и (46,11) эффективные сечения рассеяния нейтронов на протонах будут зависеть от двух постоянных a_s и r_{0s} для синглетного спинового состояния и a_t и r_{0t} для триплетного спинового состояния:

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_s = \frac{4\pi}{k^2 + k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta_s} = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{2} r_{0s} k^2 - \frac{1}{a_s}\right)^2}, \tag{46,14}$$

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2 + \left(\frac{1}{2} r_{0t} k^2 - \frac{1}{a_t}\right)^2}. \tag{46,15}$$

Из формул (46,14) и (46,15) следует, что экстраполированные к нулевой энергии сечения выражаются через квадраты соответствующих длин рассеяния:

$$\sigma_t = 4\pi a_t^2, \quad \sigma_s = 4\pi a_s^2, \quad k \to 0. \tag{46,15a}$$

Измерение эффективных сечений рассеяния нейтронов малой энергии на протонах может дать сведения только о двух параметрах, характеризующих потенциальную энергию взаимодействия, и не определяет функциональной зависимости этой энергии от расстояния. В частности, в случае потенциальных энергий взаимодействия, зависящих от двух параметров:

прямоугольная яма $$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < d, \\ 0, & r > d; \end{cases}$$

гауссовский потенциал $$V(r) = -V_0 e^{-r^2/d^2};$$

потенциал экспоненциальной формы $$V(r) = -V_0 e^{-2r/d};$$

потенциал Юкавы $$V(r) = -\frac{V_0 e^{-r/d}}{r/d}$$ и других,

можно получить значения длины рассеяния и эффективного радиуса, найденных опытным путем, при надлежащем выборе параметров V_0 и d, т. е. «глубины и ширины» соответствующих потенциалов.

Итак, экспериментальные данные по рассеянию нейтронов на протонах в области энергий, меньших 10 *Мэв*, не позволяют сделать выбор между приведенными выше потенциалами (или какими-либо другими). Можно использовать любой из этих потенциалов для описания процесса рассеяния при малых энергиях, если выбрать соответствующие значения V_0 и d. Удовлетворительные результаты дает потенциал Юкавы с параметрами для триплетного рассеяния $V_{0t} = 67{,}8$ *Мэв*, $d_t = 1{,}18 \times 10^{-13}$ *см*. Потенциал синглетного рассеяния выбирается меньшим $V_{0s} = 0{,}6 V_{0t}$.

Эффективный радиус действия ядерных сил, зависящий от величины d и V_0, уменьшается с увеличением «глубины» ямы, однако, характер этого изменения зависит от формы потенциала [2].

В случае триплетного спинового состояния можно связать параметры, описывающие рассеяние, с энергией связи дейтрона. Как известно, энергия связи дейтрона

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2\mu},$$

где β^{-1} — «эффективный радиус» дейтрона. Радиальная волновая функция, выраженная через матрицу рассеяния S, должна при $k = -i\beta$ перейти в волновую функцию связанного состояния дейтрона, т. е.

$$R = e^{-ikr} - Se^{ik} \to e^{-\beta r} - Se^{\beta r} = e^{-\beta r}.$$

Это равенство возможно, если $S=0$. Поскольку

$$S=e^{2i\delta}=\frac{\operatorname{ctg}\delta+i}{\operatorname{ctg}\delta-i},$$

то в этом случае

$$\operatorname{ctg}\delta_t=-i.$$

Подставляя это значение в (46,11) и полагая $k=-i\beta$, получим:

$$\beta=\frac{1}{a_t}+\frac{1}{2}\beta^2 r_{0t}. \tag{46,16}$$

Из (46,16) следует, что в приближении нулевого радиуса действия ядерных сил $\beta=a_t^{-1}$; таким образом, в этом приближении длина триплетного спинового рассеяния совпадает с эффективным радиусом дейтрона, равным $4{,}3\cdot10^{-13}$ *см*. Рассеяние происходит как бы на твердой сфере с радиусом, равным эффективному радиусу дейтрона.

Поскольку в приближении нулевого радиуса действия ядерных сил

$$k\operatorname{ctg}\delta=-a_t^{-1},$$

то матрица рассеяния нейтрона на протоне в триплетном состоянии может быть представлена в виде

$$S=e^{2i\delta}=-\frac{k+ia_t^{-1}}{k-ia_t^{-1}}.$$

С помощью (46,16) уравнение (46,11) преобразуется к виду

$$k\operatorname{ctg}\delta_t=-\beta+\frac{1}{2}(\beta^2+k^2)\,r_{0t}. \tag{46,17}$$

Для рассеяния нейтронов на протонах в синглетном спиновом состоянии можно по аналогии с (46,16) ввести величину β_s с помощью соотношения

$$\beta_s=\frac{1}{a_s}+\frac{1}{2}\beta_s^2 r_{0s} \tag{46,18}$$

и сопоставить ей энергию $E_s=\frac{\hbar^2\beta_s^2}{2\mu}>0$, которую называют энергией виртуального уровня дейтрона.

Используя формулы (46,16) и (46,18), выражения для сечений рассеяния (46,14) и (46,15) можно преобразовать к виду

$$\sigma_s=\frac{4\pi}{(k^2+\beta_s^2)\left[1-r_{0s}\beta_s+\frac{1}{4}(k^2+\beta_s^2)\,r_{0s}^2\right]},$$

$$\sigma_t=\frac{4\pi}{(k^2+\beta_t^2)\left[1-r_{0t}\beta_t+\frac{1}{4}(k^2+\beta_t^2)\,r_{0t}^2\right]}.$$

Опыты по рассеянию нейтронов на протонах обычно выполняются с неполяризованным пучком нейтронов на неполяризованных протонах, поэтому из четырех возможных ориентаций спинов нейтронов и протонов три будут относиться к триплетному спиновому состоянию, а одно — к синглетному. Измеряемое на опыте усредненное по ориентациям спинов сечение рассеяния будет

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s. \tag{46,19}$$

Сечение (46,19) содержит три неизвестные величины: два эффективных радиуса r_{0t} и r_{0s} и длину синглетного рассеяния; длина триплетного рассеяния выражается через энергию связи дейтрона (или β) и r_{0t} — с помощью формулы (46,16).

Сечение рассеяния при «нулевой» энергии нейтронов равно [7] $\sigma_0 = (20{,}36 \pm 0{,}10)\cdot 10^{-24}$. Используя это значение и формулы (46,19) и (46,15а), можно вычислить a_s и a_t. Остающиеся две неизвестные величины r_{0t} и r_{0s} в принципе можно было бы определить, изучая зависимость сечения рассеяния (46,19) от энергии падающих нейтронов. Однако точность современных экспериментов еще недостаточна, чтобы однозначно решить эту задачу. Если предположить, что $r_{0t} = 1{,}7\cdot 10^{-13}$ *см*, $a_t = 5{,}39\cdot 10^{-13}$ *см*, $a_s = -2{,}37\cdot 10^{-12}$ *см*, то экспериментальные сечения рассеяния [8] совместимы со значением r_{0s}, лежащим в интервале $1{,}5\cdot 10^{-13} - 3{,}5\cdot 10^{-13}$ *см*. Гипотеза зарядовой независимости ядерных сил позволяет из сопоставления с данными по рассеянию протонов на протонах (см. § 47) принять значение $r_{0s} = 2{,}6\cdot 10^{-13}$ *см*.

Итак, из экспериментальных данных по рассеянию нейтронов малой энергии на протонах можно определить только длину рассеяния и эффективный радиус действия ядерных сил и нельзя определить зависимость от расстояния потенциальной энергии взаимодействия.

Эксперименты по рассеянию нейтронов на протонах указывают, что рассеяние изотропно вплоть до энергии ~ 20 *Мэв*. Этот результат несколько неожидан, так как энергии 20 *Мэв* соответствует, согласно (46,1), $\lambdabar = 2\cdot 10^{-13}$ *см*, и поэтому можно было бы ожидать появления рассеяния в состоянии с $l > 0$. Эти факты указывают на зависимость потенциала взаимодействия от орбитального квантового числа l, в частности от четности состояния.

§ 47. Рассеяние протонов на протонах при малых энергиях

Рассеяние протонов протонами является одним из лучших средств количественного изучения ядерных сил, так как точность экспериментов с протонами значительно выше, чем с нейтронами.

В связи с тем, что при рассеянии протонов на протонах участвуют тождественные частицы в силу принципа Паули в S-состоянии могут находиться только протоны с антипараллельными спинами, т. е. S-рас-