Реакция $A(a, b)B$ называется *экзотермической*, если $Q > 0$, и *эндотермической*, если $Q < 0$. Из неравенства $\varepsilon_b \geqslant 0$ следует, что эндотермическая реакция возможна лишь в том случае, если

$$\varepsilon_a \geqslant -Q. \qquad (49,5)$$

Неравенство (49,5) определяет минимальную кинетическую энергию относительного движения a и A, при которой еще возможна реакция $A(a, b)B$. Энергии $(-Q)$ в лабораторной системе (когда покоится A, а движется только частица a) соответствует энергия

$$\varepsilon_{\text{порог}} = -Q\frac{M_a}{\mu},$$

где M_a — масса частицы a; μ — приведенная масса частиц a и A. Энергия $\varepsilon_{\text{порог}}$ называется *порогом реакции*.

Законы сохранения момента количества движения и четности приводят к соответствующим правилам отбора в ядерных реакциях, которые будут рассмотрены в дальнейшем на ряде конкретных примеров.

Как уже отмечалось, вследствие зарядовой независимости ядерных сил в легких ядрах хорошим квантовым числом является полный изотопический спин ядра. Сохранение изотопического спина при ядерных реакциях приводит к ряду полезных правил отбора: а) при распаде ядра с изотопическим спином T векторная сумма изотопических спинов продуктов распада также должна равняться T; б) если происходит ядерная реакция, в которой и начальная и конечная частицы имеют равный нулю изотопический спин, например реакции (d, d'), (α, α'), (d, α), (α, d) и др., то остаточное ядро должно иметь изотопический спин, равный изотопическому спину начального ядра; в) переход ядра в возбужденное состояние при взаимодействии с α-частицей или дейтроном ($T=0$) или распад ядра с вылетом α-частицы или дейтрона должны происходить без изменения изотопического спина. Так, например, при неупругом рассеянии дейтронов ядрами, изотопический спин которых в основном состоянии равен нулю, нельзя возбудить состояния с изотопическим спином, равным единице. Например, таким путем нельзя возбудить 3,56-*Мэв* возбужденное состояние Li^6 или 2,31-*Мэв* возбужденное состояние N^{14}, или 1,74-*Мэв* возбужденное состояние B^{10}, которые все согласно схемам рис. 6, 16 и 17 имеют изотопический спин $T=1$. Эти правила отбора указывают далее на невозможность получения 2,31-*Мэв* возбужденного состояния N^{14} в ядерных реакциях $O^{16}(d, \alpha)N^{14}$, $N^{14}(\alpha, \alpha')N^{14}$ или получения 1,74-*Мэв* возбужденного состояния B^{10} в реакции $C^{12}(d, \alpha)B^{10}$.

§ 50. Матрица рассеяния. Каналы реакции

Рассмотрим вначале для простоты случай рассеяния бесспиновых частиц (например, α-частиц) на ядрах с нулевым спином (четно-четные ядра). Кроме того, будем учитывать только специфические ядерные силы и не будем учитывать кулоновское взаимодействие.

Предположим, что начальное состояние изображается волновой функцией:

$$\Phi_a = \psi_a(\ldots q \ldots)\, v_a^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_a \mathbf{r}), \tag{50,1}$$

где ψ_a — определяет внутреннее состояние ядра A; v_a — скорость относительного движения частицы a и ядра A. Функция (50,1) нормирована на единицу потока. Разлагая плоскую волну (50,1) по сферическим функциям, можно представить Φ_a в виде суперпозиции парциальных волн, соответствующих определенным значениям орбитального момента; тогда асимптотическое значение ($k_a r \gg 1$) функции (50,1) будет иметь вид

$$\Phi_a = \psi_a(q) \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r \sqrt{v_a}} \sum_{l=0} \sqrt{2l+1}\, i^l Y_{l0}(0) \left(e^{-i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)} - e^{i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)}\right). \tag{50,2}$$

В результате взаимодействия a и A возникает новое состояние, волновая функция которого при $kr \gg 1$ будет

$$\psi(r, q) = \Phi_a + \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1}\, i^{l+1} Y_{l0} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - S_{aa}^{(l)}\right) \frac{\psi_a(q)}{\sqrt{v_a}} e^{i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)} - \sum_b S_{ba}^{(l)} \frac{\psi_b(q)}{\sqrt{v_b}} e^{i\left(k_b r - \frac{l\pi}{2}\right)} \right\}, \tag{50,3}$$

где v_b — скорость относительного движения частиц после реакции; Φ_a — волновая функция начального состояния; члены с волновой функцией $\psi_a(q)$ соответствуют упругому рассеянию; члены с волновыми функциями $\psi_b(q)$ соответствуют неупругому рассеянию и всем возможным реакциям; коэффициенты $S_{ba}^{(l)}$ образуют *матрицу рассеяния*, определяющую асимптотическое поведение волновой функции вне области взаимодействия. Если не происходит вообще никакого рассеяния, то $S_{ba} = \delta_{ba}$. Если происходит только упругое рассеяние, то матричные элементы матрицы рассеяния S_{aa} связаны с фазовыми смещениями δ_l соотношением $S_{aa}^{(l)} = \exp(2i\delta_l)$, где δ_l вещественно *).

Умножим (50,3) на $\psi_a^*(q)$ и проинтегрируем по всем переменным q; тогда в силу ортогональности состояний $\psi_a(q)$ и $\psi_b(q)$ получим:

$$\varphi_a(r) = \frac{e^{ik_a r}}{\sqrt{v_a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{k_a r \sqrt{v_a}} \sum_l \sqrt{2l+1}\, i^{l+1} Y_{l0}(0) \left[1 - S_{aa}^{(l)}\right] e^{i\left(k_a r - \frac{l\pi}{2}\right)}. \tag{50,4}$$

---

*) В этой главе не рассматриваются реакции, приводящие к поглощению ядром падающей частицы с последующим испусканием γ-квантов. Такие реакции называются радиационным захватом и будут рассмотрены в главе XI.

Умножая (50,3) на $\psi_b^*(q)$ и интегрируя по q, получим:

$$\varphi_b(r) = -\frac{1}{k_a r}\sqrt{\frac{\pi}{v_b}}\sum_l \sqrt{2l+1}\, i^{l+1} Y_{l_0}(\theta)\, S_{ba}^{(l)} e^{i\left(k_b r - \frac{l\pi}{2}\right)}. \quad (50,5)$$

Волновая функция (50,5) определяет относительное движение продуктов реакции при данном квантовом состоянии ψ_b оставшегося ядра. Каждую из возможностей, изображаемую функциями (50,4) или (50,5), принято называть *каналом реакции*. Волновая функция (50,4), содержащая падающую волну и упруго рассеянную, соответствует начальному или входному каналу реакции. Волновая функция (50,5) соответствует выходному каналу реакции. Канал реакции b называется открытым, если соответствующая реакция совместима с законами сохранения энергии, момента, четности и других интегралов движения. В общем случае, для реакции с N открытыми каналами матрица $S_{ba}^{(l)}$ будет квадратной матрицей порядка N.

Любая реакция, соответствующая переходу $\Phi_a \longrightarrow \Phi_b$, приводит к ослаблению расходящейся части падающей плоской волны. Таким образом, любая реакция вызывает как бы поглощение (выбывание из первоначального пучка) расходящейся части плоской волны, описывающей относительное движение частицы a и ядра A. Это «поглощение» можно трактовать как уменьшение интенсивности расходящейся части волны, обусловленное интерференцией с рассеянной волной противоположной фазы; другими словами, любая реакция обязательно сопровождается упругим рассеянием.

Из условия равенства (для каждой парциальной волны с данным l) потока падающей волны сумме потоков всех рассеянных волн получим из (50,4) и (50,5), представив плоскую волну в виде суммы парциальных волн, следующее равенство:

$$1 = S_{aa}^{(l)} S_{aa}^{*(l)} + \sum_{b \neq a} S_{ba}^{*(l)} S_{ba}^{(l)} = \sum_b S_{ab}^{\dagger} S_{ba}.$$

Другими словами, матрица рассеяния $S^{(l)}$ должна быть унитарной

$$S^{\dagger} S = 1. \quad (50,6)$$

Вычисляя поток через элемент площади $r^2 d\Omega$, обусловленный расходящейся сферической волной в канале $b \neq a$ и в канале a, и деля полученный результат на плотность потока падающих частиц (при нашей нормировке равную 1), получим соответственно дифференциальные сечения реакции в выходном канале b и упругого рассеяния (канал a):

$$d\sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2}\sum_l \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}\, S_{ab}^{(l)} S_{ab}^{*(l')} Y_{l0}(\theta)\, Y_{l'0}^*(\theta)\, d\Omega, \quad (50,7)$$

$$d\sigma_{aa} = \frac{\pi}{k_a^2}\sum_l \sum_{l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}\,(1 - S_{aa}^{(l)})(1 - S_{aa}^{(l')})^* Y_{l0}(\theta)\, Y_{l'0}^*(\theta)\, d\Omega.$$

(50,8)

Интегрируя (50,7) и (50,8) по углам, находим интегральные сечения реакции σ_{ba} в канале b и упругого рассеяния $\sigma_e \equiv \sigma_{aa}$:

$$\sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_l (2l+1) |S_{ba}^{(l)}|^2, \tag{50,9}$$

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_l (2l+1) |1 - S_{aa}^{(l)}|^2. \tag{50,10}$$

Сумма всех сечений реакций, происходящих по всем возможным каналам, называется просто сечением реакции:

$$\sigma_r = \sum_{b \neq a} \sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{b \neq a} \sum_l (2l+1) |S_{ba}^{(l)}|^2. \tag{50,11}$$

Сечение реакции (50,11) можно получить, зная только асимптотическое поведение (50,4) волновой функции во входном канале. В самом деле, сечение реакции можно определить как отношение потока, проходящего через сферу большого радиуса r и поглощаемого внутри сферы, к плотности потока, обусловленного падающей волной. Поскольку при нашей нормировке плотность потока падающих частиц равна единице, то сечение реакции будет численно равно потоку, взятому в направлении внутренней нормали к сфере большого радиуса:

$$\sigma_r = \frac{i\hbar}{2\mu} r^2 \int_{\Omega} \left(\varphi_a^* \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} - \varphi_a \frac{\partial \varphi_a^*}{\partial r} \right) d\Omega =$$

$$= \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - |S_{aa}^{(l)}|^2). \tag{50,12}$$

Эквивалентность (50,11) и (50,12) следует из унитарности матрицы рассеяния

$$1 - |S_{aa}^{(l)}|^2 = \sum_{b \neq a} |S_{ba}^{(l)}|^2.$$

При суммировании по всем b должны учитываться все возможные результаты реакции, в частности и радиационный захват, который мы не рассматриваем в этой главе.

Поскольку $|S_{aa}^{(l)}| \leqslant 1$, то согласно (50,12) максимальное возможное сечение реакции равно

$$(\sigma_r^{(l)})_{\max} = \frac{\pi}{k_a^2}(2l+1), \tag{50,13}$$

а максимальное возможное сечение упругого рассеяния

$$(\sigma_e^{(l)})_{\max} = \frac{4\pi}{k_a^2}(2l+1). \tag{50,14}$$

Таким образом, максимально возможное парциальное сечение упругого рассеяния в 4 раза превосходит максимально возможное сечение реакции, так как значение сечения рассеяния зависит не только от абсолютного значения $S_{aa}^{(l)}$, как в случае сечения реакции, но и от фазового смещения. На рис. 55 заштрихованная область ограничивает возможные верхний и нижний пределы сечения упругого рассеяния при данном значении сечения реакции.

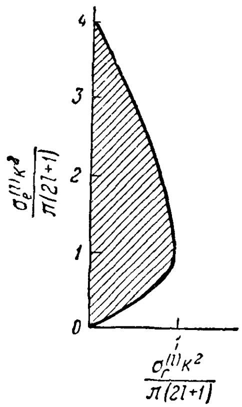

Рис. 55. Возможные верхние и нижние пределы эффективного сечения упругого рассеяния при данном значении сечения реакции.

Вычислим теперь полное сечение

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r.$$

Используя (50,10) и (50,12), получим:

$$\sigma_t = \frac{2\pi}{k_a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \mathrm{Re}\, S_{aa}^{(l)}). \qquad (50,15)$$

Вместо матрицы рассеяния S_{ba} можно ввести эквивалентную ей матрицу B_{ba} с помощью соотношения

$$iB_{ba} = (S-1)_{ba}. \qquad (50,16)$$

Поскольку $(1)_{ba} = \delta_{ba}$, то $iB_{aa} = S_{aa} - 1$, а $iB_{ba} = S_{ba}$. Поэтому (50,9) и (50,10) можно записать еще и в следующем более симметричном виде:

$$\sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_l (2l+1) |B_{ba}^{(l)}|^2, \qquad (50,9а)$$

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k_a} \sum_l (2l+1) |B_{aa}^{(l)}|^2. \qquad (50,10а)$$

Учитывая (50,9а), определим сечение реакции

$$\sigma_r = \sum_{b \neq a} \sigma_{ba} = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_{b \neq a} \sum_l (2l+1) |B_{ba}^{(l)}|^2 \qquad (50,17)$$

и полное сечение

$$\sigma_t = \frac{\pi}{k_a^2} \sum_b \sum_l (2l+1) |B_{ba}^{(l)}|^2. \qquad (50,18)$$

Из свойств унитарности матрицы рассеяния (50,6) и соотношения (50,16) следует, что матрица B_{ba} не унитарна:

$$B^\dagger B = i(B - B^\dagger). \qquad (50,19)$$

Из равенства (50,19) находим:

$$\sum_b B_{ab}^\dagger B_{ba} = i(B_{aa} - B_{aa}^*), \quad \text{или} \quad \sum_b |B_{ba}|^2 = -2\,\mathrm{Im}\, B_{aa}. \qquad (50,20)$$

Пользуясь (50,20), можно записать (50,18) в виде

$$\sigma_t = -\frac{2\pi}{k_a^2}\sum_b \sum_l (2l+1)\,\mathrm{Im}\,B_{aa}^{(l)}. \qquad (50,21)$$

Эквивалентность (50,15) и (50,21) легко доказать, если учесть равенство (50,16), из которого следует

$$-\mathrm{Im}\,B_{aa}^{(l)} = 1 - \mathrm{Re}\,S_{aa}^{(l)}.$$

Физический смысл пропорциональности между мнимой частью матрицы B_{aa}, характеризующей рассеяние вперед, и полным сечением рассеяния состоит в том, что любой процесс столкновения выводит частицу из прямого пучка, т. е. вызывает его ослабление.

Все полученные выше формулы значительно упрощаются, если рассматривать взаимодействие медленных нейтронов с ядрами. Под «медленными» понимаются нейтроны, длина волны которых значительно больше радиуса ядра R. В этом случае во взаимодействии с ядром принимают участие только состояния с $l=0$, т. е. во всех приведенных в этом параграфе формулах следует положить $S_{aa}^{(l)}=1$, если $l\neq 0$. В связи с этим сумма по l заменится одним слагаемым с $l=0$.

§ 51. Обращение времени, теорема взаимности и детальное равновесие

Оператор Гамильтона всех задач теории рассеяния инвариантен относительно изменения знака времени, т. е. замены будущего прошедшим. Используя инвариантность гамильтониана по отношению к изменению знака времени, можно получить весьма общие соотношения, связывающие эффективные сечения некоторого процесса с сечением обратного процесса.

Рассмотрим временное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t). \qquad (51,1)$$

Волновая функция, соответствующая обращенному во времени процессу $\psi_{\text{обр}}(t)\equiv\psi(-t)$, будет удовлетворять уравнению

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_{\text{обр}}}{\partial t} = H\psi_{\text{обр}}. \qquad (51,2)$$

Сравнивая уравнение (51,2) с уравнением, комплексно сопряженным уравнению (51,1):

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H^*\psi^*, \qquad (51,3)$$

мы убедимся, что волновая функция обращенного во времени процесса