Пользуясь (50,20), можно записать (50,18) в виде

$$\sigma_t = -\frac{2\pi}{k_a^2} \sum_b \sum_l (2l+1) \operatorname{Im} B_{aa}^{(l)}. \qquad (50,21)$$

Эквивалентность (50,15) и (50,21) легко доказать, если учесть равенство (50,16), из которого следует

$$-\operatorname{Im} B_{aa}^{(l)} = 1 - \operatorname{Re} S_{aa}^{(l)}.$$

Физический смысл пропорциональности между мнимой частью матрицы B_{aa}, характеризующей рассеяние вперед, и полным сечением рассеяния состоит в том, что любой процесс столкновения выводит частицу из прямого пучка, т. е. вызывает его ослабление.

Все полученные выше формулы значительно упрощаются, если рассматривать взаимодействие медленных нейтронов с ядрами. Под «медленными» понимаются нейтроны, длина волны которых значительно больше радиуса ядра R. В этом случае во взаимодействии с ядром принимают участие только состояния с $l=0$, т. е. во всех приведенных в этом параграфе формулах следует положить $S_{aa}^{(l)}=1$, если $l \neq 0$. В связи с этим сумма по l заменится одним слагаемым с $l=0$.

§ 51. Обращение времени, теорема взаимности и детальное равновесие

Оператор Гамильтона всех задач теории рассеяния инвариантен относительно изменения знака времени, т. е. замены будущего прошедшим. Используя инвариантность гамильтониана по отношению к изменению знака времени, можно получить весьма общие соотношения, связывающие эффективные сечения некоторого процесса с сечением обратного процесса.

Рассмотрим временное уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t). \qquad (51,1)$$

Волновая функция, соответствующая обращенному во времени процессу $\psi_{\text{обр}}(t) \equiv \psi(-t)$, будет удовлетворять уравнению

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_{\text{обр}}}{\partial t} = H\psi_{\text{обр}}. \qquad (51,2)$$

Сравнивая уравнение (51,2) с уравнением, комплексно сопряженным уравнению (51,1):

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H^*\psi^*, \qquad (51,3)$$

мы убедимся, что волновая функция обращенного во времени процесса может быть получена из волновой функции $\psi^*(t)$ с помощью унитарного, не зависящего от времени оператора обращения времени:

$$\psi_{обр} = O\psi^*, \tag{51,4}$$

если оператор сбращения времени O удовлетворяет условию

$$O^{-1}HO = H^*. \tag{51,5}$$

Унитарность оператора O необходима, чтобы сохранить нормировку волновой функции.

Все гамильтонианы, не содержащие электромагнитного поля и спиновых операторов, действительны, т. е. $H = H^*$. В этом случае оператор $O = 1$ и обращенное во времени состояние описывается комплексно сопряженной функцией, т. е.

$$\psi_{обр} = \psi^*, \quad \text{если} \quad H = H^*.$$

Если гамильтониан содержит взаимодействие с электромагнитным полем, которое описывается векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$, например

$$H = \frac{1}{2M}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + V(x, y, z),$$

то оператор обращения времени O должен менять знак векторного потенциала, чтобы выполнялось операторное равенство (51,5):

$$OH^* = \frac{1}{2M}\left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 O = HO.$$

В этом случае обращенное во времени состояние тоже описывается комплексно сопряженной функцией, но эта функция удовлетворяет теперь уравнению с измененным знаком векторного потенциала (а следовательно, и магнитного поля). Если, наконец, гамильтониан содержит спиновые операторы, например

$$H = \frac{1}{2M}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar\mu}{2Mc}\sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + V(x, y, z),$$

где σ — векторная матрица, компоненты которой совпадают с матрицами Паули; μ — множитель, учитывающий отличие магнитного момента нуклона от ядерного магнетона, то для выполнения (51,5) необходимо, чтобы оператор обращения времени, кроме изменения знака векторного потенциала, содержал спиновую матрицу, такую, чтобы

$$O_\sigma\sigma^* = -\sigma O_\sigma.$$

Если векторная матрица σ выбрана в представлении, где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то оператор обращения должен содержать матрицу

$$i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{51,6}$$

так что $\psi_{обр} = i\sigma_y\psi^*$. Матрица (51,6), входящая в оператор обращения O_σ, действуя на волновую функцию состояния с определенным значением проекции спина на ось Oz, меняет значение проекции спина на противоположное:

$$i\sigma_y\chi_{1/2,\,1/2} = -\chi_{1/2,\,-1/2};$$
$$i\sigma_y\chi_{1/2,\,-1/2} = \chi_{1/2,\,1/2}.$$

При обращении времени радиусы-векторы не изменяются, все скорости, моменты количества движения и спины меняют знак. При обращении времени надо также переставлять состояния «до» и «после» столкновения. Состояния, получающиеся из состояния a обращением времени, будем обозначать «$-a$». Если задано состояние ψ_a, то обращенное к нему по времени состояние получится операцией

$$\psi_{-a} = O\psi_a^*.$$

В § 62 доказывается общая теорема о равенстве матричных элементов прямого и обращенного во времени перехода

$$T_{ba} = T_{-a,\,-b}, \tag{51,7}$$

или эквивалентного соотношения

$$S_{ba} = S_{-a,\,-b}. \tag{51,7a}$$

Вероятность перехода $a \rightarrow b$ в единицу времени выражается через матрицу перехода T_{ba} и плотность конечных состояний $\rho_b(\varepsilon)$ (на единичный интервал энергии) формулой

$$W_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}|T_{ba}|^2 \rho_b(\varepsilon).$$

Поэтому из (51,7) следует *теорема взаимности*, связывающая вероятности прямого (W_{ba}) и обращенного во времени ($W_{-a,\,-b}$) переходов:

$$\frac{W_{ba}}{\rho_b(\varepsilon)} = \frac{W_{-a,\,-b}}{\rho_{-a}(\varepsilon)}. \tag{51,8}$$

Таким образом, вероятности прямого и обращенного во времени переходов равны друг другу, если плотность конечных состояний (статистические веса) обоих процессов равны друг другу.

Из (50,9) и (51,7a) также следует простая связь между эффективными сечениями прямой реакции ($a \rightarrow b$) и реакции, соответствующей обращенному во времени переходу ($-b \rightarrow -a$), для случая реакций, описываемых формулой (50,9):

$$k_a^2\sigma_{ba} = k_b^2\sigma_{ab}. \tag{51,8a}$$

Волновые уравнения не изменяются при операции инверсии пространственных координат $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. При одновременном проведении операции инверсии и обращения времени скорости частиц не изменяются, компоненты моментов количества движения изменяют знак. Поэтому если состояние характеризуется только скоростями и не зависит от спинов, то будет выполняться равенство

$$T_{ab} = T_{ba}, \quad \text{или} \quad S_{ba} = S_{ab}.$$

В этом случае говорят, что имеет место *детальное равновесие*, при котором равны вероятности прямого и обратного переходов:

$$\frac{W_{ab}}{\rho_a} = \frac{W_{ba}}{\rho_b},$$

рассчитанные на одно конечное состояние.

Можно показать, что детальное равновесие в первом борновском приближении выполняется для всех систем. Действительно, матрица перехода $T_{ba} = (\Phi_b, V\Psi_a)$ в первом борновском приближении удовлетворяет равенству

$$T_{ba}^{(\text{Б})} \equiv (\Phi_b, V\Phi_a) = (\Phi_a, V\Phi_b)^* \equiv T_{ab}^{*(\text{Б})}.$$

Следовательно, для всех систем в первом борновском приближении

$$\frac{W_{ba}^{(\text{Б})}}{\rho_b} = \frac{W_{ab}^{(\text{Б})}}{\rho_a}.$$

Если свойства системы зависят от ориентации спинов, то детальное равновесие в прямом смысле не имеет места, так как операции обращения времени и инверсии пространственных координат приводят к состояниям, отличающимся от обратных другими значениями проекций спинов. Поэтому $\frac{1}{\rho_b} W_{ba} = \frac{1}{\rho_a} W_{-a,\,-b}$, но не равно $\frac{1}{\rho_a} W_{ab}$.

Детальное равновесие будет выполняться только для вероятностей, усредненных по проекциям спинов начального и конечного состояния

$$\frac{1}{\rho_b}\sum_{\text{спин}} W_{ba} = \frac{1}{\rho_a}\sum_{\text{спин}} W_{ab}.$$

Теорема взаимности и унитарность матрицы рассеяния S_{ab} накладывают дополнительные условия на ее элементы и сокращают число независимых параметров, определяющих матрицу рассеяния. Для реакции, идущей по N возможным каналам, комплексная матрица рассеяния содержит $2N^2$ вещественных параметров. Вследствие унитарности матрицы рассеяния и теоремы взаимности только $\frac{N(N+1)}{2}$ из этих $2N^2$ параметров являются независимыми. Для доказательства этого утверждения запишем матрицу рассеяния в следующем виде:

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2} iK}{1 + \frac{1}{2} iK}, \tag{51,9}$$

где K — эрмитовская матрица рассеяния, т. е. $K=K^{\dagger}$. Представление (51,9) удобно тем, что в этом случае унитарность матрицы S выполняется автоматически: $S^{\dagger}=S^{-1}$. Из (51,9) следует

$$\frac{1}{2}iK=\frac{1-S}{1+S}.$$

Если учесть, что в силу теоремы взаимности матрица рассеяния симметрична, то будет симметричной и эрмитовская матрица K. Поскольку симметричная эрмитовская матрица порядка N имеет $\frac{1}{2}N(N+1)$ независимых вещественных параметров, то столько же независимых вещественных параметров содержит и матрица рассеяния, т. е. наше утверждение доказано.

§ 52. Дисперсионные соотношения в теории рассеяния

Дисперсионными соотношениями в теории рассеяния называются интегральные соотношения, связывающие действительную и мнимую части амплитуды (или матрицы) рассеяния. Здесь мы рассмотрим некоторые дисперсионные соотношения для нерелятивистских энергий относительного движения взаимодействующих частиц.

Дисперсионные соотношения обусловлены свойствами аналитических функций от комплексного переменного. Для вывода дисперсионных соотношений необходимо определить амплитуду рассеяния (матрицу рассеяния) не только для действительных значений энергии относительного движения, но и для комплексных значений.

Для иллюстрации основных идей, используемых при выводе дисперсионных соотношений, рассмотрим простейший пример S-рассеяния бесспиновых частиц центрально-симметричным полем. Согласно § 44 радиальная часть волновой функции, описывающей S-рассеяние в потенциальном поле конечного радиуса действия d, имеет вид

$$R=c\left\{e^{-ikr}-S(k)\,e^{ikr}\right\}e^{-i\varepsilon\frac{t}{\hbar}}. \tag{52,1}$$

В (52,1) мы включили также зависимость от времени. Диагональный матричный элемент матрицы рассеяния $S(k)$ является функцией энергии относительного движения, или волнового числа. По определению матрица рассеяния $S(k)$ является оператором, преобразующим расходящуюся часть падающей волны e^{ikr} в функцию $S(k)\,e^{ikr}$, описывающую рассеянную волну. Заменяя в (52,1) k на $-k$, легко получить:

$$S(k)=S^{-1}(-k), \quad \text{или} \quad S(k)\,S(-k)=1. \tag{52,2}$$

С другой стороны, сравнивая (52,1) с его комплексно сопряженным