где K — эрмитовская матрица рассеяния, т. е. $K = K^{\dagger}$. Представление (51,9) удобно тем, что в этом случае унитарность матрицы S выполняется автоматически: $S^{\dagger} = S^{-1}$. Из (51,9) следует

$$\frac{1}{2} iK = \frac{1-S}{1+S}.$$

Если учесть, что в силу теоремы взаимности матрица рассеяния симметрична, то будет симметричной и эрмитовская матрица K. Поскольку симметричная эрмитовская матрица порядка N имеет $\frac{1}{2}N(N+1)$ независимых вещественных параметров, то столько же независимых вещественных параметров содержит и матрица рассеяния, т. е. наше утверждение доказано.

§ 52. Дисперсионные соотношения в теории рассеяния

Дисперсионными соотношениями в теории рассеяния называются интегральные соотношения, связывающие действительную и мнимую части амплитуды (или матрицы) рассеяния. Здесь мы рассмотрим некоторые дисперсионные соотношения для нерелятивистских энергий относительного движения взаимодействующих частиц.

Дисперсионные соотношения обусловлены свойствами аналитических функций от комплексного переменного. Для вывода дисперсионных соотношений необходимо определить амплитуду рассеяния (матрицу рассеяния) не только для действительных значений энергии относительного движения, но и для комплексных значений.

Для иллюстрации основных идей, используемых при выводе дисперсионных соотношений, рассмотрим простейший пример S-рассеяния бесспиновых частиц центрально-симметричным полем. Согласно § 44 радиальная часть волновой функции, описывающей S-рассеяние в потенциальном поле конечного радиуса действия d, имеет вид

$$R = c\left\{e^{-ikr} - S(k)\, e^{ikr}\right\} e^{-i\varepsilon \frac{t}{\hbar}}. \tag{52,1}$$

В (52,1) мы включили также зависимость от времени. Диагональный матричный элемент матрицы рассеяния $S(k)$ является функцией энергии относительного движения, или волнового числа. По определению матрица рассеяния $S(k)$ является оператором, преобразующим расходящуюся часть падающей волны e^{ikr} в функцию $S(k)\, e^{ikr}$, описывающую рассеянную волну. Заменяя в (52,1) k на $-k$, легко получить:

$$S(k) = S^{-1}(-k), \quad \text{или} \quad S(k)\, S(-k) = 1. \tag{52,2}$$

С другой стороны, сравнивая (52,1) с его комплексно сопряженным выражением, мы убедимся, что

$$S^{-1}(k) = S^{*}(k). \tag{52,3}$$

Равенство (52,3) выражает тот факт, что матрица рассеяния является унитарной матрицей.

В физике наряду с положительной энергией, соответствующей инфинитному движению (рассеянию), и отрицательной энергией, соответствующей связанным состояниям, часто пользуются понятием комплексной энергии

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{i}{2}\hbar\Lambda \tag{52,4}$$

для описания нестационарных состояний системы. Величина Λ, входящая в (52,4) и определяющая вероятность «распада» в единицу времени, называется «*постоянной распада*». Она положительна, если волновая функция убывает с течением времени (радиоактивный распад), и отрицательна, если волновая функция возрастает с течением времени, например при захвате нуклона ядром.

Комплексным значениям энергии ε соответствуют комплексные значения волнового числа

$$k = q_1 - iq_2, \tag{52,5}$$

где q_1 и q_2 связаны со значениями ε_0 и Λ в (52,4) и приведенной массой μ сталкивающихся частиц простым соотношением:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\varepsilon_0 - \frac{i}{2}\hbar\Lambda\right) = (q_1^2 - q_2^2) - 2iq_1q_2. \tag{52,6}$$

Матрица рассеяния $S(k)$, определенная как функция действительного переменного, может быть аналитически продолжена на область комплексных значений волнового числа k. В этом случае свойство матрицы рассеяния, выраженное равенством (52,2), сохраняется; равенство же (52,3), выражающее унитарность матрицы упругого рассеяния, становится несправедливым. Вместо (52,3) теперь из (52,1) имеем:

$$S^{-1}(k) = S^{*}(k^{*}). \tag{52,7}$$

Из условия (52,7) следует, что если S-матрица равна нулю в некоторой точке k_1 комплексной плоскости, то она обязательно должна иметь полюс в точке $k_1' = k_1^{*}$, расположенной симметрично относительно действительной оси.

Рассмотрим, какие физические явления описывает матрица рассеяния, рассматриваемая как функция комплексных волновых чисел. Если волновое число k действительно ($q_2 = 0$), то матрица рассеяния описывает истинные процессы рассеяния. Если волновое число является чисто мнимым ($q_1 = 0$), то

$$k = -iq_2, \quad \varepsilon = -\frac{\hbar^2}{2\mu}q_2^2. \tag{52,8}$$

Отрицательным энергиям соответствуют связанные состояния системы. Интеграл от квадрата модуля волновой функции связанного состояния должен быть конечен, т. е. в нашем случае выражение

$$|c|^2 \int_0^\infty \left| e^{-q_2 r} - S(-iq_2)\, e^{q_2 r} \right|^2 dr \tag{52,9}$$

является конечным числом.

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы $q_2 > 0$ и

$$S(-iq_2) = 0. \tag{52,10}$$

Следовательно, связанным состояниям соответствуют нули функции $S(k)$, лежащие на отрицательной мнимой оси и симметрично расположенные на положительной мнимой оси полюса функции $S(k)$.

Можно показать, что функция $S(k)$ не должна иметь нулей в нижней комплексной полуплоскости кроме нулей на мнимой оси. Допустим, что $S(k)$ имеет нуль в IV квадранте; тогда функция (52,1) будет давать неисчезающий входящий поток $\frac{\hbar q_1}{\mu} \exp(-2q_2 b)$ через сферу радиуса b, а это противоречит уменьшению амплитуды волновой функции внутри сферы из-за временного множителя $\exp(-\Lambda t)$, так как при $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ постоянная $\Lambda > 0$. Таким же образом можно доказать отсутствие нулей в III квадранте. Следствием (52,7) тогда будет отсутствие полюсов в верхней полуплоскости (за исключением особых точек на положительной мнимой оси).

Нули функции $S(k)$ в первом квадранте описывают процессы захвата в соответствии с уравнением непрерывности, а нули во втором квадранте описывают процессы радиоактивного распада.

В работе Ху [19] было показано, что матрица рассеяния как функция волнового числа k должна иметь вид

$$S(k) = \pm e^{ick} \prod_\gamma \frac{(k - k_\gamma^*)}{(k - k_\gamma)} \prod_s \frac{(k - k_s^*)(k + k_s)}{(k - k_s)(k + k_s^*)},$$

где c — постоянная порядка удвоенного радиуса области действия ядерных сил; k_γ — нули и полюса на мнимой оси; k_s — нули и полюса в остальной части комплексной плоскости k. В частности, в § 46 было показано, что при рассеянии нейтронов малой энергии на протонах матрица рассеяния может быть представлена в виде

$$S(k) = -\frac{k + i\frac{1}{a}}{k - i\frac{1}{a}}, \tag{52,11}$$

где длина рассеяния $a = a_t > 0$ в случае триплетного состояния и $a = a_s < 0$ в случае синглетного состояния. Таким образом, в случае триплетного рассеяния медленных нейтронов на протонах матрица рассеяния имеет единственный полюс на положительной мнимой оси, соответствующий связанному состоянию системы (дейтрон). В случае синглетного рассеяния матрица рассеяния имеет единственный полюс, находящийся на отрицательной мнимой оси. Этот полюс соответствует виртуальному уровню в системе.

Пользуясь (44,10), выпишем связь между амплитудой рассеяния вперед и матрицей рассеяния S_l:

$$A_0 = \frac{i}{2k} \sum_{l=0} (2l+1)(1 - S_l). \tag{52,12}$$

В частном случае рассеяния медленных нейтронов $S_l \neq 1$ только для $l = 0$; поэтому, полагая $S_0 = S$, можно написать:

$$A_0 = \frac{i}{2k}(1 - S). \tag{52,12a}$$

Подставляя (52,11) и (52,12а), выразим амплитуду рассеяния медленных нейтронов вперед через длину рассеяния a:

$$A_0(k) = \frac{i}{k - i\frac{1}{a}} = \frac{ik - \frac{1}{a}}{k^2 + \frac{1}{a^2}}. \tag{52,13}$$

Для получения общего дисперсионного соотношения для амплитуды рассеяния учтем, что для любой аналитической функции $f(z)$ от комплексного переменного z согласно теореме Коши можно написать равенство

$$\oint \frac{f(z')\,dz'}{z' - z} = 2\pi i \sum_l \rho_l,$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру, включающему точку z, а $\sum_l \rho_l$ обозначает сумму вычетов по всем полюсам функции $f(z)$ внутри этого контура. Если точка z лежит на действительной оси и функция $f(z)$ не имеет полюсов на действительной оси и убывает достаточно быстро при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости, то при соответствующем выборе контура интегрирования это равенство можно записать в виде

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z')\,dz'}{z' - z} - i\pi f(z) = 2\pi i \sum_l \rho_l. \tag{52,14}$$

Знак P указывает, что надо взять главное значение интеграла в точке $z' = z$.

Из (52,14) следуют соотношение между мнимой и действительной частями функции $f(z)$ на действительной оси:

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(z')\, dz'}{z' - z} - 2\operatorname{Re} \sum_l \rho_l. \qquad (52,15)$$

Если взаимодействие между частицами обладает конечным радиусом действия, то амплитуда рассеяния вперед при $k \to \infty$ стремится к конечному действительному пределу. В частном случае (52,13) этот предел равен нулю. Если рассмотреть функцию $f(k) = A_0(k) - A_0(\infty)$, то она будет удовлетворять поставленным выше условиям и к ней можно применить соотношение (52,15). Учитывая, что действительная часть амплитуды рассеяния является четной функцией k, а мнимая часть — нечетной функцией, соотношение (52,15) можно написать в виде

$$\operatorname{Re} A_0(k) - A_0(\infty) = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{2k' \operatorname{Im} A_0(k')}{(k')^2 - k^2} dk' - 2\operatorname{Re} \sum_l \rho_l. \qquad (52,16)$$

Вспоминая связь между мнимой частью амплитуды рассеяния вперед и сечением упругого рассеяния $\operatorname{Im} A_0(k) = \frac{k\sigma(k)}{4\pi}$, получим соотношение между действительной частью амплитуды рассеяния вперед и сечением упругого рассеяния:

$$\operatorname{Re} A_0(k) - A_0(\infty) = \frac{1}{2\pi^2} P \int_0^{\infty} \frac{(k')^2 \sigma(k')\, dk'}{(k')^2 - k^2} - 2\operatorname{Re} \sum_l \rho_l, \qquad (52,17)$$

где ρ_l — вычеты амплитуды рассеяния, соответствующие связанным состояниям; суммирование проводится по всем возможным связанным состояниям.

Соотношения (52,16) и (52,17) называются *дисперсионными соотношениями*. Если известно $\sigma(k)$ для всех энергий, то (52,17) позволяет вычислить действительную часть амплитуды рассеяния путем интегрирования $\sigma(k)$.

Если аналитическое продолжение $A(k)$ не ограничено на бесконечности, то можно ввести функцию

$$f(k) = A(k)\, e^{2ikR},$$

включающую множитель e^{2ikR}, который обеспечит убывание $f(k)$ при больших значениях k в верхней полуплоскости комплексного k. В этом случае дисперсионные соотношения можно писать и для амплитуды рассеяния на произвольные углы.