§ 53. Зависимость эффективных сечений упругого рассеяния, поглощения и ядерных реакций от энергии

Так как радиус действия ядерных сил конечен и граница ядра сравнительно хорошо выделена, то область специфического ядерного взаимодействия нуклона с ядром ограничена некоторым достаточно малым объемом, радиус которого обозначим R. Поэтому при взаимодействии нуклонов малой энергии ($kR \ll 1$) с ядрами легко установить зависимость от энергии сечений упругого рассеяния, поглощения и ядерных реакций.

Согласно § 62 процесс взаимодействия нуклона (или легкого ядра) с ядром характеризуется матричным элементом

$$T_{ba} = (\Phi_b, T\Phi_a), \tag{53,1}$$

где T — оператор взаимодействия, определяемый уравнением

$$T = V + V(D - V)^{-1} V;$$

здесь V — энергия взаимодействия нуклона и ядра; $D = E - H_0 + i\eta$. Для выяснения зависимости сечений рассеяния, поглощения и реакций от энергии (при малых энергиях) достаточно учесть, что оператор T как функция относительного расстояния частиц до реакции и (после реакции) отличен от нуля только при $r \leqslant R$.

Рассмотрим зависимость матричного элемента T_{ba} от энергии относительного движения ε для случая упругого рассеяния $A(n, n)A$ нейтрона на ядре. В этом случае начальное состояние описывается функцией

$$\Phi_a = \varphi_A(\ldots q \ldots) \exp\{ikr\cos\vartheta_a\}, \tag{53,2}$$

а конечное состояние — функцией

$$\Phi_b = \varphi_A(\ldots q \ldots) \exp\{ikr\cos\vartheta_b\}, \tag{53,2a}$$

где k — импульс относительного движения нейтрона и ядра, связанный с энергией относительного движения $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$, а $\varphi_A(\ldots q \ldots)$ — функция, определяющая состояние ядра мишени.

В матричном элементе (53,1) существенны только значения $r < R$; поэтому при $kR \ll 1$ можно разложить экспоненты в функциях (53,2) и (53,2а) по сферическим функциям; тогда

$$\Phi = \varphi(\ldots q \ldots)(4\pi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{\sqrt{2l+1}}{(2l+1)!!}(kr)^l Y_{l0}(\cos\vartheta), \quad kr \ll 1. \tag{53,3}$$

Если учесть, что при малых энергиях оператор T не зависит от энергии, то при упругом рассеянии с определенным орбитальным моментом зависимость матричного элемента от k и энергии ε определяется равенством

$$(\Phi_b, T\Phi_a)_l = \alpha_l' k^{2l} = \alpha_l \varepsilon^l, \tag{53,4}$$

где α_l' и α_l — постоянные.

Сечение рассеяния выражается через матричный элемент (53,1) соотношением

$$d\sigma_e^{(l)} = \frac{\mu p_b}{(2\pi)^2 \hbar^4 v_a} \left| (\Phi_b, T\Phi_a) \right|^2 d\Omega. \tag{53,5}$$

При упругом рассеянии $p_b = \mu v_a$; поэтому зависимость сечения упругого рассеяния от энергии будет иметь вид

$$\sigma_e^{(l)} \sim \varepsilon^{2l}.$$

В частности, при $l = 0$ эффективное сечение s-рассеяния не зависит от энергии при малых энергиях относительного движения. Поскольку при малой энергии нейтронов существенно только s-рассеяние, то мы приходим к заключению, что при малых энергиях сечение рассеяния нейтронов на ядрах стремится к конечному пределу при уменьшении энергии.

При упругом рассеянии медленных заряженных частиц (p, α, d, ...) основную роль играет кулоновское рассеяние, которое значительно больше рассеяния, обусловленного ядерными силами.

Определим теперь зависимость от энергии эффективного сечения поглощения нейтронов ядрами. В этом случае только функция начального состояния Φ_a будет иметь при малых энергиях вид (53,3). Поэтому зависимость от энергии матричного элемента, описывающего поглощение медленного нейтрона с орбитальным моментом l, определяется формулой

$$(\Phi_b, T\Phi_a) = \alpha_l \varepsilon^{l/2},$$

а сечение поглощения в этом случае имеет вид

$$\sigma_{\text{погл}}^{(l)} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} \left| (\Phi_b, T\Phi_a) \right|^2 \sim \varepsilon^{l - \frac{1}{2}}.$$

При малых энергиях поглощение нейтронов в основном определяется s-состоянием, поэтому эффективное сечение поглощения медленных нейтронов обратно пропорционально квадратному корню из энергии (обратно пропорционально скорости)

$$\sigma_{\text{погл}} \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \frac{1}{v_a}.$$

«Закон $1/v$» должен выполняться для всех экзотермических реакций, происходящих с медленными нейтронами, например (n, α), (n, p), (n, γ) и др. В этом случае волновые функции конечного состояния относятся к энергиям частиц порядка *Мэв*; поэтому их зависимостью от энергии при изменении энергии падающих нейтронов можно пренебречь.

Зависимость от энергии экзотермических ядерных реакций, вызываемых заряженными частицами (p, α, d и др.), определяется главным образом условием прохождения через кулоновский барьер падающей частицы. При малых энергиях

$$\sigma \sim \exp\left\{-\frac{2\pi Z_A Z_a e^2}{\hbar v_a}\right\}.$$

Исследуем теперь зависимость от энергии пороговых ядерных реакций, т. е. ядерных реакций, требующих передачи ядру определенной энергии. Предположим, что происходит неупругое рассеяние нейтрона (n, n') или пороговая реакция, сопровождающаяся вылетом нейтрона, например (p, n), (α, n) и др. В этом случае ядро после вылета нейтрона остается в возбужденном состоянии. Волновая функция конечного состояния будет иметь вид (53,3), где

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(\varepsilon_a - \varepsilon_0)},$$

если ε_a — энергия падающей частицы, а ε_0 — пороговая энергия.

При $\varepsilon_a - \varepsilon_0 \ll \varepsilon_a$ зависимость матричного элемента от энергии будет определяться только функцией конечного состояния

$$(\Phi_b, T\Phi_a)_{\text{порог}} \sim k^l.$$

Таким образом, вблизи порога эффективное сечение пороговой реакции с испусканием нейтрона с орбитальным моментом l будет определяться формулой

$$d\sigma^{(l)}_{\text{порог}} = \frac{\mu p_b}{(2\pi)^2 \hbar^4 v_a} |(\Phi_b, T\Phi_a)|^2 d\Omega \sim k^{2l+1} \sim (\varepsilon_a - \varepsilon_0)^{\frac{2l+1}{2}}, \quad (53,6)$$

так как $p_b = \hbar k$ и v_a практически не зависит от k. При малых превышениях энергии падающей частицы над пороговой существенно испускание нейтронов только в s-состоянии. Поэтому вблизи порога эффективное сечение будет пропорционально квадратному корню из избытка энергии над порогом.

Если при пороговой реакции образуется заряженная частица (например, (p, p'), (n, p) и др.), то зависимость эффективного сечения от энергии будет определяться условиями прохождения этой частицы через кулоновский барьер; поэтому

$$d\sigma^{(l)}_{\text{порог}} \sim k^{2l+1} \exp\left\{-\frac{2\pi Z_B Z_b e^2}{\hbar v_b}\right\},$$

где $v_b = \frac{\hbar k}{\mu}$.

Существование пороговых реакций с испусканием нейтронов в некоторых случаях проявляется в характерной зависимости от энергии сечений упругого рассеяния нейтронов на ядрах в области порога. На это обстоятельство недавно обратил внимание А. И. Базь [20]. Приведем элементарное доказательство этого утверждения на простейшем примере упругого рассеяния нейтральных частиц на ядре.

Эффективные сечения упругого рассеяния и пороговой реакции выражаются через соответствующие элементы матрицы рассеяния S_{aa} и S_{ab}. При энергии ε выше пороговой ε_0 открыты оба канала a и b и вследствие унитарности матрицы рассеяния должно выполняться соотношение

$$|S_{aa}|^2 = 1 - |S_{ab}|^2. \tag{53,7}$$

Так как сечение пороговой реакции, определяемое величиной $|S_{ab}|^2$, вблизи порога согласно (53,6) пропорционально k^{2l+1}, то можно написать:

$$\left|S_{aa}^{(l)}\right|^2 = 1 - a_l k^{2l+1}, \tag{53,8}$$

где a_l — некоторая положительная величина. Тогда из (53,8) следует

$$S_{aa}^{(l)}(k) = \sqrt{1 - a_l k^{2l+1}} \exp[i2\beta_l(k)], \tag{53,8a}$$

где $\beta_l(k)$ — действительная функция k. Для установления явной зависимости этой функции от k воспользуемся тем обстоятельством, что матрица рассеяния является аналитической функцией от k. Мнимые значения k соответствуют значениям энергии, меньшим пороговой. Неупругий процесс отсутствует при энергии, меньшей пороговой, и $|S_{aa}|^2 = 1$. Это условие выполняется с точностью до k^2, если аналитически продолжить (53,8) в область мнимых k. Тогда из (53,8) будет следовать (53,8а) и при мнимых k, если $\beta(k)$ — действительная функция. Чтобы $\beta_l(k)$ была действительной функцией при мнимых k, необходимо, чтобы она была функцией только четных степеней k. Учитывая это обстоятельство, разлагая $S_{aa}^{(l)}(k)$ в ряд по степеням k и ограничиваясь только первыми степенями k, получим:

$$S_{aa}^{(l)}(k) = \begin{cases} e^{2i\beta_0(0)}, & \text{если } l \neq 0; \\ e^{2i\beta_0(0)}\left(1 - \dfrac{a}{2}k\right), & \text{если } l = 0. \end{cases} \tag{53,9}$$

Из (53,9) следует, что наличие пороговой реакции заметно сказывается только на сечении упругого s-рассеяния; при этом

$$\sigma^{(0)}(k) \sim \left|S_{aa}^{(0)}(k) - 1\right|^2 = 4\sin^2\beta_0 - a\,\mathrm{Re}\left\{k\left[1 - e^{-2i\beta_0}\right]\right\}. \tag{53,10}$$

Учитывая, что $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(\varepsilon_a - \varepsilon_0)}$, получим из (53,10) следующее выражение:

$$\sigma^{(0)}(\varepsilon_a - \varepsilon_0) = \begin{cases} \sigma^{(0)}(0)\left[1 - \dfrac{a}{2\hbar}\sqrt{2\mu(\varepsilon_a - \varepsilon_0)}\right], & \text{если } \varepsilon_a > \varepsilon_0; \\ \sigma^{(0)}(0)\left[1 + \dfrac{a}{2\hbar}\operatorname{ctg}\beta_0\sqrt{2\mu(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)}\right], & \text{если } \varepsilon_0 > \varepsilon_a. \end{cases} \tag{53,11}$$

В (53,11) $\sigma^{(0)}(0)$ обозначает эффективное сечение упругого рассеяния при пороговой энергии; значение фазового смещения β_0 определяется через $\sigma^{(0)}(0)$ с помощью соотношения

$$\sigma^{(0)}(0)=\frac{4\pi}{k_a^2}\sin^2\beta_0.$$

Из (53,11) непосредственно видно, что в области порога при $\operatorname{ctg}\beta_0<0$ эффективное сечение упругого рассеяния имеет острый пик, а при $\operatorname{ctg}\beta_0>0$ сечение $\sigma^{(0)}(\varepsilon_a-\varepsilon_0)$ при переходе через пороговое значение энергии претерпевает излом.

Если пороговая реакция соответствует испусканию заряженной частицы, то коэффициент a в (53,11), пропорциональный квадрату матричного элемента взаимодействия (53,1), будет содержать множитель

$$\exp\left\{-\frac{2\pi Z_B Z_b e^2}{\hbar v_b}\right\},$$

где $v_b=\sqrt{\frac{2(\varepsilon_a-\varepsilon_0)}{\mu}}$. Поэтому при $\varepsilon_a\to\varepsilon_0$ коэффициент a будет стремиться к нулю. Таким образом, пороговая реакция с испусканием заряженной частицы не может существенно сказаться на сечении упругого рассеяния.

§ 54. Определение сечений из условий, налагаемых на поверхности ядра на волновую функцию. Формулы Брейта — Вигнера

Основная задача теории рассеяния состоит в том, чтобы связать матрицу рассеяния с физическими свойствами ядра и рассеиваемых частиц. Принципиально можно вычислить матрицу рассеяния, если известны волновые функции, определяющие состояние ядра, и силы взаимодействия между налетающей частицей и нуклонами ядра. Однако практическое решение такой задачи в настоящее время невозможно как из-за нашего незнания волновых функций сложных ядер, так и из-за больших математических трудностей. Поэтому приходится прибегать к некоторым косвенным методам, не использующим конкретные предположения о внутреннем строении ядер.

Рассмотрим элемент матрицы рассеяния $S_{aa}\equiv S$, определяющий сечение упругого рассеяния и сечение реакции. Величина S, характеризующая поведение волновой функции $\varphi_a(r)$ (50,4) относительного движения частицы и ядра во входном канале, может быть выражена через значение логарифмической производной этой функции на некоторой сферической поверхности, разделяющей пространство на область, где действуют ядерные силы, и область, где они отсутствуют. Эту поверхность будем условно называть поверхностью ядра, а соответствующий радиус R — *радиусом канала реакции*.