Интересно сравнить эти экспериментальные данные с выводами статистической теории о среднем расстоянии между уровнями. Согласно статистической теории плотность уровней, или среднее число уровней в энергетическом интервале 1 *Мэв*, равное $10^6/D_0$, может быть выражена формулой (см. (25,6))

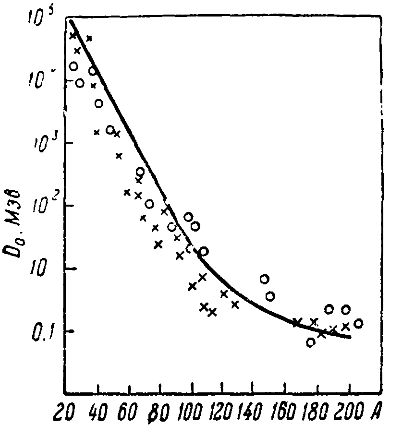

Рис. 62. Зависимость среднего расстояния между уровнями атомного ядра от массового числа.

$$\frac{10^6}{D_0} = C \exp\left(2\sqrt{\beta E^*}\right), \qquad (57,9)$$

где E^* — энергия возбуждения ядра; параметры β и C зависят от массового числа ядра. На рис. 62, взятом из работы [32], изображена кривая зависимости D_0 от A на основе формулы (57,9) при значениях параметров, приведенных в таблице 28.

Значения D_0, вычисленные согласно формуле (57,7), отмечены на рис. 62 кружками для немагических ядер четного A и крестиками для немагических ядер нечетного A. Значения D_0 у ядер со спинами $^9/_2$ и $^7/_2$, как отмечается в работе [32], мало отличаются от соответствующих значений D_0 для соседних ядер с меньшими спинами.

§ 58*. Матрица рассеяния для резонансных реакций

В этом параграфе мы изложим более строгую теорию резонансных ядерных реакций. В частности, попытаемся выяснить условия, при которых оправдывается гипотеза Бора о независимости распада составного ядра от способа его образования.

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что составное ядро, образующееся в результате реакции, распадается только на две части. В этом случае можно пользоваться понятием канала реакции, введенным в § 50. Задачей теории ядерных реакций является вычисление матрицы рассеяния (или сечения реакции) для каждого канала реакции.

Вследствие малого радиуса действия специфических ядерных сил $3A$-мерное конфигурационное пространство системы A нуклонов для каждого канала реакции может быть разделено на две области: внутреннюю и внешнюю. Внутренней областью будем называть отделенную с помощью замкнутой гиперсферы (σ), введенной Вигнером и Айзенбадом [34], область, в которой проявляются специфические ядерные силы между всеми нуклонами. Внешней областью будем называть область конфигурационного пространства вне гиперсферы σ, в которой между продуктами реакции уже не действуют специфические ядерные силы. Радиус d такой гиперсферы будем называть *радиусом канала*. При таком разделении конфигурационного пространства во внешней области поведение системы определяется гамильтонианом, описывающим относительное движение продуктов реакции в каждом канале. Влияние сложного поведения системы во внутренней области на внешнюю область можно учесть определенными граничными условиями на поверхности, разделяющей эти области конфигурационного пространства.

Интегралами движения системы A нуклонов является полная энергия E, четность, полный момент количества движения J и его проекция M на выделенное направление. Рассмотрим стационарное состояние, соответствующее определенным значениям этих величин. Это состояние описывается волновой функцией, удовлетворяющей уравнению Шредингера:

$$H\Phi_{EJM} = E\Phi_{EJM}. \tag{58,1}$$

Обозначим решения уравнения (58,1) для внутренней и внешней областей соответственно через Φ^{I} и Φ^{II}. Во внешней области волновая функция Φ^{II} может быть записана в виде

$$\Phi^{\mathrm{II}}_{EJM} = \sum_{\alpha,\, l} \varphi_{\alpha l}(r_\alpha) \frac{1}{r_\alpha} \psi^{JM}_{\alpha l}(\ldots r_i \ldots), \tag{58,2}$$

где суммирование по α распространяется на все каналы реакции; суммирование по l в каждом канале реакции производится по всем возможным значениям квантового числа орбитального момента в данном канале. Для всех открытых каналов*), т. е. каналов реакции, энергетически возможных при данной энергии возбуждения составного ядра:

$$\psi^{JM}_{\alpha l}(r_i) = \sum_{m=-l}^{l} \sum_{m_j} (ljmm_j \mid JM)\, Y_{lm}\, \chi_{jm_j}; \tag{58,3}$$

здесь $(ljmm_j \mid JM)$ — коэффициенты векторного сложения; Y_{lm} — сферическая волновая функция, определяющая направление разлета продуктов реакции в канале α; r_α — относительное расстояние между продуктами реакции; χ_{jm_j} — волновая функция, описывающая спиновые состояние и внутреннее движение нуклонов в разделенных продуктах

*) Волновые функции $\psi_{\alpha l}$ закрытых каналов могут быть произвольными, необходимо только, чтобы они вместе с функциями $\psi_{\alpha l}$ открытых каналов образовали полную ортогональную систему функций. Чтобы упростить теорию, обычно в сумме (58,2) исключают закрытые каналы, полагая их радиусы столь большими, чтобы волновая функция Φ^{II} оказалась целиком во внутренней области. Однако при рассмотрении смещения уровней и поведения сечения вблизи порога необходимо включить в сумму (58,2) каналы, близкие к порогу (см. [35]).

реакции; $\varphi_{\alpha l}(r_\alpha)$ — радиальная волновая функция относительного движения продуктов реакции в канале α, удовлетворяющая волновому уравнению:

$$\left\{\frac{d^2}{dr_\alpha^2}+k_\alpha^2-\frac{2\mu_\alpha}{\hbar^2}V_{\alpha l}\right\}\varphi_{\alpha l}(r_\alpha)=0, \quad r_\alpha>d, \tag{58,4}$$

где $k_\alpha^2=\frac{2\mu_\alpha\varepsilon_\alpha}{\hbar^2}$; ε_α — энергия относительного движения; μ_α — приведенная масса в канале α;

$$V_{\alpha l}=\frac{l(l+1)}{r_\alpha^2}+\frac{Z_1Z_2e^2}{r_\alpha}$$

— внешняя потенциальная энергия кулоновских и центробежных сил.

Общее решение уравнения (58,4) может быть выражено через линейную комбинацию двух хорошо изученных*) линейно независимых вещественных решений — регулярного в нуле решения $F_{\alpha l}(\rho)$ и нерегулярного $G_{\alpha l}(\rho)$, $\rho=k_\alpha r_\alpha$. В дальнейшем для упрощения записи будем обозначать пару индексов αl одним индексом s.

При исследовании решения уравнения (58,1) во внешней области нас будут интересовать значения функций $F_s(\rho)$ и $G_s(\rho)$ и их производных по ρ (которые мы будем обозначать штрихом у соответствующей функции) на поверхности σ. Однако не все эти четыре величины линейно независимы; они связаны между собой простым равенством:

$$F_s'G_s-G_s'F_s=\text{const}.$$

Функции F и G обычно нормируются так, чтобы эта постоянная равнялась 1. Таким образом, достаточно знать на поверхности σ только три

---

*) Например, для нейтронов $F_l(\rho)=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}J_{l+1/2}(\rho)$, $G_l(\rho)=-\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}N_{l+1/2}(\rho)$, где $J_{l+1/2}$ и $N_{l+1/2}$ — соответственно функции Бесселя и Неймана порядка $l+1/2$. Асимптотические значения ($\rho\to\infty$) этих функций имеют вид

$$F_l(\rho)\approx\sin\left(\rho-\frac{l\pi}{2}\right),\quad G(\rho)\approx\cos\left(\rho-\frac{l\pi}{2}\right).$$

Для заряженных частиц функции $F_l(\rho)$ и $G_l(\rho)$ имеют при больших ρ асимптотическую форму:

$$F_l(\rho)\approx\sin\left(\rho-\frac{l\pi}{2}-\eta\ln 2\rho+\sigma\right)\quad\text{и}\quad G_l(\rho)\approx\cos\left(\rho-\frac{l\pi}{2}-\eta\ln 2\rho+\sigma\right),$$

где $\eta=\frac{Z_1Z_2e^2}{\hbar v}$, $\sigma=\arg\Gamma(1+l+i\eta)$. Значения функций F и G и их производных при $\eta>0$ даны в таблицах [27].

независимые величины. В качестве этих величин выберем значения действительной и мнимой частей логарифмической производной на поверхности σ от расходящихся волн:

$$\varphi_s = \sqrt{\frac{\mu_s}{\hbar k_s}}(G_s + iF_s),$$

нормированных на единицу потока *):

$$\left\{\rho_s \frac{\varphi_s'}{\varphi_s}\right\}_{\rho_s = d_s k_s} = (\xi_s + i\zeta_s)\, d_s, \tag{58,5}$$

и фазу Ω_s, определяемую условием

$$\left\{\frac{\varphi_s}{\overset{*}{\varphi}_s}\right\}_{\rho_s = d_s k_s} = \exp\{2i\Omega_s\}; \tag{58,6}$$

d_s — радиус канала s. Величины ξ_s и ζ_s выражаются через G_s и F_s простыми соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \xi_s d_s &= \{\rho_s P_s [F_s F_s' + G_s G_s']\}_{\rho_s = k_s d_s}, \\ \zeta_s d_s &= \{\rho_s P_s\}_{\rho_s = k_s d_s}, \end{aligned}\right\} \tag{58,7}$$

где $P_s = [F_s^2 + G_s^2]^{-1}$ — введенная в § 54 проницаемость. Для нейтронов с нулевым орбитальным моментом $\xi_s = 0$, $\zeta_s = k_s$, $\Omega_s = k_s d_s$, $P_s = 1$.

На поверхности σ функция φ_s имеет вид

$$\{\varphi_s\}_{r_s = d_s} = \sqrt{\frac{\mu_s}{\hbar k_s P_s}}\, e^{i\Omega_s}. \tag{58,8}$$

Волновую функцию (58,2) во внешней области можно выразить через расходящиеся φ_s и сходящиеся $\overset{*}{\varphi}_s$ волны в каждом канале

$$\Phi^{\rm II} = \sum_s \Phi_s^{\rm II},$$

*) Для заряженных частиц $\varphi_s = \sqrt{\frac{\mu_s}{\hbar k_s}}(G_s + iF_s)\, e^{-i\sigma_l}$, где σ_l — кулоновский сдвиг фазы, обусловленный чисто кулоновским рассеянием. Он определяется из соотношения $\exp(2i\sigma_l) = \frac{(l+i\eta)!}{(l-i\eta)!}$, где $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$. Если энергия относительного движения отрицательна (закрытый канал), то φ заменяется действительной экспоненциально убывающей функцией Уиттекера $W_{-\eta,\, l+1/2}(2\rho)$, где η определено выше. Тогда $\zeta = 0$, $\xi = k\frac{W'}{W}$ (см. [36]).

где

$$\Phi_s^{II} = (a_s \varphi_s^* - b_s \varphi_s) \frac{\psi_s}{r_s};$$

здесь функции ψ_s, определяемые (58,3), ортонормированы на поверхности σ:

$$\int \psi_s^* \psi_{s'} d\sigma = \delta_{ss'},$$

где интеграл обозначает суммирование по спинам канала и интегрирование по угловым переменным канала s и по всем внутренним координатам продуктов реакции (r_i). Амплитуда расходящейся волны b_s в канале s определяется через амплитуды сходящихся волн во всех каналах с помощью матрицы рассеяния S:

$$b_s = \sum_{s'} S_{ss'} a_{s'}.$$

Предположим, что $a_s = \delta_{st}$, т. е. что амплитуда сходящейся волны отлична от нуля только в одном (входном) канале t. Тогда волновая функция, описывающая реакцию в канале s, вызванную по каналу t, будет иметь вид

$$\Phi_{st}^{II} = (\varphi_s^* \delta_{st} - \varphi_s S_{st}) \frac{\psi_s}{r_s}. \qquad (58,9)$$

Результат любого измерения, произведенного над системой после разлета продуктов реакции, может быть выражен через матрицу рассеяния S. Описывая асимптотическое поведение волновой функции, матрица рассеяния лишь частично отражает свойства волновых функций во внутренней области.

Для установления связи между матрицей рассеяния и свойствами волновых функций во внутренней области введем, следуя [34], полную систему ортонормированных по всей внутренней области собственных функций X_λ оператора H, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\int \psi_s \frac{d(rX_\lambda)}{dr} d\sigma \equiv \int \psi_s \left(X_\lambda + r \frac{dX_\lambda}{dr} \right) d\sigma = 0. \qquad (58,10)$$

Собственные функции X_λ не описывают реального состояния составного ядра, так как они не соответствуют распадающимся состояниям. Однако для некоторых энергий E, близких к резонансным, когда расстояния между резонансными уровнями гораздо больше их ширины, состояния составного ядра близки к стационарным. В этом случае состояния X_λ будут отражать, хотя и грубо, свойства реальных состояний.

Решение уравнения (58,1) во внутренней области, описывающее реакцию, вызванную по каналу t, можно представить в виде

$$\Phi_t^{I} = \sum_\lambda C_{t\lambda} X_\lambda.$$

Для определения коэффициентов $C_{t\lambda}$ вспомним, что функции Φ_t^{I} и X_λ^* удовлетворяют уравнениям $H\Phi_t^{\mathrm{I}} = E\Phi_t^{\mathrm{I}}$ и $HX_\lambda^* = E_\lambda X_\lambda^*$. Умножая первое из этих уравнений на X_λ^*, а второе на Φ_t и вычитая, получим, учтя ортонормированность функций:

$$\int \left(X_\lambda^* H\Phi_t^{\mathrm{I}} - \Phi_t^{\mathrm{I}} HX_\lambda^*\right) d\tau = (E - E_\lambda)\, C_{t\lambda}.$$

Разобьем функцию Φ_t^{I} на сумму функций $\Phi_t^{\mathrm{I}} = \sum\limits_s \Phi_{st}^{\mathrm{I}}$ соответственно числу каналов реакции. Представляя в каждом канале (вблизи входа в канал) гамильтониан в виде $H = H_s - \frac{\hbar^2}{2\mu_s}\Delta_s$ и используя теорему Грина, можно свести каждый объемный интеграл к «поверхностному». Если учесть, что H_s не дает вклада в поверхностный интеграл, то

$$-\int \left(X_\lambda^* H\Phi_t^{\mathrm{I}} - \Phi_t^{\mathrm{I}} HX_\lambda^*\right) d\tau = \sum_s \frac{\hbar}{2\mu_s} \int \left\{ rX_\lambda^* \frac{\partial\left(r\Phi_{st}^{\mathrm{I}}\right)}{\partial r} - r\Phi_{st}^{\mathrm{I}} \frac{\partial\left(rX_\lambda^*\right)}{\partial r} \right\} d\sigma.$$

На входе каждого канала $\{r\Phi_{st}^{\mathrm{I}}\}_\sigma = \varphi_s \psi_s$, поэтому, учтя (58,10), имеем:

$$\int \Phi_{st}^{\mathrm{I}} \frac{\partial\left(rX_\lambda^*\right)}{\partial r}\, r\, d\sigma = \varphi \int \psi_s \frac{\partial\, (rX_\lambda)^*}{\partial r}\, d\sigma = 0.$$

Таким образом,

$$\Phi_t^{\mathrm{I}} = \sum_{\lambda,\, s} \frac{\dfrac{\hbar^2}{2\mu_s} \displaystyle\int rX_\lambda^* \frac{\partial\left(r\Phi_{st}^{\mathrm{I}}\right)}{\partial r}\, d\sigma}{E_\lambda - E}\, X_\lambda.$$

Умножим обе части полученного равенства на $\psi_s^* r$ и проинтегрируем по поверхности σ; тогда, вводя величины, характеризующие реакцию в канале s, вызванную по каналу t:

$$\alpha_{st} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}} \int \Phi_{st}^{\mathrm{I}}\, \psi_s^* r\, d\sigma, \tag{58,11}$$

$$\beta_{st} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}} \int \psi_s^* \frac{\partial\left(r\Phi_{st}^{\mathrm{I}}\right)}{\partial r}\, d\sigma, \tag{58,12}$$

$$\gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}} \int X_\lambda \psi_s^* r\, d\sigma, \tag{58,13}$$

получим, учтя равенство

$$\left\{\frac{\partial\left(r\Phi_{st}^{\mathrm{I}}\right)}{\partial r}\right\}_\sigma = \frac{\sqrt{2\mu_s}}{\hbar}\, \beta_{st}\psi_s\,, \tag{58,14}$$

следующее из (58,12):

$$\alpha_{st} = \sum_{\lambda} \sum_{s'} \frac{\overset{*}{\gamma}_{\lambda s'} \gamma_{\lambda s}}{E_{\lambda} - E} \beta_{s't}.$$

Если ввести обозначение

$$R_{ss'} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda s} \overset{*}{\gamma}_{\lambda s'}}{E_{\lambda} - E}, \tag{58,15}$$

то можно записать:

$$\alpha_{st} = \sum_{s'} R_{ss'} \beta_{s't}, \tag{58,16}$$

или в тензорных обозначениях

$$R = \sum_{\lambda} \frac{(\gamma_{\lambda} \times \gamma_{\lambda})}{E_{\lambda} - E}, \tag{58,15a}$$

$$\alpha = R\beta, \tag{58,16a}$$

где символом $(a \times b)$ обозначается матрица с компонентами

$$(a \times b)_{ss'} = a_s b_{s'}.$$

Матрица (58,15), которую мы в дальнейшем будем называть *R-матрицей* или *вспомогательной матрицей* (derivative matrix), имеет размерность длины, зависит от энергии E и полного момента J. Через величины $\gamma_{\lambda s}$ и E_{λ} она зависит также от внутренних свойств составного ядра и граничных условий, накладываемых на функции X_{λ}. Хотя сами величины $\gamma_{\lambda s}$ и E_{λ} определяются неоднозначно (из-за произвола в выборе граничных условий для функции X_{λ}), выраженные через них некоторые интегральные соотношения имеют вполне определенный физический смысл (например, правило сумм, матрица рассеяния и др.) [26].

Матрица R связывает значение волновой функции и ее нормальной производной на поверхности σ в каждом канале. Воспользуемся этой связью, чтобы выразить матрицу рассеяния через матрицу R. Приравнивая волновые функции внешней и внутренней областей на входе канала s, получим, учтя (58,9) и

$$\{\Phi^{\mathrm{I}}_{st}\}_{\sigma} = \sqrt{\frac{2\mu_s}{\hbar^2}} \frac{\psi_s}{r_s} \alpha_{st},$$

следующее равенство:

$$\sqrt{\frac{2\mu_s}{\hbar^2}} \alpha_{st} = (\delta_{st} \varphi_s^* - S_{st} \varphi_s). \tag{58,17}$$

Используем формулы (58,16) и (58,8) и введем диагональные («потенциальные») матрицы

$$\omega_{st} = \delta_{st} e^{-i\Omega_s}, \tag{58,18}$$

$$A_{st} = \delta_{st} \sqrt{\frac{2k_s P_s}{\hbar}}, \tag{58,19}$$

величины φ_s и P_s в которых определяются волновой функцией относительного движения продуктов реакции (58,8) (зависящей от потенциала V_s в канале s). С учетом этих матриц равенство (58,17) можно переписать в следующем виде:

$$\omega_{st} - \sum_{s'} \omega_{ss'}^{-1} S_{s't} = \sum_{s's''} A_{ss'} R_{s's''} \beta_{s''t}, \tag{58,20}$$

или сокращенно

$$\omega - \omega^{-1} S = AR\beta. \tag{58,20a}$$

Приравнивая теперь производные по внешней нормали к поверхности σ_s от волновых функций (умноженных на r) внешней и внутренней областей (см. (58,14) и (58,9)) на входе канала s, получим:

$$\sqrt{\frac{2\mu_s}{\hbar^2}}\,\beta_{st} = \delta_{st}\frac{\partial \varphi_s^*}{\partial r_s} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial r_s} S_{st}.$$

Используя (58,5), (58,8), (58,18), (58,19) и вводя новую диагональную «потенциальную» матрицу

$$B_{ss'} = \delta_{ss'} \sqrt{\frac{\hbar}{2k_s P_s}}\,(\xi_s - i\zeta_s), \tag{58,21}$$

получим матричное равенство

$$\beta = \omega B - B^* \omega^{-1} S. \tag{58,22}$$

Подставляя (58,22) в (58,20а), получим после несложных преобразований явное выражение матрицы рассеяния S через матрицу R:

$$S = \omega \frac{1 - ARB}{1 - ARB^*}\,\omega. \tag{58,23}$$

В частном случае реакций с нейтронами с орбитальным моментом, равным нулю:

$$A_{st} = \delta_{st}\sqrt{\frac{2k_s}{\hbar}}, \quad B_{st} = -i\sqrt{\frac{\hbar k}{2}}\,\delta_{st}, \quad \omega = e^{-ik_s d_s}.$$

Подставляя (58,19) и (58,21) в (58,23), преобразуем S к виду

$$S = \omega V \omega, \tag{58,24}$$

где ω имеет прежний смысл (58,18), а

$$V \equiv \frac{1 - ARB}{1 - ARB^*} = 1 + 2i\sqrt{\zeta}\,(1 - RL)^{-1} R\sqrt{\zeta} \tag{58,24a}$$

— симметричная унитарная матрица. Симметричность матрицы V следует из симметричности матрицы S, а унитарность видна непосредственно.

Матрицы, входящие в (58,24а), имеют следующий смысл:

$$\left.\begin{aligned} L_{ss'} &= \delta_{ss'}(\xi_s + i\zeta_s), \\ (\sqrt{\zeta})_{ss'} &= \delta_{ss'}\sqrt{\zeta_s}. \end{aligned}\right\} \tag{58,25}$$

Формула (58,24) связывает матрицу рассеяния с матрицей R, зависящей от выбора поверхности σ и граничных условий для функций X_λ на этой поверхности. Несмотря на это, сама матрица рассеяния не зависит от произвола в этом выборе.

Формула (58,24) в принципе полностью определяет матрицу рассеяния, однако она не удобна для практического использования, так как содержит обратную матрицу $(1 - RL)^{-1}$. Явное выражение матрицы рассеяния может быть получено в некоторых предельных случаях, например, когда в реакции участвуют только один или два канала [37] или в матрице R существенны одно или два слагаемых. Последнее справедливо в области изолированных резонансов, когда $E \approx E_\lambda$, $\Gamma_\lambda \ll E_{\lambda\pm 1} - E_\lambda$.

Представим матрицу R в виде суммы двух членов:

$$R = R^1 + R^0, \tag{58,26}$$

где

$$R^1 = \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)}{E_\lambda - E}; \tag{58,27}$$

сумма $\sum\limits_\lambda$ содержит одно или несколько слагаемых, в которых зависимость от энергии еще существенна; R^0 учитывает практически не зависящие от энергии вклады от остальных уровней. В дальнейшем мы будем предполагать, что R^0 является диагональной матрицей.

При таком разбиении матрицы R имеем:

$$(1 - RL)^{-1} R = (1 - R^0L)^{-1}R^0 + \\ + (1 - R^0L)^{-1}(1 - R^1L^1)^{-1}R^1(1 - LR^0)^{-1}, \tag{58,28}$$

где

$$L^1 = L(1 - R^0L)^{-1}. \tag{58,29}$$

Для вычисления $(1 - R^1L^1)^{-1}R^1$ положим

$$(1 - R^1L^1)^{-1}R^1 = \sum_{\nu\mu} A_{\nu\mu}(\gamma_\nu \times \gamma_\mu). \tag{58,30}$$

Умножим далее обе части этого равенства на

$$(1 - R^1L^1) \equiv 1 - \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda) L^1}{E_\lambda - E};$$

тогда получим:

$$\sum_{\lambda,\mu} \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)\,\delta_{\mu\lambda}}{E_\lambda - E} = \sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu}(\gamma_\nu \times \gamma_\mu) - \sum_{\nu,\mu,\lambda} A_{\nu\mu} \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda) L^1 (\gamma_\nu \times \gamma_\mu)}{E_\lambda - E}.$$

Используя тождества $(a \times b) L = (a \times bL)$ и $(a \times b)(c \times d) = (bc)(a \times d)$, имеем:

$$\sum_{\lambda, \mu} (\gamma_\lambda \times \gamma_\mu) \left\{ \frac{\delta_{\mu\lambda}}{E_\lambda - E} - A_{\lambda\mu} + \sum_\nu \frac{(\gamma_\lambda \gamma_\nu L^1)}{E_\lambda - E} A_{\nu\mu} \right\} = 0.$$

Это уравнение выполняется для всех λ, μ, если

$$(E_\lambda - E) A_{\lambda\mu} - \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu} A_{\nu\mu} = \delta_{\mu\lambda}, \tag{58,31}$$

где

$$\alpha_{\lambda\mu} \equiv (\gamma_\lambda \gamma_\nu L^1) = \frac{\gamma_\lambda L (1 - R^0 L^*) \gamma_\nu}{(1 - R^0 L)(1 - R^0 L^*)} =$$
$$= \beta_\lambda L (1 - R^0 L^*) \beta_\lambda^* = \Delta_{\lambda\nu} + i \frac{\Gamma_{\lambda\nu}}{2}. \tag{58,32}$$

При получении соотношения (58,32) были использованы выражения (58,29) и (58,25); при этом

$$\Delta_{\lambda\mu} \equiv \beta_\lambda [\xi - R^0 (\xi^2 + \zeta^2)] \beta_\mu^*, \tag{58,33}$$

$$\Gamma_{\lambda\nu} = 2 (\beta_\lambda \zeta \beta_\nu^*) = 2 \sum_s \beta_{\lambda s} \zeta_s \beta_{\nu s}^*, \tag{58,34}$$

$$\beta_\lambda \equiv \frac{\gamma_\lambda}{1 - R^0 L} = \gamma_\lambda e^{i\delta} \tau, \tag{58,35}$$

где

$$\tau = \{(1 - R^0 \xi)^2 + (R^0 \zeta)^2\}^{1/2} |1 - R^0 L|^{-2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{R^0 \zeta}{1 - R^0 \xi}.$$

Подставляя (58,30) в (58,28) и используя обозначение (58,35), получим:

$$(1 - RL)^{-1} = (1 - R^0 L)^{-1} R^0 + \sum_{\nu, \mu} A_{\nu\mu} (\beta_\nu \times \beta_\mu). \tag{58,36}$$

Это выражение подставляем в (58,24а); находим:

$$V = 1 + 2i\zeta\tau e^{i\delta} R^0 + 2i \sum_{\nu, \mu} A_{\nu\mu} \sqrt{\zeta} (\beta_\nu \times \beta_\mu) \sqrt{\zeta}.$$

Предположим теперь, что энергия E попадает в область изолированного резонанса E_λ; тогда R^1 (58,27) будет содержать только один член, а система уравнений (58,31) сведется к одному равенству:

$$A_{\lambda\lambda} (E_\lambda - E - \alpha_{\lambda\lambda}) = 1. \tag{58,37}$$

Подставляя (58,37) в (58,36), получим явное выражение симметричной унитарной матрицы V в области изолированного резонанса

$$V = 1 + 2i\zeta\tau e^{i\delta} R^0 + 2i \frac{\sqrt{\zeta} (\beta'_\lambda \times \beta'_\lambda) \sqrt{\zeta} e^{2i\delta}}{\mathcal{E}_\lambda - E - i \frac{\Gamma_\lambda}{2}}, \tag{58,38}$$

где

$$\beta_\lambda = \beta'_\lambda e^{i\delta}, \quad \mathcal{E}_\lambda = E_\lambda - \Delta_{\lambda\lambda}, \quad \Gamma_\lambda \equiv \Gamma_{\lambda\lambda}. \tag{58,39}$$

Таким образом, $\Delta_{\lambda\lambda}$, определяемая равенством (58,33), смещает резонансное значение энергии.

Сечение рассеяния и реакции (при входном канале t) выражается через матрицу V простой формулой:

$$\sigma_{st} = \frac{\pi}{k_t^2} g \,|(\omega V \omega - 1)_{st}|^2, \tag{58,40}$$

где g — множитель, зависящий от спина каналов и полного спина системы; ω — диагональная матрица, определяемая соотношением (58,18).

Подставляя (58,38) в (58,40), можно представить сечение рассеяния в виде

$$\sigma_{tt'} = 4\pi g \,|A^{(t)}_{\text{потенц}} + A_{\text{рез}}|^2, \tag{58,41}$$

где

$$A^{(t)}_{\text{потенц}} = \frac{1}{k_t} e^{i(\Omega_t - \delta)} \{e^{-i\delta} \sin \Omega_t - \zeta \tau R^0 e^{-i\Omega_t}\} \tag{58,42}$$

— медленно меняющаяся функция энергии. $A^{(t)}_{\text{потенц}}$ определяет так называемое потенциальное рассеяние, часть которого, обусловленная величинами δ, τ и R^0, зависит от остальных резонансных уровней. Если положить $R^0 = 0$, то $A^{(t)}_{\text{потенц}} = \frac{1}{k_t} e^{\Omega_t} \sin \Omega_t$ совпадает с амплитудой потенциального рассеяния, введенной в § 54 (формула (54,12)) и не учитывающей влияние остальных резонансных уровней.

Амплитуда резонансного рассеяния при учете (58,34) запишется в виде

$$A^{(t)}_{\text{рез}} = \frac{1}{k_t} \frac{\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda t}}{E - \vartheta_\lambda + \frac{i}{2}\Gamma_\lambda}, \qquad \Gamma_{\lambda t} = 2\,|\beta_{\lambda t}|^2 \zeta_t, \tag{58,43}$$

которая совпадает с (54,11), если принять во внимание, что

$$E - \vartheta_\lambda = \varepsilon - \varepsilon_\lambda, \tag{58,44}$$

где ε — энергия относительного движения, а ε_λ — ее резонансное значение. Здесь и в дальнейшем греческая буква определяет номер уровня, а латинская — номер канала.

Недиагональный элемент (58,40) дает сечение реакции. Подставляя (58,38), имеем, учитывая (58,44), сечение реакции, идущей по каналу s при входном канале t:

$$\sigma_{st} = \frac{\pi}{k_t^2} g \frac{\Gamma_{\lambda t}\Gamma_{\lambda s}}{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2}. \tag{58,45}$$

Формула (58,45) может быть записана в виде произведения двух множителей

$$\sigma_{st} = \left\{ \frac{\pi}{k_t^2} g \frac{\Gamma_{\lambda t}\Gamma_\lambda}{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2} \right\} \left\{ \frac{\Gamma_{\lambda s}}{\Gamma_\lambda} \right\}, \tag{58,45a}$$

из которых первый можно интерпретировать как сечение образования составного ядра по каналу t, а второй — как относительную вероятность распада по каналу s. Таким образом, *в области изолированного резонанса оправдывается предположение Бора о независимости процессов образования и распада составного ядра по одному из каналов.*

В области энергий, близких к энергии изолированного резонанса, в матрице R существенно только одно слагаемое $R^0 \approx 0$; поэтому $\beta_\lambda = \gamma_\lambda$ и полная ширина уровня

$$\Gamma_\lambda \equiv \Gamma_{\lambda\lambda} = 2\sum_s \zeta_s |\gamma_{\lambda s}|^2,$$

а парциальная ширина в канале s

$$\Gamma_{\lambda s} = 2\zeta_s |\gamma_{\lambda s}|^2.$$

Учитывая (58,7а), имеем для нейтронов с нулевым орбитальным моментом $\Gamma_{\lambda s} = 2k_s |\gamma_{\lambda s}|^2$. Величину $|\gamma_{\lambda s}|^2$ называют *приведенной шириной уровня* λ в канале s (см. § 54). Она зависит только от внутренних свойств составного ядра и имеет размерность: энергия $\times$ длина.

Вероятность распада состояния λ составного ядра по каналу s определяется величиной $\frac{\Gamma_{\lambda s}}{\hbar}$. С другой стороны, эта вероятность равняется полному потоку частиц через сферу радиуса d_s, т. е. должно выполняться равенство

$$\frac{\Gamma_{\lambda s}}{\hbar} = \frac{\hbar}{2i\mu_s}\left\{\varphi^*_{\lambda s}\frac{\partial\varphi_{\lambda s}}{\partial r_s} - \varphi_{\lambda s}\frac{\partial\varphi^*_{\lambda s}}{\partial r_s}\right\}_{r_s=d_s},$$

где $\varphi_{\lambda s}$ — волновая функция в канале s. Пользуясь (58,5) и (58,7), имеем:

$$\Gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar^2}{\mu_s}\zeta_s |\{\varphi_{\lambda s}\}_\sigma|^2 = \frac{\hbar^2 k_s}{\mu_s} P_s |\{\varphi_{\lambda s}\}_\sigma|^2.$$

Если вероятность распада не очень велика $\Gamma_{\lambda s} \ll D$, то X_λ сравнительно хорошо описывает состояние составного ядра. В этом случае $\{\varphi_{\lambda s}\}_\sigma = \int X_\lambda \psi^*_s \, r d\sigma$. Поэтому

$$\Gamma_{\lambda s} = 2k_s P_s |\gamma_{\lambda s}|^2, \quad \text{где} \quad \gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_s}}\int X_\lambda \psi^*_s \, r d\sigma$$

совпадает с (58,13).

Итак, формула (58,45а) показывает, что если полная ширина уровня Γ_λ значительно меньше среднего расстояния между уровнями, то во всех случаях, когда энергия возбуждения попадает в резонансную область, сечения рассеяния и реакции описываются формулой Брейта — Вигнера для изолированного уровня. Сечение реакции в этом случае не зависит от способа образования составного ядра. Таким образом, гипотеза Бора о составном ядре, которую мы использовали в § 55, оказывается оправданной в области изолированных резонансов.

Если уровни составного ядра перекрываются и если использовать предположение Бете [38], что знаки $\gamma_{\lambda s}$ для различных уровней совершенно не коррелированы, то часть членов в сумме (58,31) будет положительной, а часть — отрицательной при $\mu \neq \nu$. Если же $\mu = \nu$, то все слагаемые положительны. Следовательно, недиагональные коэффициенты $A_{\lambda\mu}$ будут значительно меньше диагональных (примерно в отношении $1:N$, где N — число каналов). Пренебрегая недиагональными элементами в (58,31), получим (58,37) уже как приближенное уравнение для каждого уровня E_λ. В этом случае сечение реакции будет выражаться суммой членов (58, 45а), относящихся к каждому уровню:

$$\sigma_{st} = \frac{\pi}{k_t^2} g \sum_{\lambda} \frac{\Gamma_{\lambda t} \Gamma_\lambda}{(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2} \left\{ \frac{\Gamma_{\lambda s}}{\Gamma_\lambda} \right\}. \tag{58,46}$$

Усредняя (58,46) при $\overline{\Gamma}_{\lambda t} < D$ $\left(\text{и произвольном } \frac{\overline{\Gamma}_\lambda}{D}\right)$ по многим уровням, получим результаты, рассмотренные в § 57. Таким образом, при перекрывании уровней, из предположения Бете следует, что сечение поглощения, усредненное по резонансам, будет иметь порядок поперечного сечения ядра, а распад составного ядра можно считать независимым от способа его образования только для усредненных по резонансам сечений.

В заключение этого параграфа покажем, что сумма приведенных ширин $\sum_s |\gamma_\lambda|^2$, распространенная на все состояния s, соответствующие одинаковым продуктам реакции, имеет вполне определенное значение. Для вычисления этого значения вернемся к определению $\gamma_{\lambda s}$ (см. (58,13)):

$$\gamma_{\lambda s} = \frac{\hbar d_s}{\sqrt{2\mu_s}} \int X_\lambda \psi_s^* d\sigma. \tag{58,47}$$

Поскольку нас интересуют только каналы s, соответствующие одинаковым продуктам реакции, то можно положить $d_s = d$ и $\mu_s = \mu$.

Из (58,47) следует, что на поверхности σ

$$\frac{\hbar d}{\sqrt{2\mu}} \left\{ X_\lambda \right\}_\sigma = \sum_s \gamma_{\lambda s} \psi_s. \tag{58,48}$$

Взяв квадрат модуля от обеих частей равенства (58,48) и интегрируя результат по поверхности σ, получим искомое равенство:

$$\frac{\hbar^2 d^2}{2\mu} \int |X_\lambda|^2 d\sigma = \sum_s |\gamma_{\lambda s}|^2. \tag{58,49}$$

Левая часть (58,49) может быть оценена следующим образом. Согласно нормировке $\int |X_\lambda|^2 dV = 1$ следует, что $|X_\lambda|^2 \sim \frac{1}{WA}$, где W—сфера радиуса d. Поэтому $\int |X_\lambda|^2 d\sigma \approx \frac{4\pi WA^{-1}}{WA} = \frac{3}{d^3}$. Тогда (58,49) переходит в равенство

$$\sum_s |\gamma_{\lambda s}|^2 = \frac{3\hbar^2}{2\mu d}, \tag{58,50}$$

носящее название *правила сумм в дисперсионной теории ядерных реакций*. Из (58,50) можно заключить, что парциальная приведенная ширина должна удовлетворять неравенству

$$|\gamma_{\lambda s}|^2 \leqslant \frac{3\hbar^2}{2\mu d}.$$

Итак, согласно (58,50) величина $f_{\lambda s} \equiv \frac{2\gamma^2_{\lambda s}\mu d}{3\hbar^2}$, удовлетворяющая равенству $\sum_s f_{\lambda s} = 1$, играет в ядерных реакциях роль, подобную силе осциллятора в оптических переходах в атомной физике.

§ 59*. Эффективные сечения при наличии многих резонансов

Пользуясь результатами предыдущего параграфа, рассмотрим более подробно случай, когда в небольшой области энергий заключается много резонансных уровней составного ядра.

Согласно (58,24) и (58,24а) общий элемент матрицы рассеяния может быть записан в виде

$$S_{st} = e^{-i(\Omega_s + \Omega_t)} \left[\delta_{st} + 2i\sqrt{\zeta_s}\left(\frac{R}{1-RL}\right)_{st}\sqrt{\zeta_t}\right], \tag{59,1}$$

где Ω_s и ζ_s определяются формулами (58,6) и (58,7).

Учитывая предположение Бете о статистическом равновероятном распределении знаков γ_λ, использованное при выводе (58,46), с помощью (58,30) и (58,31) можем записать:

$$\bar{R} \equiv \left(\frac{R}{1-RL}\right) \approx \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon - i\frac{\Gamma_\lambda}{2}}, \tag{59,2}$$

где

$$\varepsilon_\lambda - \varepsilon \equiv E_\lambda - E - \Delta_{\lambda\lambda}.$$

Как известно из общей теории рассеяния, сечение упругого рассеяния σ_e, сечение реакции σ_r и полное сечение σ_t в канале s выра-