Левая часть (58,49) может быть оценена следующим образом. Согласно нормировке $\int |X_\lambda|^2 dV = 1$ следует, что $|X_\lambda|^2 \sim \frac{1}{WA}$, где W—сфера радиуса d. Поэтому $\int |X_\lambda|^2 d\sigma \approx \frac{4\pi W A^{-1}}{WA} = \frac{3}{d^3}$. Тогда (58,49) переходит в равенство

$$\sum_s |\gamma_{\lambda s}|^2 = \frac{3\hbar^2}{2\mu d}, \tag{58,50}$$

носящее название *правила сумм в дисперсионной теории ядерных реакций*. Из (58,50) можно заключить, что парциальная приведенная ширина должна удовлетворять неравенству

$$|\gamma_{\lambda s}|^2 \leqslant \frac{3\hbar^2}{2\mu d}.$$

Итак, согласно (58,50) величина $f_{\lambda s} \equiv \frac{2\gamma_{\lambda s}^2 \mu d}{3\hbar^2}$, удовлетворяющая равенству $\sum_s f_{\lambda s} = 1$, играет в ядерных реакциях роль, подобную силе осциллятора в оптических переходах в атомной физике.

§ 59*. Эффективные сечения при наличии многих резонансов

Пользуясь результатами предыдущего параграфа, рассмотрим более подробно случай, когда в небольшой области энергий заключается много резонансных уровней составного ядра.

Согласно (58,24) и (58,24а) общий элемент матрицы рассеяния может быть записан в виде

$$S_{st} = e^{-i(\Omega_s + \Omega_t)} \left[\delta_{st} + 2i\sqrt{\zeta_s} \left(\frac{R}{1 - RL} \right)_{st} \sqrt{\zeta_t} \right], \tag{59,1}$$

где Ω_s и ζ_s определяются формулами (58,6) и (58,7).

Учитывая предположение Бете о статистическом равновероятном распределении знаков γ_λ, использованное при выводе (58,46), с помощью (58,30) и (58,31) можем записать:

$$\bar{R} \equiv \left(\frac{R}{1 - RL} \right) \approx \sum_\lambda \frac{(\gamma_\lambda \times \gamma_\lambda)}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon - i\frac{\Gamma_\lambda}{2}}, \tag{59,2}$$

где

$$\varepsilon_\lambda - \varepsilon \equiv E_\lambda - E - \Delta_{\lambda\lambda}.$$

Как известно из общей теории рассеяния, сечение упругого рассеяния σ_e, сечение реакции σ_r и полное сечение σ_t в канале s выражаются через диагональный элемент матрицы рассеяния S_{ss} с помощью формул:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{\pi}{k_s^2} g\,|1 - S_{ss}|^2, \\ \sigma_r &= \frac{\pi}{k_s^2} g\,(1 - |S_{ss}|^2), \\ \sigma_t &= \sigma_e + \sigma_r = \frac{2\pi}{k_s^2} g\,(1 - \operatorname{Re} S_{ss}). \end{aligned}\right\} \tag{59,3}$$

Статистический множитель $g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2J+1}\right)$, где J — спин ядра мишени. Для четно-четных ядер $J = 0$, $g = 1$, для ядер с большим спином $g \approx \frac{1}{2}$.

Для вычисления S_{ss} надо знать диагональные матричные элементы матрицы (59,2). Перейдем в формуле (59,2) от суммирования к интегрированию, для чего совершим замену

$$\sum_\lambda \longrightarrow \int \frac{d\varepsilon_\lambda}{D_\lambda},$$

где D_λ — расстояние между соседними уровнями в области λ-го резонанса.

Тогда

$$\left(\frac{R}{1 - RL}\right)_{ss} \approx \overline{R}\left(\varepsilon + i\frac{\Gamma}{2}\right) = \int \frac{C_s(\varepsilon_\lambda)\, d\varepsilon_\lambda}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon - i\frac{\Gamma}{2}}, \tag{59,4}$$

где $\Gamma = \overline{\Gamma}_\lambda$ и $C_s(\varepsilon_\lambda) \equiv \left\langle \frac{|\gamma_{\lambda s}|^2}{D_\lambda} \right\rangle$ — так называемая *силовая функция* (strength function [39]) уровня ε_λ, которая, как будет показано ниже, с точностью до 4π совпадает с *коэффициентом прилипания*.

Уравнение (59,4) имеет вид дисперсионного соотношения; оно позволяет вычислить диагональный элемент матрицы $\overline{R}$, если известна «силовая функция» для всех значений энергии. Учитывая, что

$$\lim_{\eta \to 0} \int \frac{\eta f(x)\, dx}{x^2 + \eta^2} = \pi f(0), \tag{59,5}$$

получим из (59,4) обратное к нему соотношение:

$$C_s(\varepsilon) = \lim_{\Gamma \to 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \overline{R}_{ss}\left(\varepsilon + i\frac{\Gamma}{2}\right) \right\}, \tag{59,6}$$

позволяющее непосредственно вычислять «силовую функцию», зная диагональный матричный элемент $\overline{R}_{ss}$.

Из всех формул для сечений (59,3), которые определяются экспериментально, только формула для сечения полного рассеяния σ_t линейна по отношению к диагональному элементу матрицы рассеяния S_{ss}, а следовательно и по отношению к $\overline{R}_{ss}$. Другие сечения содержат квадрат этого элемента. Правда, и при измерении σ_t определяется непосредственно только $\operatorname{Re} S_{ss}$. Для вычисления мнимой части необходимо использовать дополнительные соображения, которые можно получить при анализе определенных моделей ядра.

Как будет показано в главе XIII, взаимодействие медленных нейтронов со средними и тяжелыми ядрами может быть описано оптическим потенциалом

$$V=\begin{cases} -V_0-iW, & \text{если } r<d; \\ 0, & \text{если } r>d. \end{cases}$$

В этом случае для нейтронов, обладающих энергией ε, при $l=0$ логарифмическая производная волновой функции на поверхности ядра вычисляется непосредственно:

$$f=X\operatorname{ctg} X,$$

где

$$X^2=\frac{2\mu d^2}{\hbar^2}(\varepsilon+V_0+iW);$$

μ — приведенная масса нейтрона и ядра; d — радиус канала реакции.

Так как по определению матрицы R она связывает значение волновой функции и ее нормальной производной на поверхности ядра в каждом канале, то можно написать:

$$\overline{R}_{ss}=\frac{d}{f}=d\,\frac{\operatorname{tg} X}{X}. \tag{59,7}$$

Используя соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} X}{X}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2-X^2},$$

перепишем (59,7) в виде

$$\overline{R}_{ss}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\hbar^2}{\mu d}}{\varepsilon_n-\varepsilon-iW}, \tag{59,7а}$$

где

$$\varepsilon_n\equiv\frac{\pi^2\hbar^2}{\mu d^2}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2-V_0 \tag{59,8}$$

— энергетические уровни нейтрона в поле с потенциалом V_0.

Теперь из соотношения (59,6) можно вычислить «силовую функцию»

$$C_s(\varepsilon_\lambda) = \left\langle \frac{|\gamma_{\lambda s}|^2}{D_\lambda} \right\rangle = \lim_{W \to 0} \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{W \frac{\hbar}{\mu d}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_\lambda)^2 + W^2}. \tag{59,9}$$

Переходя в (59,9) от суммирования к интегрированию, мы можем оценить значение парциальной приведенной ширины уровня ε_λ:

$$\langle |\gamma_{\lambda s}|^2 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{\mu d}.$$

Если резонансы составного ядра не разрешаются, то измеряемые эффективные сечения относятся к сечениям, усредненным по многим резонансам. Усредним сечение упругого рассеяния, определяемое первой формулой (59,3), по небольшому интервалу энергий, содержащему много резонансов, пренебрегая при этом изменением k_s^2 на интервале усреднения:

$$\langle \sigma_e \rangle = \frac{\pi}{k_s^2} g \langle |1 - S_{ss}|^2 \rangle = \sigma_{se} + \sigma_{ce},$$

где

$$\sigma_{se} = \frac{\pi}{k_s^2} g |1 - \langle S_{ss} \rangle|^2, \tag{59,10}$$

$$\sigma_{ce} = \frac{\pi}{k_s^2} g (\langle |S_{ss}|^2 \rangle - |\langle S_{ss} \rangle|^2). \tag{59,11}$$

Сечение σ_{se} называют [40] сечением упругого рассеяния, обусловленного потенциалом, а сечение σ_{ce} — сечением упругого рассеяния, проходящего через стадию составного ядра, так как оно исчезает в области возбуждений, соответствующих непрерывному спектру энергии, когда вероятность упругого рассеяния, проходящего через стадию составного ядра, исчезающе мала. В области же резкого изменения матричного элемента S_{ss} с энергией (редко расположенные резонансы)

$$\langle |S_{ss}|^2 \rangle \neq |\langle S_{ss} \rangle|^2$$

и эффективное сечение упругого рассеяния, проходящего через стадию составного ядра, отлично от нуля.

Среднее значение эффективного сечения, приводящего к реакции, равно

$$\langle \sigma_r \rangle = \frac{\pi}{k_s^2} g |1 - \langle |S_{ss}|^2 \rangle|. \tag{59,12}$$

Суммарное сечение $\sigma_c = \langle \sigma_r \rangle + \sigma_{ce}$ называют *сечением образования составного ядра*. Согласно (59,12) и (59,11) оно определяется формулой

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k_s^2} g (1 - |\langle S_{ss} \rangle|^2). \tag{59,13}$$

Покажем, что эффективное сечение образования составного ядра можно выразить через «силовую функцию» $C(\varepsilon)$. Из (59,1) и (59,2) следует

$$\langle S_{ss} \rangle = e^{-2i\Omega_s}(1 + 2i\zeta_s \overline{R}_{ss}). \tag{59,14}$$

Для вычисления $\overline{R}_{ss}$ воспользуемся равенством (59,4). Если не учитывать полюсов «силовой функции», то из (59,4) следует

$$\overline{R}_{ss} \approx 2\pi i C_s(\varepsilon). \tag{59,14a}$$

Подставляя (59,14) и (59,14а) в (59,13), получим:

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k_s^2} g\, 4\pi\zeta_s C_s(\varepsilon)(1 - 4\pi\zeta_s C_s) \approx \frac{4\pi^2}{k_s^2} g\, \zeta_s C_s(\varepsilon). \tag{59,15}$$

Множитель ζ_s определен формулой (58,7). Он характеризует проницаемость «внешнего» потенциального барьера (кулоновское поле и центробежный барьер). Поэтому величину $\frac{\pi}{k_s^2} g\zeta_s$ можно назвать эффективным сечением «столкновения» ядра и нуклона и переписать (59,15) в виде

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k_s^2} g\zeta_s \eta_s, \tag{59,16}$$

где η_s называют *коэффициентом прилипания*. Согласно (59,15) коэффициент прилипания в канале s определяется «силовой функцией»

$$\eta_s = 4\pi C_s(\varepsilon). \tag{59,17}$$

«Силовая функция» $C_s(\varepsilon)$ может быть определена непосредственно из параметров резонансов в области энергий, соответствующих изолированным резонансам. В случае медленных нейтронов $|\gamma|^2$ выражается через нейтронную ширину $\Gamma_e = 2k|\gamma|^2$ или через «приведенную нейтронную» ширину $\Gamma_e^0 = \frac{\Gamma_e}{\varepsilon_\lambda}$, где ε_λ — кинетическая энергия нейтрона (обычно выражается в электроновольтах), соответствующая резонансу. Зависимость «силовой функции» от атомного веса измерялась в области массовых чисел $100 < A < 200$ в работе [41] и в области $A \sim 50$ в работе [42]. Оказалось, что «силовая функция» обладает хорошо выраженным максимумом в области $A \sim 52$ и менее точно выраженным максимумом в области $A = 160 - 165$.

Если предположить, что формула (59,9) справедлива и при конечном W, т. е. если положить

$$\left\langle \frac{|\gamma_{\lambda s}|^2}{D_\lambda} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\frac{\hbar^2}{\mu d} W}{(\varepsilon_n - \varepsilon)^2 + W^2}, \tag{59,18}$$

то из положения максимумов можно определить параметр V_0 оптической модели ядерных взаимодействий.

Вследствие того, что максимум наблюдается при малой энергии, используя формулу (59,8), имеем:

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{\mu d^2}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - V_0 \approx 0.$$

Для $A = 52$ надо взять $n = 3$, для $A = 160 - 165$ $n = 4$. Тогда, полагая

$$d = r_0 A^{1/3} + b_n, \quad b_n \approx 0{,}6 r_0,$$

можно получить [43]:

$$r_0^2 V_0 = 67 \cdot 10^{-26}\ \textit{Мэв}\cdot\textit{см}^2.$$

Таким образом, если $r_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-13}$ *см*, то $V_0 = 40$ *Мэв*, если $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ *см*, то $V_0 = 47$ *Мэв*.

Если исходить при оценке «силовой функции» из представления о модели сильной связи (§ 55), то согласно (55,14)

$$\frac{\langle \gamma^2 \rangle}{D} = \frac{1}{\pi K}, \tag{59,19}$$

где K — волновое число, соответствующее средней кинетической энергии нейтрона внутри ядра. Величина K слабо изменяется с изменением массового числа A, поэтому результат (59,19) не согласуется с экспериментом.

§ 60. Угловое распределение продуктов ядерных реакций

Рассеяние (упругое и неупругое) и ядерные реакции, при которых две частицы сталкиваются и затем система распадается на две другие частицы, можно математически описать как некоторый процесс столкновения двух частиц в начальной стадии и разлет двух частиц в конечной стадии. Перед столкновением систему мы будем характеризовать индексом a, определяющим тип сталкивающихся частиц и их внутреннее состояние, орбитальным моментом l и спином канала s. Спин канала s является векторной суммой спина частицы и спина ядра. Состояние системы после столкновения характеризуется соответственно набором b, λ, σ.

Задача теории рассеяния состоит в вычислении эффективного сечения процесса $als \to b\lambda\sigma$. Орбитальный l и спиновый s моменты начального состояния, складываясь, образуют полный момент системы J. Полный момент системы J, его проекция на выделенное направление и четность состояния Π сохраняются при столкновении. Эффективное сечение процесса $als \to b\lambda\sigma$, соответствующего полному моменту J и четности Π, характеризуется элементом матрицы рассеяния

$$S_{als;\, b\lambda\sigma}(J, \Pi). \tag{60,1}$$

Матричные элементы (60,1) зависят от энергии столкновения и образуют унитарную матрицу.