Вследствие того, что максимум наблюдается при малой энергии, используя формулу (59,8), имеем:

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{\mu d^2}\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 - V_0 \approx 0.$$

Для $A=52$ надо взять $n=3$, для $A=160-165$ $n=4$. Тогда, полагая

$$d = r_0 A^{1/3} + b_n, \quad b_n \approx 0{,}6 r_0,$$

можно получить [43]:

$$r_0^2 V_0 = 67\cdot 10^{-26}\ \textit{Мэв}\cdot\textit{см}^2.$$

Таким образом, если $r_0 = 1{,}3\cdot 10^{-13}$ *см*, то $V_0 = 40$ *Мэв*, если $r_0 = 1{,}2\cdot 10^{-13}$ *см*, то $V_0 = 47$ *Мэв*.

Если исходить при оценке «силовой функции» из представления о модели сильной связи (§ 55), то согласно (55,14)

$$\frac{\langle\gamma^2\rangle}{D} = \frac{1}{\pi K}, \tag{59,19}$$

где K — волновое число, соответствующее средней кинетической энергии нейтрона внутри ядра. Величина K слабо изменяется с изменением массового числа A, поэтому результат (59,19) не согласуется с экспериментом.

§ 60. Угловое распределение продуктов ядерных реакций

Рассеяние (упругое и неупругое) и ядерные реакции, при которых две частицы сталкиваются и затем система распадается на две другие частицы, можно математически описать как некоторый процесс столкновения двух частиц в начальной стадии и разлет двух частиц в конечной стадии. Перед столкновением систему мы будем характеризовать индексом a, определяющим тип сталкивающихся частиц и их внутреннее состояние, орбитальным моментом l и спином канала s. Спин канала s является векторной суммой спина частицы и спина ядра. Состояние системы после столкновения характеризуется соответственно набором b, λ, σ.

Задача теории рассеяния состоит в вычислении эффективного сечения процесса $als \to b\lambda\sigma$. Орбитальный l и спиновый s моменты начального состояния, складываясь, образуют полный момент системы J. Полный момент системы J, его проекция на выделенное направление и четность состояния П сохраняются при столкновении. Эффективное сечение процесса $als \to b\lambda\sigma$, соответствующего полному моменту J и четности П, характеризуется элементом матрицы рассеяния

$$S_{als;\, b\lambda\sigma}(J, \text{П}). \tag{60,1}$$

Матричные элементы (60,1) зависят от энергии столкновения и образуют унитарную матрицу.

Волновая функция начального состояния системы во входном канале as может быть записана в виде

$$\Phi_{as}=\varphi_{as}\chi_{sm_s}e^{ik_az_a}=\varphi_{as}\sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(k_ar_a)Y_{l0}(\theta_a,\varphi_a)\chi_{sm_s}, \quad (60{,}2)$$

где χ_{sm_s} — спиновая функция канала; φ_{as} — волновая функция, определяющая внутренние состояния ядра и частицы. Асимптотическое значение (60,2) при $k_ar_a \gg 1$ имеет вид

$$\Phi_{as}=\varphi_{as}\frac{\sqrt{\pi}}{k_ar_a}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}\sqrt{2l+1}\left\{e^{-i\left(k_ar_a-\frac{l\pi}{2}\right)}-e^{i\left(k_ar_a-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\}Y_{l0}\chi_{sm_s}. \quad (60{,}3)$$

Выразим произведение волновых функций $Y_{l0}\chi_{sm_s}$ через (спин-угловую) функцию *) полного момента системы

$$Y_{l0}\chi_{sm_s}=\sum_{J=|l-s|}^{l+s}(ls0m_s|Jm_s)\,G_{lsJm_s}.$$

Тогда волновая функция начального состояния в канале as принимает вид

$$\Phi_{as}=\varphi_{as}\frac{\sqrt{\pi}}{k_ar_a}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{J}\sqrt{2l+1}\,(ls0m_s|Jm_s)\,G_{lsJm_s}\times$$
$$\times\left\{e^{-i\left(k_ar_a-\frac{l\pi}{2}\right)}-e^{i\left(k_ar_a-\frac{l\pi}{2}\right)}\right\},\quad k_ar_a\gg 1. \quad (60{,}3\text{a})$$

В конечном состоянии наиболее общий вид волновой функции в канале $b\sigma$ (при заданных $J\Pi m_s$) можно написать в виде

$$\Phi_{b\sigma}=\sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma}G_{\lambda\sigma Jm_s}\varphi_{b\sigma}\left\{A_{b\lambda\sigma}^{J\Pi m_s}\frac{\exp\left[-i\left(k_br_b-\frac{\lambda\pi}{2}\right)\right]}{r_b\sqrt{v_b}}-\right.$$
$$\left.-B_{b\lambda\sigma}^{J\Pi m_s}\frac{\exp\left[i\left(k_br_b-\frac{\lambda\pi}{2}\right)\right]}{r_b\sqrt{v_b}}\right\}. \quad (60{,}4)$$

Соотношение между амплитудами сходящейся и расходящейся сферических волн определяется матрицей рассеяния **)

$$B_{b\lambda\sigma}=\sum_{b'\lambda'\sigma'}S_{b\lambda\sigma,\,b'\lambda'\sigma'}A_{b'\lambda'\sigma'}. \quad (60{,}5)$$

---

*) В приложении I эти функции обозначаются буквой Φ.

**) Здесь и в дальнейшем мы не будем ставить индексов $J\Pi m_s$ над буквами A и B.

Сравнивая (60,4) с (60,3), мы найдем:

$$A_{b\lambda\sigma}=\frac{i^{\lambda+1}\sqrt{2\lambda+1}\,(\lambda\sigma 0 m_s\mid Jm_s)\sqrt{\pi v_b}}{k_a}\,\delta_{ab}\,\delta_{s\sigma}\,\delta_{\lambda l}. \qquad (60,6)$$

Подставляя (60,6) в (60,5), имеем:

$$B_{b\lambda\sigma}=\sum_{l=|J-s|}^{J+s} S_{b\lambda\sigma,\,als}k_a^{-1}\sqrt{(2l+1)\pi v_a}\,(ls0m_s\mid Jm_s)\,i^{l+1}. \qquad (60,7)$$

Пользуясь (60,7) и (60,6), представим волновую функцию (60,4) в виде суммы падающей и расходящихся волн:

$$\Phi_{b\sigma}=\Phi_{as}\delta_{ba}\delta_{\sigma s}+\Psi_{b\sigma}, \qquad (60,8)$$

где

$$\Psi_{b\sigma}=\frac{i}{k_a r_b}\left(\frac{\pi v_a}{v_b}\right)^{1/2}\varphi_{b\sigma}\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{l=|J-s|}^{J+s}\sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma} i^l\sqrt{2l+1}\,(ls0m_s\mid Jm_s)G_{\lambda\sigma Jm_s}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left(k_b r_b-\frac{\lambda\pi}{2}\right)\right\}[\delta_{ba}\delta_{\lambda l}\delta_{\sigma s}-S_{b\lambda\sigma,\,als}]. \qquad (60,9)$$

Если детектор регистрирует продукты реакции не по значению полного момента J системы, а по значениям спина канала и его проекции m_σ, то, используя равенство

$$G_{\lambda\sigma Jm_s}=\sum_{m_\sigma}(\lambda\sigma,\,m_s-m_\sigma,\,m_\sigma\mid Jm_s)\,Y_{\lambda,\,m_s-m_\sigma}\chi_{\sigma m_\sigma},$$

полезно преобразовать (60,9) к виду

$$\Psi_{b\sigma}=\frac{ie^{ik_b r_b}}{r_b}\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{1/2}\sum_{m_\sigma}F^{b\sigma m_\sigma}_{asm_s}\varphi_{b\sigma}\chi_{\sigma m_\sigma}, \qquad (60,10)$$

где

$$F^{b\sigma m_\sigma}_{asm_s}\equiv\frac{\pi}{k_a}\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{l=|J-s|}^{J+s}\sum_{\lambda=|J-\sigma|}^{J+\sigma} i^{l-\lambda}\sqrt{2l+1}\,(ls0m_s\mid Jm_s)\,Y_{\lambda,\,m_s-m_\sigma}\times$$
$$\times(\lambda\sigma,\,m_s-m_\sigma,\,m_\sigma\mid Jm_s)\,[\delta_{ba}\delta_{\lambda l}\delta_{s\sigma}-S_{b\lambda\sigma,als}]. \qquad (60,11)$$

Величину $F^{b\sigma m_\sigma}_{asm_s}$ можно назвать [44] *амплитудой реакции*. Иногда амплитудой реакции называют величину

$$A^{b\sigma m_\sigma}_{asm_s}\equiv\left(\frac{v_a}{v_b}\right)^{1/2}F^{b\sigma m_\sigma}_{asm_s}. \qquad (60,12)$$

Используя (60,8) и (60,10), легко убедиться, что эффективное сечение реакции $asm_s\to b\sigma m_\sigma$, при которой частица после столкновения движется в направлении θ, φ к падающему пучку в телесном угле $d\Omega$ (углы измеряются в системе центра инерции), определяется через амплитуду реакции формулой

$$d\sigma_{b\sigma m_\sigma;\, asm_s}(\theta, \varphi) = \left| F^{b\sigma m_\sigma}_{asm_s} \right|^2 d\Omega. \qquad (60,13)$$

Если падающие частицы поляризованы и фиксируются спины и поляризация частиц, возникающих в результате реакции, то эффективное сечение реакции, вообще говоря, зависит от азимутального угла φ (см. главу X).

Эффективные сечения реакции $as \longrightarrow b\sigma$ с неполяризованными частицами получаются из (60,13) усреднением по начальным спиновым состояниям и суммированием по конечным состояниям:

$$d\sigma_{b\sigma;as}(\theta) = (2s+1)^{-1} \sum_{m_s, m_\sigma} d\sigma_{b\sigma m_\sigma; asm_s}(\theta, \varphi). \qquad (60,14)$$

Как будет показано ниже, сечение (60,14) не зависит от угла φ.

Эксперимент часто производится без фиксирования спина каналов. Тогда для сравнения с экспериментальными данными надо усреднить (60,14) по возможным значениям s и суммировать по всем возможным значениям σ. Если I и i — спины начального ядра и падающей частицы, а I' и i' — спины конечного ядра и вылетающей частицы, то

$$d\sigma_{ba} = \sum_{s=|I-i|}^{I+i} \; \sum_{\sigma=|I'-i'|}^{I+i} g(s)\, d\sigma_{b\sigma,as}, \qquad (60,15)$$

где

$$g(s) = \frac{(2s+1)}{(2I+1)(2i+1)}$$

— статистический вес.

Подставляя (60,11) в (60,13), получим:

$$d\sigma_{b\sigma,as} = \left\{(2s+1)\, k_a^2\right\}^{-1} \sum_{J_1 l_1 \lambda_1 J_2 l_2 \lambda_2} i^{-l_1+\lambda_1+l_2-\lambda_2} \left(\delta_{ba}\delta_{\lambda_1 l_1}\delta_{\sigma s} - S^{J_1}_{b\lambda_1\sigma, al_1 s}\right)^* \times$$
$$\times \left(\delta_{ba}\delta_{\lambda_2 l_2}\delta_{\sigma s} - S^{J_2}_{b\lambda_2\sigma, al_2 s}\right) K(J_1\lambda_1 l_1;\, J_2\lambda_2 l_2;\, \sigma s;\, \theta)\, d\Omega, \qquad (60,16)$$

где

$$K(J_1\lambda_1 l_1;\; J_2\lambda_2 l_2;\; \sigma s;\; \theta) \equiv$$
$$\equiv \pi (2l_1+1)(2l_2+1) \sum_{m_s m_\sigma} (l_1 s 0 m_s \mid J_1 m_s)(l_2 s 0 m_s \mid J_2 m_s) \times$$
$$\times (\lambda_1 \sigma, m_s - m_\sigma, m_\sigma \mid J_1 m_s) \times$$
$$\times (\lambda_2 \sigma, m_s - m_\sigma, m_\sigma \mid J_2 m_s)\, Y^*_{\lambda_1 m_s - m_\sigma}(\theta, \varphi)\, Y_{\lambda_2 m_s - m_\sigma}(\theta, \varphi). \qquad (60,17)$$

— величина, не зависящая от природы каналов и динамики столкновения, т. е. не зависящая от матрицы рассеяния. Учитывая равенство

$$Y^*_{\lambda_1 M}(\theta, \varphi)\, Y_{\lambda_2 M}(\theta, \varphi) = (-1)^M \sum_L \sqrt{\frac{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)}{4\pi(2L+1)}} (\lambda_1\lambda_2 00 \mid L0) \times$$
$$\times (\lambda_1\lambda_2, -M, M \mid L0) Y_{L0}(\theta), \qquad (60,18)$$

мы убедимся, что величина $K(J_1\lambda_1 l_1; J_2\lambda_2 l_2; \sigma s; \theta)$ зависит только от угла θ и не зависит от угла φ.

При выводе соотношений этого параграфа не делалось никаких предположений относительно механизма реакций; поэтому полученные выражения справедливы для всех возможных столкновений, при которых до и после столкновения существуют по две частицы.

Рассмотрим теперь некоторые выводы об угловом распределении продуктов ядерных реакций, вытекающие из выведенных нами выше формул для частных случаев.

Предположим, например, что энергия относительного движения соответствует значению энергии изолированного резонанса составного ядра. В этом случае реакция проходит через одно квантовое состояние составного ядра. Поскольку свойства этого состояния не зависят от способа его возбуждения, то распад ядра (как было показано в § 58) не зависит от способа его возбуждения. Далее каждое такое состояние имеет вполне определенную четность. Поэтому при преобразовании инверсии $(\theta, \varphi \to \theta - \pi, \varphi + \pi)$ амплитуда реакции (60,11) должна удовлетворять соотношению

$$F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s}(\theta - \pi, \varphi + \pi) = \pm F^{b\sigma m_\sigma}_{a s m_s}(\theta, \varphi), \qquad (60,19)$$

где знак плюс относится к четным резонансным уровням, а знак минус — к нечетным.

Из (60,19) и (60,13) следует, что сечение реакции, усредненное по спиновым состояниям m_s, m_τ и не зависящее от азимутального угла, должно удовлетворять равенству

$$d\sigma_{b\sigma;\, as}(\pi - \theta) = d\sigma_{b\sigma;\, as}(\theta), \qquad (60,20)$$

т. е. дифференциальное сечение реакции должно быть симметричным относительно угла 90°. Такая симметрия должна иметь место не только для реакций, проходящих стадию составного ядра в области изолированного резонанса, но и во всех случаях, когда волновая функция, описывающая реакцию, имеет определенную четность, например при малых энергиях относительного движения, когда в реакции участвуют только состояния с $l = 0$. В этом случае четность состояния, соответствующего ядерной реакции, равна произведению четностей падающей частицы и ядра мишени.

Следствием равенства (60,20) является то, что с помощью измерения углового распределения продуктов реакции нельзя установить четность соответствующего состояния. В частности, нельзя определить четность изолированного резонансного уровня составного ядра.

Если энергия относительного движения попадает в область перекрывающихся резонансов с малой плотностью уровней, то налетающая частица возбуждает несколько состояний составного ядра. Фазовые соотношения между этими состояниями зависят от способа возбуждения. В этом случае предположение о независимости распада от способа возбуждения выполняется не всегда. Угловое распределение продуктов ядерных реакций может не удовлетворять равенству (60,20).

Наконец, если энергия относительного движения попадает в область перекрывающихся резонансов с большой плотностью состояний, то возможно использование статистического приближения, при котором предполагается беспорядочность распределения фазовых соотношений между отдельными состояниями ядра перед его распадом. Покажем, что в этом случае опять должно выполняться соотношение (60,20) для дифференциального сечения реакции.

При ядерной реакции $as \to b\sigma \neq as$ согласно (60,16) можно написать:

$$\frac{d\sigma_{b\sigma;\,as}}{d\Omega}=$$

$$=[(2S+1)\,k_a^2\,]^{-1}\sum_{\substack{J_1\lambda_1 l_1\\ J_2\lambda_2 l_2}} i^{-l_1+\lambda_1+l_2-\lambda_2}\,S^{*J_1}_{b\sigma\lambda_1;\,asl_1}\,S^{J_2}_{b\sigma\lambda_2;\,asl_2}\,K(J_1l_1\lambda_1;\,J_2l_2\lambda_2;\,\sigma s;\,\theta). \tag{60,21}$$

Используя результаты предыдущего параграфа (формулы (59,1), (59,2)) для матрицы рассеяния, можно написать:

$$S^{*J_1}_{b\sigma\lambda_1;\,as_1l}\,S^{J_2}_{b\sigma\lambda_2;\,as_2l}=$$

$$=\sum_{\mu_1\mu_2}\frac{4\gamma^{J_1}_{b\sigma\lambda_1\mu_1}\,\gamma^{J_1}_{asl_1\mu_1}\sqrt{\zeta_{b\sigma\lambda_1}\,\zeta_{asl_1}}\;\gamma^{J_2}_{b\sigma l_2\mu_2}\,\gamma^{J_2}_{as\lambda_2\mu_2}\sqrt{\zeta_{b\sigma\lambda_2}\,\zeta_{asl_2}}}{\left(\varepsilon_{\mu_1}-\varepsilon+\frac{i\Gamma_{\mu_1}}{2}\right)\left(\varepsilon_{\mu_2}-\varepsilon-i\frac{\Gamma_{\mu_2}}{2}\right)}. \tag{60,22}$$

Вследствие предположения о статистическом распределении знаков γ при суммированиях, выполняемых в (60,21) и (60,22), надо учитывать только члены с $l_1=l_2$, $\lambda_1=\lambda_2$, $J_2=J_1$ и $\mu_1=\mu_2$, так как остальные слагаемые из-за беспорядочного распределения знаков будут вносить малый вклад. Таким образом при выполнении статистического приближения

$$\frac{d\sigma_{b\sigma;\,as}}{d\Omega}=\frac{4}{(2s+1)\,k_a^2}\sum_{Jb\lambda\mu}\frac{\zeta_{b\sigma\lambda}\,\zeta_{asl}\,(\gamma_{asl\mu})^2\,(\gamma_{b\sigma\lambda\mu})^2}{(\varepsilon_\mu-\varepsilon)^2+\frac{\Gamma_\mu^2}{4}}\,K(J\lambda l;\,J\lambda l;\,s\sigma;\,\theta) \tag{60,23}$$

Учитывая (60,17) и (60,18), мы убедимся, что $K(J\lambda l;\,J\lambda l;\,s\sigma;\,\theta)$ будет содержать только сферические функции $Y_{L0}(\theta)$ для четных значений $L=0,\ 2,\ \ldots$ Таким образом, угловое распределение продуктов реакции (60,23) должно быть симметричным относительно угла 90°. Отсутствие такой симметрии в изучаемой реакции (например, значительная направленность вперед) будет указывать на то, что статистическое предположение, приводящее к уравнению (60,23), не выполняется в такой реакции. Сечение упругого рассеяния, проходящего через стадию составного ядра, вычислить в общем виде не удается, так как при условии $\{b\sigma\lambda\}=\{asl\}$ в суммах (60,21), (60,22) имеются положительные слагаемые даже без выполнения условий $\mu_1=\mu_2$, $J_1=J_2$. Однако общее сечение упругого рассеяния, проходящего через стадию составного ядра, очень мало (при не слишком малых энергиях), поэтому детали углового распределения в таком рассеянии несущественны.

Кроме общих следствий о наличии или отсутствии симметрии относительно угла 90° в угловом распределении продуктов ядерных реакций можно в некоторых случаях указать более определенное суждение об угловом распределении, если известны некоторые данные о механизме ядерной реакции.

В плоской волне, которая входит в волновую функцию начального состояния, представлены все орбитальные моменты количества движения $\hbar l$. Угловое распределение продуктов ядерной реакции согласно (60,11) и (60,13) определяется теми орбитальными моментами количества движения $\hbar l'$, которые участвуют в данной реакции. Предположим, для простоты, что в реакции участвует только состояние, соответствующее моменту $\hbar L$ в падающей волне. Это состояние будет иметь вполне определенную четность, определяемую равенством $(-1)^L \Pi_l \Pi_i$, где Π_i и Π_l соответствуют внутренним четностям налетающей частицы и ядра. В этом случае в силу сказанного выше угловое распределение продуктов реакции должно быть симметричным относительно угла 90°. Далее можно доказать, что угловое распределение продуктов реакции будет выражаться четным полиномом от $\cos\theta$ степени не выше $2L$.

Для доказательства этого утверждения запишем часть функции начального состояния, соответствующую моменту $\hbar L$, в следующем сокращенном виде:

$$\Psi_\alpha = AY_{Lm}(\theta_a, \varphi_a)\,\psi_{sm_s}(\xi_a), \tag{60,24}$$

где A определяет радиальную зависимость волновой функции во входном канале; ψ_{sm_s} — нормированная волновая функция, определяющая спин канала, его проекцию на выделенное направление и внутренние состояния частицы и ядра. Согласно (60,10) волновую функцию в выходном канале b можно тогда записать в виде

$$\Psi_b = B\sum_{m_\sigma} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\theta_b, \varphi_b)\,\psi_{\sigma m_\sigma}(\xi_b), \quad m = m_s - m_\sigma. \tag{60,25}$$

Если выбрать начальную систему координат так, чтобы ось z совпадала с направлением относительного движения частиц во входном канале, то $m=0$ и дифференциальное сечение реакции, усредненное по проекциям спина m_s входного канала, может быть записано в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathrm{const}\sum_{m_\sigma, m_s} |F^{L0}_{m_\sigma m_s}(\theta_b, \varphi_b)|^2. \tag{60,26}$$

Доказательство указанного выше утверждения о свойствах углового распределения продуктов реакции основано на инвариантности выражения (60,26) относительно вращения системы координат [45]. Введем новую систему координат, повернутую относительно первоначальной. Значения координат в новой системе будем отмечать штрихами. Тогда согласно приложению I, § Е, если $D^J_{mm'}$ — матричные элементы неприводимого представления трехмерной группы вращений, то при указанном переходе к штрихованной системе координат волновые функции преобразуются согласно равенствам

$$Y_{Lm'}(\theta', \varphi') = \sum_{m} D^{L}_{m'm} Y_{Lm}(\theta, \varphi), \qquad (60,27)$$

$$\psi_{sm'_s}(\xi') = \sum_{m_s} D^{s}_{m'_s m_s} \psi_{sm_s}(\xi). \qquad (60,28)$$

Рассмотрим теперь падающую волну в новой системе координат:

$$\Psi'_a = A Y_{Lm'}(\theta'_a, \varphi'_a)\, \varphi_{sm'_s}(\xi'_a). \qquad (60,24')$$

Тогда волновая функция в выходном канале в этой же системе координат будет иметь вид

$$\Psi'_b = B \sum_{m'_\sigma} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\theta'_b, \varphi'_b)\, \psi_{\sigma m'_\sigma}(\xi'_b), \qquad m' = m'_s - m'_\sigma. \qquad (60,25')$$

Вследствие физической эквивалентности обеих систем координат амплитуды реакции в (60,25) и (60,25') должны быть одинаковыми функциями от своих переменных.

Пользуясь соотношениями (60,27) и (60,28), представим функцию (60,24') как суперпозицию функций (60,24):

$$\Psi'_a = A \sum_{mm_s} D^{L}_{m'm} D^{s}_{m'_s m_s} Y_{Lm}(\theta_a, \varphi_a)\, \psi_{sm_s}(\xi_a).$$

Волновые функции в выходном канале (60,25') должны выражаться линейной комбинацией функции (60,25) с теми же самыми коэффициентами, т. е.

$$\Psi'_b = B \sum_{mm_s} D^{L}_{m'm} D^{s}_{m'_s m_s} \sum_{m_\sigma} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\theta_b, \varphi_b)\, \psi_{\sigma m_\sigma}(\xi_b). \qquad (60,29)$$

Приравнивая (60,29) и (60,25') и используя равенство

$$\psi_{\sigma m'_\sigma}(\xi'_\sigma) = \sum_{m_\sigma} D^{\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} \psi_{\sigma m_\sigma}(\xi_\sigma),$$

получим, сравнивая коэффициенты при одинаковых $\psi_{\sigma m_\sigma}$, следующее равенство:

$$\sum_{m'_\sigma} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\theta'_b, \varphi'_b)\, D^{\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} = \sum_{m,\, m_s} D^{L}_{m'm} D^{s}_{m'_s m_s} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\theta_b, \varphi_b). \qquad (60,30)$$

Умножая это равенство на $\overset{*}{D}{}^{\sigma}_{m''_\sigma m_\sigma}$ и суммируя по m_σ, получим с учетом соотношения

$$\sum_{m_\sigma} \overset{*}{D}{}^{\sigma}_{m''_\sigma m_\sigma} D^{\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} = \delta_{m''_\sigma m'_\sigma} \tag{60,31}$$

правило преобразования амплитуд реакции при вращении системы координат:

$$F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\theta'_b, \varphi'_b) = \sum_{m\, m_s\, m_\sigma} D^{L}_{m'm} D^{s}_{m'_s m_s} \overset{*}{D}{}^{\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\theta_b, \varphi_b) \tag{60,32}$$

или

$$F^{(Lm)}_{m_\sigma m_s}(\theta_b, \varphi_b) = \sum_{m'\, m'_s\, m'_\sigma} \overset{*}{D}{}^{L}_{m'm} \overset{*}{D}{}^{s}_{m'_s m_s} D^{\sigma}_{m'_\sigma m_\sigma} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\theta'_b, \varphi'_b),$$

$$m' = m'_s - m'_\sigma.$$

Подстановка (60,32) в (60,26) дает после использования условий типа (60,31):

$$\frac{d\sigma(\theta_b, \varphi_b)}{d\Omega} = \mathrm{const} \sum_{m'} \overset{*}{D}{}^{L}_{m'0} D^{L}_{m'0} \sum_{m'_\sigma m'_s} F^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\theta'_b, \varphi'_b) \overset{*}{F}{}^{(Lm')}_{m'_\sigma m'_s}(\theta'_b, \varphi'_b). \tag{60,33}$$

Если выбрать штрихованную систему координат так, чтобы $\theta'_b = \varphi'_b = 0$, то

$$D^{L}_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\, Y_{Lm}(\theta_b, \varphi_b).$$

Учитывая это равенство, можно, применяя теорему о сложении сферических функций (60,18), переписать (60,33) в окончательном виде, выражая сферические функции $Y_{L0}(\theta_b)$ через полиномы Лежандра:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathrm{const} \sum_{m'_\sigma m'_s} F^{(L0)}_{m'_\sigma m'_s}(0, 0) \overset{*}{F}{}^{(L0)}_{m'_\sigma m'_s}(0, 0) \sum_{m'} \overset{*}{Y}_{Lm'}(\theta_b, \varphi_b) Y_{Lm'}(\theta_b, \varphi_b) =$$

$$= \mathrm{const} \sum_{J=0}^{2L} d(J) P_J(\cos\theta_b), \tag{60,34}$$

где $d(J) = \sum_{m'} (LL00 \mid J0)(LL, -m', m' \mid J0)$. Равенство (60,34) доказывает сформулированное выше утверждение.

Из (60,34) следует, что если в реакции несущественны составляющие падающей волны с угловыми моментами, превышающими $\hbar L$, то угловое распределение продуктов реакции (в системе центра инерции) будет выражаться полиномом от $\cos\theta_b$ степени, не превышающей $2L$. При этом, если в реакции участвуют орбитальные моменты, соответствующие разной четности, то из-за интерференции в дифференциальном сечении реакции могут присутствовать нечетные степени $\cos\theta$.