## ГЛАВА IX*

# ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

## § 62. Матрицы рассеяния $S$ и $T$

Общий случай рассеяния, включающий наряду с упругим неупругое рассеяние и ядерные реакции, удобно изучать используя формализм, развитый Швингером и Липманом [1]. Удобство формализма Швингера и Липмана проявляется особенно в тех случаях, когда нельзя использовать обычную теорию возмущений, например в теории ядерных взаимодействий.

В общей теории рассеяния исследуется изменение с течением времени состояния системы, состоящей из двух взаимодействующих частей. Волновая функция $\Psi$ такой системы удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{62,1}$$

в котором оператор $H$ представляется в виде сумм двух гамильтонианов

$$H = H_0 + H_1, \tag{62,2}$$

где $H_0$ — оператор Гамильтона двух бесконечно удаленных частей системы; $H_1$ — оператор взаимодействия обеих частей системы, стремящийся к нулю, когда расстояние между ними стремится к бесконечности.

Вначале мы предположим, что стремление $H_1$ к нулю с увеличением расстояния между подсистемами происходит так, что

$$\lim r^{2+\varepsilon} H_1(r) \longrightarrow 0$$

при $r \longrightarrow \infty$ и любом малом положительном $\varepsilon$. Затем будет рассмотрен случай, когда $H_1(r)$ содержит слагаемые, убывающие более медленно при возрастании $r$.

С помощью унитарного преобразования

$$\Psi(t) = \exp\left\{-iH_0 \frac{t}{\hbar}\right\} \Phi(t) \tag{62,3}$$

уравнение (62,1) может быть записано в представлении взаимодействия

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = W(t)\,\Phi(t), \tag{62,4}$$

где

$$W(t) = \exp\left(iH_0 \frac{t}{\hbar}\right) H_1 \exp\left(-iH_0 \frac{t}{\hbar}\right). \tag{62,5}$$

Будем искать решение уравнения (62,4) в виде

$$\Phi(t) = U_+(t)\,\Phi(-\infty) = U_-(t)\,\Phi(\infty), \tag{62,6}$$

где $\Phi(-\infty)$ и $\Phi(\infty)$ — волновые функции соответственно начального и конечного состояний полной системы, а $U_+(t)$ и $U_-(t)$ — операторы, удовлетворяющие условию унитарности

$$U_+^\dagger(t)\,U_+(t) = U_-^\dagger(t)\,U_-(t) = 1 \tag{62,7}$$

и «начальным» условиям

$$U_+(-\infty) = U_-(\infty) = 1. \tag{62,8}$$

Подставляя (62,6) в (62,4), получим уравнения для операторов $U_+(t)$ и $U_-(t)$:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial U_+}{\partial t} &= W(t)\,U_+, \\ i\hbar \frac{\partial U_-}{\partial t} &= W(t)\,U_-. \end{aligned}\right\} \tag{62,9}$$

Уравнениям (62,9) вместе с начальными условиями (62,8) соответствуют интегральные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} U_+(t) &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} W(x)U_+(x)\,dx, \\ U_-(t) &= 1 + \frac{i}{\hbar}\int_{t}^{\infty} W(x)\,U_-(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{62,10}$$

Введем теперь собственные функции оператора $H_0$ с помощью уравнений:

$$H_0\Phi_a = E_a\Phi_a,$$

$$H_0\Phi_b = E_b\Phi_b.$$

Если предположить, что взаимодействие $H_1$ адиабатически включается и выключается соответственно при $t = -\infty$, $t = \infty$, т. е. если положить

$$H_1 = V\exp\left(-\eta \frac{|t|}{\hbar}\right), \tag{62,11}$$

то при $t=\pm\infty$, $H=H_0$; следовательно, собственные функции $\Phi_a$ и $\Phi_b$ при $t=\pm\infty$ будут и собственными функциями полного оператора $H$. В конечных формулах мы всегда будем переходить к пределу $\eta\longrightarrow 0$.

Начальное состояние $\Phi_a$ может определяться волновым вектором $\boldsymbol{k}_a$ плоской волны, соответствующей относительному движению сталкивающихся подсистем, и их внутренними состояниями. Состояние относительного движения подсистем можно также представить в виде сходящихся и расходящихся парциальных волн, соответствующих определенному полному моменту количества движения ($s$-, $p$-, $d$-, ... волны). Особенно удобно представлять начальное состояние системы таким способом при исследовании рассеяния в центрально-симметричном поле. В этом случае полный момент системы сохраняется, и если не изменяются внутренние состояния подсистем, то процессу рассеяния будет соответствовать диагональная матрица рассеяния, т. е. волна с данным квантовым числом $l$ остается $l$-волной, изменяется лишь ее фаза.

Если в начальный момент времени ($t=-\infty$) система находилась в состоянии $\Phi_a$, то к моменту $t=\infty$ состояние будет определяться функцией

$$\Psi_a^+=S\Phi_a, \tag{62,12}$$

где $S=U_+(\infty)$. Поэтому вероятность перехода из состояния $a$ в состояние $b$ будет равна

$$w_{ba}=|(\Phi_b,\ \Psi_a^+)|^2=|(\Phi_b,\ S\Phi_a)|^2\equiv|S_{ba}|^2. \tag{62,13}$$

Из (62,7) непосредственно следует унитарность оператора рассеяния $S$.

Введем новый оператор рассеяния

$$\mathcal{T}=S-1. \tag{62,14}$$

Тогда при $b\neq a$

$$w_{ba}=|\mathcal{T}_{ba}|^2\equiv|(\Phi_b,\ \mathcal{T}\Phi_a)|^2. \tag{62,15}$$

Оператор рассеяния $\mathcal{T}$ согласно (62,10) определяется интегральным уравнением

$$\mathcal{T}=-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}W(t)\,U_+(t)\,dt. \tag{62,16}$$

Подставляя (62,16) в (62,15) и учитывая (62,5) и (62,11), получим:

$$\mathcal{T}_{ba}=-\frac{i}{\hbar}(\Phi_b,\ V\varphi_a^+(E_b)), \tag{62,17}$$

где

$$\varphi_a^+(E_b)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i(E_b-H_0)\frac{t}{\hbar}\right\}e^{-\eta\frac{|t|}{\hbar}}U_+(t)\,dt\,\Phi_a. \tag{62,18}$$

Оператор, эрмитовски сопряженный к $\mathcal{T}$, согласно (62,14) может быть выражен через $S^\dagger = S^{-1}$ с помощью равенства

$$\mathcal{T}^\dagger = S^\dagger - 1 = S^{-1} - 1.$$

Используя (62,6), имеем:

$$\Phi(-\infty) = U_-(-\infty)\,\Phi(\infty),$$

поэтому можно положить $S^{-1} = U_-(-\infty)$. Теперь, учитывая (62,10) получаем:

$$\mathcal{T}^\dagger_{ba} \equiv (\Phi_b,\ \mathcal{T}^\dagger\Phi_a) = \frac{i}{\hbar}(\Phi_b,\ V\varphi_a^-(E_b)), \qquad (62,19)$$

где

$$\varphi_a^-(E_b) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(E_b - H_0)\frac{t}{\hbar}\right\} e^{-\eta\frac{|t|}{\hbar}} U_-(t)\,dt\,\Phi_a. \qquad (62,20)$$

Из (62,19) следует, что

$$\mathcal{T}_{ab} = -\frac{i}{\hbar}(\varphi_a^-(E_b),\ V\Phi_b).$$

Заменяя в этом равенстве $a$ на $b$ и $b$ на $a$, можем написать:

$$\mathcal{T}_{ba} = -\frac{i}{\hbar}(\varphi_b^-(E_a),\ V\Phi_a). \qquad (62,21)$$

Таким образом, матрица $\mathcal{T}_{ba}$ может быть выражена в двух эквивалентных формах (62,17) и (62,21).

Согласно определению $\Phi_a \equiv \Phi(-\infty)$, поэтому равенство (62,6) принимает вид

$$\Phi_a(t) = U_+(t)\,\Phi_a.$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\exp\left\{-iH_0\frac{t}{\hbar}\right\}$, мы согласно (62,3) перейдем к шредингеровскому представлению волновой функции

$$e^{-\frac{iH_0t}{\hbar}} U_\pm(t)\,\Phi_a = \Psi^\pm(t) = \Psi_a^\pm e^{-iE_a\frac{t}{\hbar}}, \qquad (62,22)$$

где $\Psi_a^\pm$ уже не зависят от времени.

Подставляя полученное равенство в (62,18), после простых преобразований находим:

$$\varphi_a^+(E_b) = 2\pi\hbar\delta(E_b - E_a)\,\Psi_a^+. \qquad (62,23)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$\varphi_b^-(E_a) = 2\pi\hbar\delta(E_b - E_a)\,\Psi_b^-. \qquad (62,24)$$

Введем новую матрицу рассеяния $T_{ba}$ с помощью соотношения

$$\mathcal{T}_{ba} = -2\pi i \delta(E_b - E_a) T_{ba}; \tag{62,25}$$

тогда, используя (62,17), (62,23), (62,21) и (62,24), можно написать:

$$T_{ba} = (\Phi_b, V\Psi_a^+) = (\Psi_b^-, V\Phi_a). \tag{62,26}$$

Из (62,25) следует, что матрица $T_{ba}$ соответствует состояниям $a$ и $b$, относящимся к одной и той же энергетической поверхности.

Выведем уравнения, определяющие функции $\Psi_a^+$ и $\Psi_b^-$. Пользуясь (62,10), находим:

$$U_+(t)\Phi_a = \Phi_a - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} W(x) U_+(x)\, dx\, \Phi_a.$$

Умножим далее обе части этого равенства на $\exp\left\{i(E_b - H_0)\frac{t}{\hbar}\right\}$ и проинтегрируем по $t$ в бесконечных пределах $(-\infty, \infty)$. Тогда, учитывая (62,18), имеем:

$$\varphi_a^+(E_b) = 2\pi\hbar\delta(E_b - E_a)\Phi_a - \frac{i}{\hbar} I,$$

где

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dx \exp\left\{i(E_b - H_0)\frac{t}{\hbar}\right\} W(x) U_+(x)\Phi_a.$$

Используя (62,5), (62,11) и (62,22), можно преобразовать $I$ к виду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{t} dx \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[(E_b - E_a)t + (H_0 - E_a)(x - t)]\right\} e^{-\frac{\eta|x|}{\hbar}} V\Psi_a^+.$$

Вводя новую переменную $\zeta = t - x$, изменяющуюся в пределах $(0, \infty)$, получим:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right\} \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_a - H_0 + i\eta)\zeta\right\} V\Psi_a^+ d\zeta =$$
$$= -\frac{2\pi\hbar^2\delta(E_b - E_a)}{i(E_a - H_0 + i\eta)} V\Psi_a^+.$$

Подставляя это значение в выражение для $\varphi_a^+(E_b)$ и учитывая (62,23), получаем интегральное уравнение, определяющее $\Psi_a^+$:

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + (E_a - H_0 + i\eta)^{-1} V\Psi_a^+. \tag{62,27а}$$

Аналогичным образом находим интегральное уравнение, определяющее волновую функцию $\Psi_a^-$:

$$\Psi_a^- = \Phi_a + (E_a - H_0 - i\eta)^{-1} V\Psi_a^-. \tag{62,27б}$$

Таким образом, решая одно из интегральных уравнений (62,27а) или (62,27б), мы определим функцию $\Psi_a^+$ или $\Psi_a^-$ и с помощью (62,26) сможем вычислить матрицу рассеяния $T_{ba}$.

В частном случае упругого рассеяния частицы массы $\mu$ в потенциальном поле $V(\boldsymbol{r})$, гамильтониан $H_0$ имеет вид $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$, а уравнение (62,27а) сведется к интегральному уравнению

$$\Psi_a^+ = \Phi_a - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} V(\boldsymbol{r}')\Psi_a^*(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'.$$

Вероятность перехода $\Phi_a \longrightarrow \Phi_b \neq \Phi_a$ за интервал времени от нуля до $t$ будет определяться согласно (62,10) равенством

$$W_{ba} = |(\Phi_b, [U_+(t) - 1]\Phi_a)|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left|\left(\Phi_b, \int_0^t W(x)U_+(x)\,dx\,\Phi_a\right)\right|^2.$$

Подставляя из (62,5)

$$W(x) = \exp\left(\frac{iH_0x}{\hbar}\right)e^{-\eta\frac{x}{\hbar}}V\exp\left(-\frac{iH_0x}{\hbar}\right)$$

и учитывая, что согласно (62,22)

$$e^{-\frac{iH_0x}{\hbar}}U_+(x)\Phi_a = \Psi_a^+ e^{\frac{-iE_0x}{\hbar}},$$

получим:

$$W_{ba}(t) = \frac{1}{\hbar^2}|(\Phi_b, V\Psi_a^+)|^2\left|\int_0^t \exp\left\{i\frac{(E_b - E_a + i\eta)x}{\hbar}\right\}dx\right|^2.$$

Последний интеграл надо вычислять при условии $\eta \longrightarrow 0$. Учитывая, что

$$\frac{1-\cos\zeta t}{\pi t\zeta^2} = \delta(\zeta), \qquad \text{если } t \gg 1,$$

находим:

$$W_{ba}(t) = \frac{2\pi}{\hbar}t\,|(\Phi_b, V\Psi_a^+)|^2\,\delta(E_b - E_a).$$

Таким образом, вероятность перехода в единицу времени ($P_{ba}$) определится формулой

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}|(\Phi_b, V\Psi_a^+)|^2\delta(E_b - E_a),$$

или, учитывая (62,26), имеем:

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}|T_{ba}|^2\,\delta(E_b - E_a). \tag{62,28}$$

Выражение (62,28) указывает, что переходы могут происходить только между состояниями равной энергии. Если матричный элемент (62,26) вычисляется в первом борновском приближении, то (62,28) совпадает с обычным выражением для вероятности перехода в единицу времени между состояниями $a$ и $b$ под влиянием возмущения $V$.

Формула (62,28) определяет вероятность перехода в единицу времени из состояния $a$ в состояние $b$, отличающееся от состояния $a$. Более общая формула вероятности перехода в единицу времени из состояния $a$ в любое состояние $b$ (включающая и случай $a=b$) имеет вид [2]:

$$P_{ba}=\frac{2}{\hbar}(\Phi_b,\Phi_a)^*\operatorname{Im}T_{ba}+\frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_a-E_b)\,|T_{ba}|^2. \tag{62,28a}$$

Легко показать, что суммируя (интегрируя) (62,28а) по всем состояниям $b$ (включая и случай $b=a$) и учитывая то, что

$$\sum_b P_{ba}=\sum_b\frac{dW(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_b W_b(t)=0,\ \text{так как}\ \sum_b W_{ba}(t)=1,$$

получим очень полезное равенство

$$\pi\sum_b|T_{ba}|^2\,\delta(E_a-E_b)=-\operatorname{Im}T_{aa}, \tag{62,28б}$$

лежащее в основе теоремы, связывающей мнимую часть амплитуды рассеяния вперед с полным сечением рассеяния.

Итак, формулами (62,26) — (62,28) временная задача рассеяния сведена к стационарной задаче. Введение малой мнимой величины $i\eta$ в уравнение (62,27) позволяет отделить решения, соответствующие уходящим волнам ($\Psi^+$), от решений, соответствующих приходящим волнам, и эквивалентно адиабатическому включению и выключению взаимодействия в теории рассеяния, зависящей от времени, или определенному усреднению начального и конечного состояний, предложенному Гелл-Маном и Гольдбергом [3] и [4].

Матрицу рассеяния $T_{ba}$ можно вычислять вариационным методом, так как она равна экстремальному значению функционала

$$\begin{aligned}\{T_{ba}\}&=\left(\left[\Phi_b-\frac{1}{2}\{\Psi_b^- -(E-H_0-i\eta)^{-1}V\Psi_b^-\}\right],\ V\Psi_a^+\right)+\\&+\left(\Psi_b^-,\ V\left[\Phi_a-\frac{1}{2}\{\Psi_a^+-(E-H_0+i\eta)^{-1}V\Psi_a^+\}\right]\right)\equiv(\Phi_b,\ V\Psi_a^+)+\\&+(\Psi_b^-,\ V\Phi_a)-(\Psi_b^-,\ V\Psi_a^+)+(\Psi_b^-,\ V(E-H_0+i\eta)^{-1}V\Psi_a^+)\end{aligned} \tag{62,29}$$

при независимом варьировании $\Psi_a^+$ и $\Psi_b^-$.

В самом деле, из условия экстремума

$$\begin{aligned}\delta\{T_{ba}\}&=([\Phi_b-\Psi_b^-+(E-H_0-i\eta)^{-1}V\Psi_b^-],\ V\delta\Psi_a^+)+\\&+(\delta\Psi_b^-,\ V[\Phi_a-\Psi_a^++(E-H_0+i\eta)^{-1}V\Psi_a^+])=0\end{aligned}$$

следуют два интегральных уравнения

$$\Phi_a = \Psi_a^+ - (E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Psi_a^+,$$
$$\Phi_b = \Psi_b^- - (E - H_0 - i\eta)^{-1} V\Psi_b^-,$$

совпадающих с (62,27) и приводящих к экстремальному значению функционала (62,29):

$$\{T_{ba}\}_{\text{экстр}} = \frac{1}{2}\{(\Phi_b, V\Psi_a^+) + (\Psi_b^-, V\Phi_a)\} = T_{ba}.$$

Если ввести новые операторы $\Omega^+$ и $\Omega^-$ с помощью соотношений

$$\Psi_a^+ = \Omega^+\Phi_a \quad \text{и} \quad \Psi_b^- = (\Omega^-)^\dagger \Psi_b, \tag{62,30}$$

то интегральные уравнения (62,27а), (62,27б) будут соответствовать операторным уравнениям:

$$\Omega^+ = 1 + (E - H_0 + i\eta)^{-1} V\Omega^+, \tag{62,31}$$
$$(\Omega^-)^\dagger = 1 + (E - H_0 - i\eta)^{-1} V(\Omega^-)^\dagger. \tag{62,32}$$

Учитывая эрмитовость операторов $H_0$ и $V$, запишем уравнение (62,32) в виде

$$\Omega^- = 1 + \Omega^- V(E - H_0 + i\eta)^{-1}. \tag{62,32а}$$

Операторные уравнения (62,31) и (62,32а) можно заменить уравнениями:

$$\Omega^+ = 1 + (E - H + i\eta)^{-1} V, \tag{62,33}$$
$$\Omega^- = 1 + V(E - H + i\eta)^{-1}, \tag{62,34}$$

где $H = H_0 + V$. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой, если принять во внимание операторное тождество

$$(E - H_0 + i\eta)^{-1} + (E - H_0 + i\eta)^{-1} V(E - H_0 - V + i\eta)^{-1} \equiv$$
$$\equiv (E - H + i\eta)^{-1}.$$

Используя (62,30), можно представить матричный элемент (62,26) в виде

$$T_{ba} = (\Phi_b, V\Omega^+\Phi_a) = (\Phi_b, \Omega^- V\Phi_a), \tag{62,35}$$

или

$$T_{ba} = (\Phi_b, T\Phi_a), \tag{62,35а}$$

где

$$T = V\Omega^+ = \Omega^- V. \tag{62,35б}$$

Согласно (62,31) оператор рассеяния $T$ определяется операторным уравнением

$$T = V + V(E - H_0 + i\eta)^{-1} T. \tag{62,36}$$

Докажем теперь использованную в § 51 связь между матричными элементами прямого и обращенного во времени переходов

$$T_{ba}=T_{-a,\ -b}. \qquad (62,37)$$

Для доказательства вспомним (см. § 51), что по определению состояние $\Phi_{-a}$, обращенное по времени к состоянию $\Phi_a$, получается с помощью оператора обращения времени $O$

$$\Phi_{-a}=O\Phi_a^*, \qquad (62,38)$$

где унитарный оператор $O$ определяется равенством

$$O^{-1}HO=O^{\dagger}HO=H^*. \qquad (62,39)$$

Здесь $H$ — оператор Гамильтона системы.

Используя (62,38) и унитарность оператора обращения времени, преобразуем матричный элемент (62,35) следующим образом:

$$T_{ba}\equiv(\Phi_b,\ \Omega^- V\Phi_a)=(\Phi^*_{-b},\ O^{\dagger}\Omega^- OO^{\dagger}VO\Phi^*_{-a}). \qquad (62,40)$$

Из (62,39) и (62,34) следует при учете эрмитовости $H$ и $V$, что

$$O^{\dagger}\Omega^- O=1+V^*(E-H^*+i\eta)^{-1}=(\tilde{\Omega}^+).$$

Преобразуя с помощью этого равенства выражение (62,40), получим искомый результат:

$$T_{ba}=(\Phi^*_{-b},\ (\Omega^+)^{\dagger}\ V\Phi^*_{-a})=(\Phi_{-a},\ V\Omega^+\Phi_{-b})=T_{-a,\ -b}.$$

Для установления связи матрицы $T_{ba}$ с амплитудой рассеяния рассмотрим интегральное уравнение (62,27а):

$$\Psi_a^+=\Phi_a+(E_a-H_0+i\eta)^{-1}\ V\Psi_a^+,$$

определяющее точную волновую функцию задачи рассеяния. Оператор $H_0$ в (62,27а) может быть представлен в виде суммы оператора кинетической энергии относительного движения ядра и рассеиваемой частицы и оператора, определяющего внутренние состояния ядра и частицы. Волновые функции начального ($\Phi_a$) и конечного ($\Phi_b$) состояний системы, нормированные на поток, равный по величине скорости относительного движения, будут иметь вид

$$\Phi_a=\varphi_a(\xi)\exp(i\boldsymbol{k}_a\boldsymbol{r}),$$
$$\Phi_b=\varphi_b(\xi)\exp(i\boldsymbol{k}_b\boldsymbol{r}),$$

где $\varphi_a(\xi)$ и $\varphi_b(\xi)$ — волновые функции, определяющие внутренние состояния (включая и спины) ядра и частицы.

Начальная и конечная энергии системы могут быть записаны соответственно в виде

$$E_a=E_A+\frac{\hbar^2k_a^2}{2\mu},\quad E_b=E_B+\frac{\hbar^2k_b^2}{2\mu}, \qquad (62,41)$$

где $\mu$ — приведенная масса; $E_A$ и $E_B$ — соответственно начальная и конечная внутренние энергии.

Перепишем интегральное уравнение (62,27а) в более явном виде:

$$\Psi_a(\boldsymbol{r}, \xi) = \Phi_a(\boldsymbol{r}, \xi) + \int G(\boldsymbol{r}\xi; \boldsymbol{r}'\xi') V(\boldsymbol{r}', \xi') \Psi_a(\boldsymbol{r}', \xi') d\xi' d\boldsymbol{r}'. \quad (62,42)$$

В этом уравнении $G(\boldsymbol{r}\xi; \boldsymbol{r}'\xi')$ — функция Грина оператора $H_0$, определяющаяся через его собственные функции

$$\chi_b = (2\pi)^{-3/2} \varphi_b(\xi) \exp(i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}), \quad (62,43)$$

нормированные в смысле

$$\int \chi_{b'}^*(\boldsymbol{r}, \xi) \chi_b(\boldsymbol{r}, \xi)\, d\xi\, d\boldsymbol{r} = \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}') \delta_{bb'},$$

с помощью равенства

$$G(\boldsymbol{r}\xi; \boldsymbol{r}'\xi') = \sum_b \int \chi_b (E_a - H_0 + i\eta)^{-1} \chi_b^* d\boldsymbol{q}. \quad (62,44)$$

Учитывая, что

$$(E_a - H_0 + i\eta) \chi_b^* = \frac{\hbar^2}{2\mu} (k_b^2 - q^2 + i\eta') \chi_b^*,$$

где

$$k_b^2 \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E_A + \frac{\hbar^2 k_a^2}{2\mu} - E_B \right) = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_a - E_B),$$

и явный вид функций (62,43), перепишем (62,44) в виде

$$G = \frac{2\mu}{\hbar^2} \sum_b \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} \frac{\varphi_b(\xi) \varphi_b^*(\xi')}{k_b^2 - q^2 + i\eta'} \exp\{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\}.$$

Учитывая далее равенство

$$(2\pi)^{-3} \int \frac{\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{k}}{k_0^2 - k^2 + i\eta} = - \frac{\exp(ik_0 |\boldsymbol{x}|)}{4\pi |\boldsymbol{x}|},$$

получим окончательное выражение для функции Грина:

$$G(\boldsymbol{r}\xi; \boldsymbol{r}'\xi') = - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \sum_b \varphi_b(\xi) \varphi_b^*(\xi') \frac{\exp(ik_b |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \quad (62,45)$$

С помощью (62,45) преобразуем интегральное уравнение (62,42) к виду

$$\Psi_a(\boldsymbol{r}, \xi) = \Phi_a(\boldsymbol{r}, \xi) -$$
$$- \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \sum_b \varphi_b(\xi) \int \varphi_b^*(\xi') \frac{\exp(ik_b |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} V(\boldsymbol{r}', \xi') \Psi_a(\boldsymbol{r}', \xi') d\xi' d\boldsymbol{r}'. \quad (62,46)$$

При $r \to \infty$ $k_b |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \approx k_b r - \boldsymbol{k}_b \boldsymbol{r}'$, где $\boldsymbol{k}_b$ — волновой вектор в направлении радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$. Поэтому асимптотическое значение (62,46) при больших $r$ можно записать в виде

$$\Psi_a(\boldsymbol{r}, \xi) = \Phi_a(\boldsymbol{r}, \xi) + \sum_b A_{ba}\varphi_b(\xi)\frac{\exp(ik_b r)}{r}, \qquad (62,47)$$

где

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\int \varphi_b^*(\xi)\, e^{-i\boldsymbol{k}_b \boldsymbol{r}}\, V(\boldsymbol{r}, \xi)\, \Psi_a(\boldsymbol{r}, \xi)\, d\boldsymbol{r}\, d\xi$$

или

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}(\Phi_b,\ V\Psi_a) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}(\Phi_b,\ T\Phi_a). \qquad (62,48)$$

Равенство (62,48) определяет связь между амплитудой рассеяния из состояния $a$ в состояние $b$ и матрицей

$$T_{ba} = (\Phi_b,\ T\Phi_a).$$

Чтобы определить дифференциальное эффективное сечение рассеяния, достаточно учесть, что поток частиц в единицу телесного угла в направлении $\boldsymbol{k}_b$ выражается через амплитуду рассеяния простой формулой

$$\frac{\hbar k_b}{\mu}|A_{ba}|^2.$$

Разделив это выражение на плотность потока падающих частиц, получим искомое эффективное сечение

$$\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega} = \frac{k_b}{k_a}|A_{ba}|^2. \qquad (62,49)$$

## § 63. Эрмитовский оператор рассеяния

Введенный в предыдущем параграфе оператор $\mathcal{T}$ (или $T$) не является унитарным и эрмитовским. Покажем теперь, что можно ввести эрмитовский оператор рассеяния, который также позволяет решать любую задачу рассеяния.

Наряду с исследованными в предыдущем параграфе операторами $U_+(t)$, $U_-(t)$, $S \equiv U_+(\infty)$ и $S^{-1} \equiv U_-(-\infty)$, введем оператор

$$U_1(t) = U_+(t)\frac{2}{1+S} = U_-(t)\frac{2}{1+S^{-1}}. \qquad (63,1)$$

Поскольку операторы $S$ и $S^{-1}$ не зависят от времени, то оператор $U_1(t)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и $U_\pm(t)$, т. е.

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - W(t)\right]U_1(t) = 0. \qquad (63,2)$$