Интегральное уравнение (64,7) допускает точное решение для φ_a^+, поэтому матрица кулоновского рассеяния $T^{\text{к}}_{ba}$ (64,10) может быть вычислена точно. Тогда из экспериментальных данных по сечению рассеяния можно с помощью (64,2) и (64,8) определить матрицу $T^{\text{я}}_{ba}$. В частности, таким образом можно однозначно определить знак матрицы рассеяния $T^{\text{я}}_{ba}$, а следовательно, при малых энергиях, когда в рассеянии существенна только одна фаза, можно определить и знак фазы рассеяния, обусловленного чисто ядерным взаимодействием.

§ 65. Теория столкновений с перераспределением нуклонов

В предыдущих параграфах этой главы развивалась теория рассеяния, при котором не меняется состав сталкивающихся частиц, т. е. рассматривались реакции типа

$$a + A \to a^* + A^*,$$

при которых возможны лишь внутренние возбуждения сталкивающихся частиц без изменения их состава. Наряду с такими реакциями большое значение имеют реакции с изменением в результате столкновения состава частиц. К такого типа реакциям относятся, например, реакции срыва $A(d, p)B$ и $A(d, n)B$, реакции захвата $A(p, d)B$ и $A(n, d)$, которые будут рассмотрены в § 99—100.

При столкновении с перераспределением нуклонов система частиц описывается гамильтонианом H, который можно представить в двух видах:

$$H = H_a + V_a = H_b + V_b, \qquad (65,1)$$

где H_a и H_b — эрмитовские операторы, описывающие кинетическую энергию относительного движения и внутренние состояния соответственно сталкивающихся и разлетающихся частиц; V_a и V_b — операторы взаимодействия соответственно сталкивающихся и разлетающихся частиц. При этом начальное состояние описывается функцией Φ_a, удовлетворяющей уравнению

$$H_a\Phi_a = E_a\Phi_a,$$

а конечное состояние — функцией Φ_b, удовлетворяющей уравнению

$$H_b\Phi_b = E_b\Phi_b.$$

Согласно общей теории рассеяния (см. § 62) состояние системы с гамильтонианом $H = H_a + V_a$, соответствующее начальному состоянию Φ_a, определяется волновой функцией Ψ_a, удовлетворяющей интегральному уравнению

$$\Psi_a = \Phi_a + D_a^{-1}(\lambda)\, V_a\Psi_a, \qquad (65,2)$$

где

$$D_a^{-1}(\lambda) \equiv (\lambda - H_a)^{-1}, \quad \lambda \equiv E_a + i\eta.$$

Поскольку состояние системы, соответствующее столкновениям с перераспределением нуклонов, тоже определяется тем же гамильтонианом H, то интегральное уравнение (65,2) будет описывать рассеяние и в этом случае. Однако при рассеянии с перераспределением нуклонов удобно интегральное уравнение (65,2) переписать так, чтобы обратный оператор содержал не H_a, а оператор H_b; тогда при явном написании интегрального уравнения (65,2) можно было бы использовать полную систему собственных функций этого оператора, описывающих возможные состояния системы после столкновения. Для этой цели умножим (65,2) слева на $D_a = \lambda - H_a$; в результате получим:

$$(\lambda - H_a - V_a)\Psi_a = (\lambda - H_a)\Phi_a. \tag{65,3}$$

Принимая во внимание равенство $H = H_a + V_a = H_b + V_b$, перепишем (65,3) в виде

$$(\lambda - H_b - V_b)\Psi_a = (\lambda - H_b - (V_b - V_a))\Phi_a.$$

Умножая полученное равенство слева на $D_b^{-1} \equiv (\lambda - H_b)^{-1}$, получим интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (65,2):

$$\Psi_a = \Phi_a + D_b^{-1}V_b\Psi_a + D_b^{-1}(V_a - V_b)\Phi_a. \tag{65,2a}$$

С другой стороны, правую часть (65,3) можно преобразовать к виду

$$(\lambda - H_a)\Phi_a \equiv (E_a + i\eta - H_a)\Phi_a = i\eta\Phi_a,$$

если учесть, что Φ_a является собственной функцией оператора H_a. Тогда вместо (65,2а) получим тем же путем

$$\Psi_a = i\eta D_b^{-1}\Phi_a + D_b^{-1}V_b\Psi_a.$$

Используя полную систему функций оператора H_b, перепишем это уравнение в явном виде:

$$\Psi_a = i\eta \sum_b \frac{\Phi_b(\Phi_b, \Phi_a)}{E_a - E_b + i\eta} + \sum_b \frac{\Phi_b(\Phi_b, V_b\Psi_a)}{E_a - E_b + i\eta}. \tag{65,4}$$

После вычисления сумм в (65,4) (или интегралов, если конечные состояния принадлежат непрерывному спектру) надо перейти к пределу $\eta \to 0$. При этом первый член в (65,4) будет стремиться к нулю, если $E_a \neq E_b$, а при $E_a = E_b$ будет равен

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{E_a - \eta}^{E_a + \eta} \rho(E_b)\Phi_b(\Phi_b, \Phi_a)\,dE_b,$$

где $\rho(E_b)$ — число конечных состояний в единичном интервале энергии. В большинстве практических случаев подынтегральное выражение не содержит δ-функции от энергии и этот интеграл стремится к нулю [7]. Поэтому можно написать:

$$\Psi_a = \sum_b \frac{\Phi_b (\Phi_b, V_b \Psi_a)}{E_a - E_b + i\eta}.$$

Таким образом, вероятность того, что система, первоначально находившаяся в состоянии Φ_a, окажется в состоянии Φ_b, может быть записана в виде

$$|(\Phi_b, \Psi_a)|^2 = \frac{|(\Phi_b, V_b \Psi_a)|^2}{(E_a - E_b)^2 + \eta^2} \exp\left\{-2\eta \frac{t}{\hbar}\right\},$$

где множитель $\exp\left\{-2\eta \frac{t}{\hbar}\right\}$ учитывает то, что при $\eta \neq 0$ состояние Ψ_a не стационарно, а зависит от времени по закону $\exp\left\{-i(E_a + i\eta)\frac{t}{\hbar}\right\}$.

Вероятность перехода из состояния a в состояние b в единицу времени будет равна

$$P_{ba} = \lim_{\eta \to 0} \frac{\partial}{\partial t} |(\Phi_b, \Psi_a)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |(\Phi_b, V_b \Psi_a)|^2 \delta (E_a - E_b). \qquad (65,5)$$

При выводе этого выражения было использовано равенство

$$\lim_{\eta \to 0} \int \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} f(x)\, dx = \pi f(0).$$

Формула (65,5) позволяет вычислять вероятность перехода в единицу времени из состояния a в любое состояние b, отличающееся от состояния a другим составом частиц. Для практического вычисления этой вероятности (или соответствующего эффективного сечения рассеяния) надо предварительно решить интегральное уравнение (65,2).

Если исходить из интегрального уравнения для $H = H_b + V_b$, соответствующего конечному состоянию Φ_b, то

$$\Psi_b = \Phi_b + D_b^{-1} (\lambda^*) V_b \Psi_b. \qquad (65,6)$$

По аналогии с (65,2а) это уравнение можно преобразовать к виду

$$\Psi_b = \Phi_b + D_a^{-1} (\lambda^*) V_a \Psi_b + D^{-1} (\lambda^*) (V_b - V_a) \Phi_b. \qquad (65,7)$$

Вводя два оператора Ω_a и Ω_b с помощью соотношений

$$\Psi_a = \Omega_a \Phi_a \quad \text{и} \quad \Psi_b = \Omega^\dagger \Phi_b \qquad (65,8)$$

можно переписать интегральные уравнения

$$\Psi_a = \Phi_a + D_a^{-1} (\lambda) V_a \Psi_a,$$

$$\Psi_b = \Phi_b + D_b^{-1} (\lambda^*) V_b \Psi_b$$

в виде операторных равенств (см. (62,31) и (62,32)):

$$\Omega_a = 1 + D_a^{-1}(\lambda) V_a \Omega_a, \tag{65,9}$$

$$\Omega_a^\dagger = 1 + D_b^{-1}(\lambda^*) V_b \Omega_b^\dagger. \tag{65,10}$$

Заменим уравнение (65,10) эрмитовски сопряженным уравнением

$$\Omega_b = 1 + \Omega_b V_b D_b^{-1}(\lambda). \tag{65,10a}$$

Операторные уравнения (65,9) и (65,10a) эквивалентны (см. (62,33)) операторным уравнениям:

$$\Omega_a = 1 + [D_a(\lambda) - V_a]^{-1} V_a, \tag{65,11}$$

$$\Omega_b = 1 + V_b [D_b(\lambda) - V_b]^{-1}. \tag{65,12}$$

Умножая (65,11) слева на V_b, а (65,12) справа на V_a и учитывая равенства

$$D_a(\lambda) - V_a = D_b(\lambda) - V_b \quad \text{и} \quad V_b - V_a = -H_b + H_a,$$

получим:

$$V_b \Omega_a - \Omega_b V_a = H_a - H_b.$$

Возьмем матричные элементы от обеих частей этого равенства между состояниями Φ_b и Φ_a:

$$(\Phi_b,\ \Omega_b V_a \Phi_a) - (\Phi_b,\ V_b \Omega_a \Phi_a) = (\Phi_b,\ [H_b - H_a] \Phi_a),$$

или, учитывая (65,8), имеем

$$(\Psi_b,\ V_a \Phi_a) - (\Phi_b,\ V_b \Psi_a) = (\Phi_b,\ [H_b - H_a] \Phi_a). \tag{65,13}$$

Для состояний Φ_a и Φ_b, лежащих на поверхности равной энергии, правая часть (65,13) равна нулю, поэтому вероятность перехода в единицу времени (65,5) может быть записана в виде

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ba}|^2 \delta(E_a - E_b), \tag{65,14}$$

где матрица рассеяния

$$T_{ba} = (\Phi_b,\ V_b \Psi_a) = (\Psi_b,\ V_a \Phi_a). \tag{65,15}$$

В частности, в борновском приближении

$$(T_{ba})^{б} = (\Phi_b,\ V_b \Phi_a) = (\Phi_b,\ V_a \Phi_a). \tag{65,16}$$

Для вычисления матрицы рассеяния (65,15) можно предложить вариационный метод. Действительно, легко убедиться, что матрица рассеяния T_{ba} равна экстремальному значению функционала

$$\{T_{ba}^{(1)}\} = (\Psi_b,\ V_b D_b^{-1}(\lambda) V_a \Phi_a) + (\Phi_b,\ V_b \Psi_b) - \\ - (\Psi_b,\ V_b [1 - D_b^{-1}(\lambda) V_b][\Psi_a - \Phi_a]) \tag{65,17}$$

при независимом варьировании Ψ_a и Ψ_b. В самом деле,

$$\delta\left\{T_{ba}^{(1)}\right\} = (\delta\Psi_b,\ V_b[D_b^{-1}(\lambda)\left\{V_a - V_b\right\}\Phi_a + D_b^{-1}(\lambda) V_b\Psi_a - \\ - \Psi_a + \Phi_a]) + ([\Phi_b - \Psi_b + D_b^{-1}(\lambda^*) V_b\Psi_b],\ V_b\delta\Psi_a).$$

Поэтому условие экстремальности $\delta\left\{T_{ba}^1\right\} = 0$ сводится к двум интегральным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= \Phi_a + D_b^{-1}(\lambda) V_b\Psi_a + D_b^{-1}(\lambda)[V_a - V_b]\Phi_a, \\ \Psi_b &= \Phi_b + D_b^{-1}(\lambda^*) V_b\Psi_b, \end{aligned}\right\} \quad (65{,}18)$$

которые совпадают соответственно с уравнениями (65,2а) и (65,6). При выполнении уравнений (65,18) функционал (65,17) совпадает с выражением (65,15) для матрицы рассеяния. Действительно, подставляя в последний интеграл функционала (65,17) равенство

$$\Psi_a - D_b^{-1} V_b\Psi_a = \Phi_a + D_b^{-1}(V_a - V_b)\Phi_a,$$

вытекающее из первого уравнения (65,18), мы получим:

$$\left\{T_{ba}^{(1)}\right\}_{\text{экстр}} = (\Phi_b,\ V_b\Psi_a).$$

Кроме функционала (65,17) можно рассмотреть функционал

$$\left\{T_{ba}^{(2)}\right\} = (\Phi_b,\ V_a D_a^{-1}(\lambda) V_b\Psi_a) + (\Psi_b,\ V_a\Phi_a) - \\ - ([\Psi_b - \Phi_b],\ V_a\left\{1 - D_a^{-1}(\lambda) V_a\right\}\Psi_a). \quad (65{,}19)$$

Условие экстремума (65,19) при независимом варьировании Ψ_a и Ψ_b сводится к двум интегральным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a &= \Phi_a + D_a^{-1}(\lambda) V_a\Psi_a, \\ \Psi_b &= \Phi_b + D_a^{-1}(\lambda^*) V_a\Psi_b + D_a^{-1}(\lambda^*)[V_b - V_a]\Phi_b, \end{aligned}\right\} \quad (65{,}20)$$

а экстремальное значение функционала равно

$$\left\{T_{ba}^{(2)}\right\}_{\text{экстр}} = (\Psi_b,\ V_a\Phi_a).$$

Функционал

$$\left\{T_{ba}\right\} = \frac{1}{2}\left\{T_{ba}^{(1)}\right\} + \frac{1}{2}\left\{T_{ba}^{(2)}\right\}$$

будет симметричным относительно функций Ψ_a и Ψ_b.