В этом случае в равенстве

$$G_{10}^J = \sum_{M_2} (-1)^{M_2} (J,\ J,\ M_1, -M_2 \mid 10)\, \rho\, (JM_2JM_1),$$

связывающем G_{10}^J с матрицей плотности, надо положить

$$\rho\,(JM_2JM_1) = \delta_{M_2J}\delta_{M_1J}.$$

Таким образом,

$$\langle JJ \mid G_{10}^J \mid JJ \rangle = (-1)^J (JJ, -JJ \mid 10).$$

В том же состоянии

$$\langle JJ \mid g_{10}^J \mid JJ \rangle = \left(\frac{J}{J+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

поэтому из (67,26) находим:

$$A = (-1)^J (JJ, -JJ \mid 10) \sqrt{\frac{J}{J+1}}.$$

Таким образом, явное выражение спин-тензора $G_{1\nu}^J$ будет иметь вид

$$G_{1\nu}^J = (-1)^J \frac{(JJ, -JJ \mid 10)\sqrt{J}}{\sqrt{J+1}}\, g_{1\nu}^J.$$

Если использовать общую формулу для коэффициентов векторного сложения (см. приложение I, (Б, 16), то получим:

$$(JJ, -JJ \mid 10) = (-1)^{2J-1} (JJJ, -J \mid 10) =$$

$$= (-1)^{2J-1} (2J)! \sqrt{3} \left[(2J+2)!\,(2J-1)!\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (67,27)$$

§ 68. Разложение матрицы плотности спиновых состояний по базисным матрицам спинового пространства и спин-тензорам

Спин-тензоры $G_{n\nu}^J$ преобразуются при вращениях системы координат согласно представлениям D^n трехмерной группы вращения (см. (67,18)), однако они не являются эрмитовскими.

В некоторых случаях вместо спин-тензоров $G_{n\nu}^J$ для описания спиновых состояний потока частиц удобно использовать полную систему $(2J+1)^2$ эрмитовских матриц ω^μ в спиновом пространстве частицы со спином J.

Выберем эрмитовские матрицы ω^μ в спиновом пространстве $(2J+1)$ измерений так, чтобы они удовлетворяли условию ортогональности и нормировки

$$\mathrm{Sp}\,(\omega^\mu \omega^\nu) = (2J+1)\, \delta_{\mu\nu}. \quad (68,1)$$

Полную систему эрмитовских матриц спинового пространства частицы со спином J, удовлетворяющих условиям (62,1), будем называть *базисной системой матриц*.

В частном случае частицы со спином $^1/_2$ система базисных матриц состоит из единичной диагональной матрицы и двумерных матриц Паули

$$\omega^{(1)}=\mathrm{I},\quad \omega^{(2)}=\sigma_z,\quad \omega^{(3)}=\sigma_x,\quad \omega^{(4)}=\sigma_y. \tag{68,2}$$

Спин-тензорные операторы являются линейными комбинациями базисных спиновых матриц. Так, например, для случая частицы со спином $^1/_2$ согласно (67,25) и (67,26) имеем:

$$G_{00}^{\frac{1}{2}}=-i\frac{\sqrt{2}}{3}\omega^{(1)},\quad G_{10}^{\frac{1}{2}}=i\frac{\sqrt{2}}{3}\omega^{(2)},\quad G_{1,\pm 1}^{\frac{1}{2}}=\mp\frac{i}{3}(\omega^{(3)}\pm i\omega^{(4)}).$$

Полная система базисных матриц в спиновом пространстве (трех измерений) частицы со спином единица может быть выражена через единичную трехмерную матрицу I и спиновые матрицы s_i частицы со спином 1 (см. приложение I, § А) следующими равенствами:

$$\omega^{(i)}=\sqrt{\frac{3}{2}}s_i,\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

$$\omega^{(4)}=\mathrm{I},$$

$$\omega^{(l)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3s_i^2-2\right),$$

$$\omega^{(m)}=\frac{\sqrt{3}}{2}(s_is_k+s_ks_i),\qquad i\neq k.$$

Матрица плотности ρ частицы со спином J может быть разложена по системе базисных матриц ω^μ:

$$\rho=\sum_{\mu=1}^{(2J+1)^2}A_\mu\omega^\mu. \tag{68,3}$$

Пользуясь (68,1), легко определить коэффициенты A_μ в разложении (68,3):

$$A_\mu=(2J+1)^{-1}\,\mathrm{Sp}\,(\rho\omega^\mu).$$

Итак,

$$\rho=(2J+1)^{-1}\sum_\mu\langle\omega^\mu\rangle\,\omega^\mu, \tag{68,4}$$

где

$$\langle\omega^\mu\rangle=\mathrm{Sp}\,(\rho\omega^\mu) \tag{68,5}$$

— среднее значение базисной матрицы ω^μ в состоянии, описываемом матрицей плотности ρ. Таким образом, (68,4) показывает, что матрица плотности непосредственно выражается через средние значения базисных матриц ω^μ, измеряемых в эксперименте.

В случае частицы со спином $^1/_2$, подставляя (68,2) в (68,4), находим:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \boldsymbol{\sigma}), \tag{68,6}$$

где

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathrm{Sp}(\rho\boldsymbol{\sigma}) \equiv \boldsymbol{P}. \tag{68,7}$$

Вектор $\boldsymbol{P}$ называется *вектором поляризации*. Знание вектора поляризации частицы полностью определяет матрицу плотности спиновых состояний частицы со спином $^1/_2$, так как

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathrm{I} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix}.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль вектора поляризации, то $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = 0$. В этом случае состояние поляризации пучка частиц со спином $^1/_2$ будет определяться значениями только двух величин: $\langle \mathrm{I} \rangle$ и $\langle \sigma_z \rangle$, а матрица плотности

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + P_z & 0 \\ 0 & 1 - P_z \end{pmatrix}. \tag{68,4a}$$

В чистом спиновом состоянии с определенной ориентацией спина абсолютное значение вектора поляризации равно единице. Если состояние частицы со спином $^1/_2$ соответствует беспорядочной поляризации, то вектор поляризации равен нулю. Тогда

$$\rho = \frac{1}{2}\mathrm{I} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Состояние беспорядочной поляризации частиц с произвольным спином J определяется $(2J+1)$-мерной диагональной матрицей

$$\rho = \frac{1}{(2J+1)}(\delta_{mn}), \quad m, n = 1, 2, \ldots, 2J+1.$$

В общем случае выбор базисных матриц, используемых для разложения матрицы плотности, определяется неоднозначно условиями (68,1). Пользуясь этой неоднозначностью, можно подобрать такие базисные матрицы, чтобы их средние значения в данном состоянии определялись наиболее просто (например, часть матриц имела нулевые средние значения).

Если система состоит из двух частиц, спины которых равны соответственно i и J, то спиновое состояние системы можно выразить через базисные матрицы Ω^μ, которые определяются прямым произведением*) базисных матриц ω_i^α и ω_J^β, заданных в спиновых пространствах частиц, составляющих систему, т. е.

$$\Omega^\mu = \omega_i^\alpha \times \omega_J^\beta. \tag{68,8}$$

Если базисные матрицы ω_i и ω_J удовлетворяют условиям (68,1), то матрицы Ω^μ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Sp}(\Omega^\mu \Omega^\nu) = (2i+1)(2J+1)\,\delta_{\mu\nu}. \tag{68,9}$$

Матрица плотности спиновых состояний системы будет выражаться через базисные матрицы Ω^μ соотношением

$$\rho = \frac{1}{(2i+1)(2J+1)} \sum_\mu \langle \Omega^\mu \rangle \Omega^\mu, \tag{68,10}$$

где

$$\langle \Omega^\mu \rangle = \operatorname{Sp}(\rho\Omega^\nu).$$

Если спиновые состояния частиц, составляющих систему, не коррелированы, то

$$\langle \Omega^\mu \rangle = \langle \omega_i^\alpha \rangle \langle \omega_J^\beta \rangle.$$

В этом случае матрица плотности системы представляется в виде произведения матрицы плотности каждой из частиц в отдельности

$$\rho(\mu_i m_J \mu_i' m_J') = \rho_i(\mu\mu')\,\rho_J(mm'), \tag{68,11}$$

где

$$\rho_i = (2i+1)^{-1} \sum_\alpha \langle \omega_i^\alpha \rangle \omega_i^\alpha,$$

$$\rho_J = (2J+1)^{-1} \sum_\beta \langle \omega_J^\beta \rangle \omega_J^\beta.$$

Среднее значение любого оператора, действующего в спиновом пространстве одной из частиц, при некоррелированности спиновых состояний отдельных частиц системы будет выражаться только через матрицу плотности спиновых состояний этой частицы:

$$\langle L_i \rangle = \operatorname{Sp}(L_i \rho_i). \tag{68,12}$$

Если же спиновые состояния частиц системы коррелированы, то матрица плотности системы не сводится к произведению матриц плот-

*) Прямым произведением двух матриц $A = (A_{ik})$ и $B = (B_{ik})$ называется матрица, элементами которой являются произведения элементов матриц A и B. Прямое произведение двух матриц будем обозначать с помощью знака «$\times$», стоящего между символами, обозначающими соответствующие матрицы. Таким образом,

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{11}B, & A_{12}B, & \dots \\ A_{21}B, & A_{22}B, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}, & A_{11}B_{12}, & \dots & A_{12}B_{11}, & A_{12}B_{12}, & \dots \\ A_{11}B_{21}, & A_{11}B_{22}, & \dots & A_{12}B_{21}, & A_{12}B_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

ности спиновых состояний отдельных частиц. В этом случае вычисление среднего значения оператора L_i может быть выполнено следующим образом. Взяв прямое произведение матрицы L_i на единичную матрицу I_J спинового пространства второй частицы, получим матрицу $L_i \times I_J$ полного спинового пространства системы. Среднее значение этого оператора будет совпадать со средним значением оператора L_i; поэтому

$$\langle L_i \rangle = \langle L_i \times I_J \rangle = \sum_{m_i, m_i', m_J, m_J'} (m_i \mid L_i \mid m_i') \, \delta_{m_J m_J'} \, \rho(m_i' m_J' m_i m_J) =$$

$$= \sum_{m_i, m_i'} (m_i \mid L_i \mid m_i') \, \bar{\rho}(m_i' m_i) = \mathrm{Sp}(L_i \bar{\rho}_i),$$

где

$$\bar{\rho}(m_i m_i') = \sum_{m_J m_J'} \delta_{m_J m_J'} \, \rho(m_i' m_J' m_i m_J) = \sum_{m_J} \rho(m_i' m_J m_i m_J) = \mathrm{Sp}_J \, \rho$$

— матрица плотности, получаемая из матрицы плотности спиновых состояний путем суммирования диагональных (по квантовым состояниям частицы спина J) элементов. Таким образом, среднее значение оператора, действующего в спиновом пространстве частицы со спином i:

$$\langle L_i \rangle = \mathrm{Sp}(L_i \, \mathrm{Sp}_J \, \rho). \qquad (68,13)$$

В случае некоррелированности спиновых состояний частиц системы $\rho = \rho_i \rho_J$; тогда $\mathrm{Sp}_J \, \rho = \rho_i \, \mathrm{Sp} \, \rho_J = \rho_i$, и формула (68,13) переходит в (68,12).

Если вместо базисных матриц спинового пространства частицы со спином J желательно использовать спин-тензоры $T^J_{k\varkappa}$, то удобно нормировать их с помощью соотношения

$$\mathrm{Sp}\left(T^J_{k\varkappa} \overset{+}{T}{}^J_{k'\varkappa'}\right) = (2J+1) \, \delta_{kk'} \delta_{\varkappa\varkappa'}. \qquad (68,14)$$

Используя (68,14), легко разложить матрицу плотности по спин-тензорам:

$$\rho = \frac{1}{(2J+1)} \sum_{k, \varkappa} \langle T^J_{k\varkappa} \rangle \overset{+}{T}{}^J_{k\varkappa}, \qquad (68,15)$$

где

$$\langle T^J_{k\varkappa} \rangle = \mathrm{Sp}\left(\rho T^J_{k\varkappa}\right) = \sum_{m, m'} \rho(J\, m J m') \, \langle J m' \mid T^J_{k\varkappa} \mid J m \rangle. \qquad (68,16)$$

Вычисление матричных элементов от спин-тензорных операторов $T^J_{k\varkappa}$ будет проведено в § 70.

В частном случае частиц со спином $1/2$ спиновое состояние характеризуется средними значениями компонент спин-тензора

$$T^{\frac{1}{2}}_{10} = \sigma_z, \quad T^{\frac{1}{2}}_{1, \pm 1} = \pm \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{\sqrt{2}}, \qquad (68,17)$$

удовлетворяющих условиям (68,14). Компоненты спин-тензора $T^{\frac{1}{2}}_{k\varkappa}$ отличаются от рассмотренных ранее компонент $G^{\frac{1}{2}}_{k\varkappa}$ множителем $\frac{\sqrt{3}}{2}$. При выборе направления оси z вдоль вектора поляризации $\langle T_{1,\pm 1}\rangle = 0$, и состояние поляризации пучка частиц будет определяться средними значениями $\langle 1 \rangle$ и $\langle \sigma_z \rangle$. Таким образом, в этом случае описания поляризации с помощью спин-тензоров и базисных матриц совпадают.

Если частица имеет спин, равный 1, то ее спиновое состояние характеризуется средними значениями трех неприводимых тензоров: тензором нулевого ранга T^1_{00}, тензором первого ранга $T^1_{1\varkappa}$ и тензором второго ранга $T^1_{2\varkappa}$. Эти тензоры можно образовать из трехмерных спиновых матриц частицы спина 1, приведенных в § А приложения I. Нормированные условиями (68,14) компоненты этих спин-тензоров имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &T^1_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^1_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(s_x + is_y), \quad T^1_{10} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, s_z, \\ &T^1_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2}(s_x + is_y)^2, \quad T^1_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3s_z^2 - 2), \\ &T^1_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{2}[(s_x + is_y)\, s_z + s_z\,(s_x + is_y)]. \end{aligned}\right\} \tag{68,18}$$

Остальные компоненты спин-тензоров, соответствующие отрицательным значениям магнитных квантовых чисел, получаются при использовании соотношений

$$T_{k\varkappa} = (-1)^{\varkappa}\, T^{\dagger}_{k\varkappa}.$$

При выборе координатной системы с осью z, направленной вдоль вектора поляризации, $\langle T_{11}\rangle = \langle T_{1,-1}\rangle = 0$. При этом в большинстве случаев [8] и $\langle T_{21}\rangle = \langle T_{2,-1}\rangle = 0$. Тогда состояние поляризации частицы со спином 1 будет определяться средними значениями пяти остальных компонент спин-тензоров.

§ 69. Угловое распределение и поляризация продуктов ядерных реакций при частичной поляризации частиц во входном канале

Если спиновое состояние сталкивающихся частиц во входном канале характеризуется матрицей плотности (частичная поляризация), то дифференциальное сечение ядерной реакции в канале β получится из (66,3) непосредственным обобщением (66,4):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\beta\alpha} = \sum \rho\,(s_2 m_2 s_1 m_1)\, F^{*\beta\sigma\mu}_{\alpha s_1 m_1} F^{\beta\sigma\mu}_{\alpha s_2 m_2}, \tag{69,1}$$

где сумма распространяется на все возможные значения $\sigma\mu s_2 m_2 s_1 m_1$.