§ 70. Вычисление матричных элементов от спин-тензорных операторов

Матричный элемент

$$\langle \sigma_1\mu_1 | g_{k\varkappa}^{(q)} | \sigma\mu \rangle \tag{70,1}$$

от спин-тензорного оператора частицы спина q вычисляется на спиновых волновых функциях выходного канала реакции, которые определяются через спиновые волновые функции остаточного ядра $\chi_{Q\nu}$ и улетающей частицы $\chi_{q,\,\mu-\nu}$ с помощью соотношения

$$\chi_{\sigma\mu} = \sum_{\nu} (qQ, \mu-\nu, \nu | \sigma\mu)\, \chi_{q,\,\mu-\nu}\, \chi_{Q\nu}, \tag{70,2}$$

где $|Q-q| \leqslant \sigma \leqslant Q+q$. Учитывая, что спин-тензорный оператор $g_{k\varkappa}^{(q)}$ действует только на спиновые функции частицы q, можно написать:

$$(\sigma_1\mu_1 | g_{k\varkappa}^{(q)} | \sigma\mu) = \sum_{\nu} (qQ, \mu_1-\nu, \nu | \sigma_1\mu_1) \times$$
$$\times (qQ, \mu-\nu, \nu | \sigma\mu) \langle q, \mu_1-\nu | g_{k\varkappa}^{(q)} | q, \mu-\nu \rangle\,. \tag{70,3}$$

В матричном элементе правой части (70,3) можно выделить явную зависимость от магнитных квантовых чисел, если использовать формулу (Ж, 5) приложения I:

$$\langle q, \mu_1-\nu | g_{k\varkappa} | q, \mu-\nu \rangle = (kq\varkappa, \mu-\nu | q, \mu_1-\nu) \langle q \| g_k \| q \rangle, \tag{70,4}$$

где $\langle q \| g_k \| q \rangle$ — матричный элемент спин-тензорного оператора, не зависящий от магнитных квантовых чисел.

Подставляя (70,4) в (70,3), находим:

$$\langle \sigma_1\mu_1 | g_{k\varkappa} | \sigma\mu \rangle = \langle q \| g_k \| q \rangle \sum_{\nu} (qQ, \mu-\nu, \nu | \sigma\mu) \times$$
$$\times (kq, \varkappa, \mu-\nu | q, \mu_1-\nu)(qQ, \mu_1-\nu, \nu | \sigma_1\mu_1). \tag{70,5}$$

Сумма по квантовым числам ν в (70,5) может быть вычислена, если, пользуясь равенством (И, 2) приложения I, выразить произведение двух последних коэффициентов векторного сложения через коэффициенты Рака:

$$(kq\varkappa, \mu-\nu | q, \mu_1-\nu)(qQ, \mu_1-\nu, \nu | \sigma_1\mu_1) =$$
$$= \sum_j \sqrt{(2j+1)(2q+1)}\, (qQ, \mu-\nu, \nu | j\mu)(kj\varkappa\mu | \sigma_1\mu_1)\, W(kq\sigma_1Q;\ qj).$$

Подставляя это выражение в (70,5) и учитывая свойства ортогональности коэффициентов векторного сложения, находим:

$$(\sigma_1\mu_1 | g_{k\varkappa} | \sigma\mu) = [(2q+1)(2\sigma+1)]^{\frac{1}{2}} (k\sigma, \varkappa, \mu | \sigma_1\mu_1) \times$$
$$\times \langle q \| g_k \| q \rangle\, W(kq\sigma_1Q;\ q\sigma). \tag{70,6}$$

Учитывая свойства симметрии коэффициентов векторного сложения

$$(k\sigma\varkappa\mu \mid \sigma_1\mu_1) = (-1)^{\sigma+\mu} \left(\frac{2\sigma_1+1}{2k+1}\right)^{\frac{1}{2}} (\sigma_1\sigma, -\mu_1, \mu \mid k, -\varkappa)$$

и коэффициентов Рака

$$W(kq\sigma_1 Q;\ q\sigma) = (-1)^{q+\sigma-k-Q}\, W(q\sigma_1 q\sigma;\ Qk),$$

можно привести (70,6) к виду

$$(\sigma_1\mu_1 \mid g_{k\varkappa} \mid \sigma\mu) = (-1)^{q-k-Q-\mu_1} \sqrt{\frac{(2q+1)(2\sigma+1)(2\sigma_1+1)}{2k+1}} \times$$
$$\times (\sigma_1\sigma, -\mu_1\mu \mid k, -\varkappa) \langle q \| g_k \| q \rangle\, W(q\sigma_1 q\sigma;\ Qk). \qquad (70,7)$$

Для вычисления приведенного матричного элемента $\langle q \| g_k \| q \rangle$, зависящего только от квантовых чисел q и k, достаточно вычислить (70,7) для простейшего частного случая. Так, например, для определения $\langle q \| g_1 \| q \rangle$ рассмотрим случай $Q = \varkappa = 0$ и $\mu_1 = \mu = q$; тогда $\sigma_1 = \sigma = q$ и (70,7) сводится к равенству

$$\langle qq \mid g_{10} \mid qq \rangle = -\left[\frac{(2q+1)^3}{3}\right]^{\frac{1}{2}} \langle q \| g_1 \| q \rangle (qq, -qq \mid 10) \times$$
$$\times W(qqqq;\ 01). \qquad (70,8)$$

Полагая $g_{10}^{(q)} = \dfrac{\hat{q}_z}{\sqrt{q(q+1)}}$ и учитывая, что $\langle qq \mid g_{10}^{(q)} \mid qq \rangle = \sqrt{\dfrac{q}{q+1}}$, $W(qqqq;\ 01) = (-1)^{2q-1}(2q+1)^{-1}$, из (70,8) находим:

$$\langle q \| g_1^{(q)} \| q \rangle = (-1)^{2q} \left[\frac{3q}{(q+1)(2q+1)}\right]^{\frac{1}{2}} (qq, -q, q \mid 10)^{-1}. \qquad (70,9)$$

Таким образом,

$$\langle \sigma_1\mu_1 \mid g_{1\varkappa}^{(q)} \mid \sigma\mu \rangle = (-1)^{1+q+Q+\mu_1} \left[\frac{q(2\sigma+1)(2\sigma_1+1)}{(q+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \frac{(\sigma_1\sigma_2, -\mu_1, \mu \mid 1, -\varkappa)}{(qq, -q, q \mid 10)} W(q_1\sigma_1 q\sigma;\ Q1), \qquad (70,10)$$

где

$$(qq, -q, q \mid 10) = (-1)^{2q-1}(2q)!\sqrt{3}\,[(2q+2)!\,(2q-1)!\,]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (70,11)$$

Вычислим теперь матричный элемент $(Jm' \mid T_{k\varkappa}^{J} \mid Jm)$, входящий в формулу (68,16), определяющую среднее значение спин-тензорных операторов частицы спина J. Пользуясь (Ж, 5), имеем:

$$(Jm' \mid T_{k\varkappa}^{J} \mid Jm) = (kJ\varkappa m \mid Jm') \langle J \| T_k^J \| J \rangle. \qquad (70,12)$$

В частном случае $J=\frac{1}{2}$, $k=0$, 1:

$$\left(\frac{1}{2}m'\,|\,T^{\frac{1}{2}}_{00}\,|\,\frac{1}{2}\,m\right)=\delta_{mm'}T^{\frac{1}{2}}_{00}=\sqrt{2}\,\delta_{mm'},$$

$$\left(\frac{1}{2}\,m'\,|\,T^{\frac{1}{2}}_{1\varkappa}\,|\,\frac{1}{2}\,m\right)=\left(1\,\frac{1}{2}\,\varkappa m\,\middle|\,\frac{1}{2}\,m'\right)\left\langle\frac{1}{2}\right\|T^{\frac{1}{2}}_{1}\left\|\frac{1}{2}\right\rangle. \qquad (70,13)$$

Для вычисления $\left\langle\frac{1}{2}\right\|T^{\frac{1}{2}}_{1}\left\|\frac{1}{2}\right\rangle$ положим в (70,13) $\varkappa=0$, $m=m'=$ $=\frac{1}{2}$; тогда находим:

$$\left\langle\frac{1}{2}\right\|T^{\frac{1}{2}}_{1}\left\|\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,T^{\frac{1}{2}}_{10}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)}{\left(1\,\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)}.$$

Учитывая (68,17), имеем $\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,T^{\frac{1}{2}}_{10}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Далее,

$$\left(1\,\frac{1}{2}\;0\,\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{поэтому}\ \left\langle\frac{1}{2}\right\|T^{\frac{1}{2}}_{1}\left\|\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляя это значение в (70,13), находим окончательно:

$$\left(\frac{1}{2}\,m'\,\middle|\,T^{\frac{1}{2}}_{1\varkappa}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,m\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1\,\frac{1}{2}\,\varkappa m\,\middle|\,\frac{1}{2}\,m'\right). \qquad (70,14)$$

Таким же образом в случае частиц со спином $J=1$ находим, используя (68,18):

$$(1m'\,|\,T^{1}_{00}\,|\,1m)=\sqrt{3}\,\delta_{mm'},$$

$$(1m'\,|\,T^{1}_{1\varkappa}\,|\,1m)=-(11\varkappa m\,|\,1m')\sqrt{3},$$

$$\langle 1\,\|T^{1}_{1}\|\,1\rangle=-\sqrt{3},\qquad \langle 1\,\|T^{1}_{2}\|\,1\rangle=\sqrt{5},$$

$$(1m'\,|\,T^{1}_{2\varkappa}\,|\,1m)=(21\varkappa m\,|\,1m')\sqrt{5}.$$

§ 71. Рассеяние частично поляризованных нуклонов неполяризованными ядрами

Применим общие формулы § 69 для описания частного случая упругого и неупругого рассеяния нуклонов на неполяризованных ядрах, т. е. реакций типа

$$a+A\rightarrow A^{*}+a.$$