В частном случае $J=\frac{1}{2}$, $k=0,\ 1$:

$$\left(\tfrac{1}{2}m'\,|\,T_{00}^{\frac{1}{2}}\,|\,\tfrac{1}{2}\,m\right)=\delta_{mm'}T_{00}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,\delta_{mm'},$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\,m'\,|\,T_{1\varkappa}^{\frac{1}{2}}\,|\,\tfrac{1}{2}\,m\right)=\left(1\,\tfrac{1}{2}\,\varkappa m\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,m'\right)<\tfrac{1}{2}\left\|T_{1}^{\frac{1}{2}}\right\|\tfrac{1}{2}>. \qquad (70,13)$$

Для вычисления $<\frac{1}{2}\left\|T_{1}^{\frac{1}{2}}\right\|\frac{1}{2}>$ положим в (70,13) $\varkappa=0$, $m=m'=$ $=\frac{1}{2}$; тогда находим:

$$<\tfrac{1}{2}\left\|T_{1}^{\frac{1}{2}}\right\|\tfrac{1}{2}>=\frac{\left(\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\,\middle|\,T_{10}^{\frac{1}{2}}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right)}{\left(1\,\tfrac{1}{2}\,0\,\tfrac{1}{2}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right)}.$$

Учитывая (68,17), имеем $\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\middle|\,T_{10}^{\frac{1}{2}}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Далее,

$$\left(1\,\tfrac{1}{2}\,\,0\,\tfrac{1}{2}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{поэтому}\ <\tfrac{1}{2}\left\|T_{1}^{\frac{1}{2}}\right\|\tfrac{1}{2}>=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставляя это значение в (70,13), находим окончательно:

$$\left(\tfrac{1}{2}\,m'\,\middle|\,T_{1\varkappa}^{\frac{1}{2}}\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,m\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1\,\tfrac{1}{2}\,\varkappa m\,\middle|\,\tfrac{1}{2}\,m'\right). \qquad (70,14)$$

Таким же образом в случае частиц со спином $J=1$ находим, используя (68,18):

$$(1m'\,|\,T_{00}^{1}\,|\,1m)=\sqrt{3}\delta_{mm'},$$

$$(1m'\,|\,T_{1\varkappa}^{1}\,|\,1m)=-(11\varkappa m\,|\,1m')\sqrt{3},$$

$$<1\,\|T_{1}^{1}\|\,1>=-\sqrt{3},\qquad <1\,\|T_{2}^{1}\|\,1>=\sqrt{5},$$

$$(1m'\,|\,T_{2\varkappa}^{1}\,|\,1m)=(21\varkappa m\,|\,1m')\sqrt{5}.$$

§ 71. Рассеяние частично поляризованных нуклонов неполяризованными ядрами

Применим общие формулы § 69 для описания частного случая упругого и неупругого рассеяния нуклонов на неполяризованных ядрах, т. е. реакций типа

$$a+A\longrightarrow A^{*}+a.$$

Базисные матрицы в спиновом пространстве нуклона $\omega_a^\alpha \equiv \{ 1, \boldsymbol{\sigma} \}$. Базисные матрицы в спиновом пространстве ядра A со спином J обозначим через $\omega_J^\beta = \{ 1_J, \omega_J^{(2)}, \ldots \}$. Матрица плотности во входном канале

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{1}{2(2J+1)} \sum_\mu \langle \Omega^\mu \rangle_{\text{вх}} \Omega^\mu, \qquad \Omega^\mu = \omega_a^\alpha \times \omega_J^\beta. \tag{71,1}$$

Вследствие того, что во входном канале ядра A не поляризованы, отличными от нуля средними значениями $\langle \Omega^\mu \rangle_{\text{вх}}$ будут только те, которые образованы прямым произведением матриц ω_a^α на единичную матрицу 1_J; таким образом,

$$\rho_{\text{вх}} = \frac{1}{2(2J+1)} (1 + \boldsymbol{\sigma P}_{\text{вх}}) 1_J, \quad \mathrm{Sp}\rho_{\text{вх}} = 1, \tag{71,2}$$

где $\boldsymbol{P}_{\text{вх}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\text{вх}}$ — среднее значение вектора поляризации нуклонов во входном канале.

Дифференциальное сечение рассеяния, соответствующее случаю, когда входной канал реакции характеризуется матрицей плотности (71,2), определяется формулой

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \mathrm{Sp}(F\rho_{\text{вх}}F^\dagger) = \frac{1}{2(2J+1)} \left\{ \mathrm{Sp}(FF^\dagger) + \boldsymbol{P}_{\text{вх}} \mathrm{Sp}(F\boldsymbol{\sigma}F^\dagger) \right\}. \tag{71,3}$$

В случае неполяризованного пучка падающих нуклонов $\boldsymbol{P}_{\text{вх}} = 0$ и сечение рассеяния принимает вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = \frac{1}{2(2J+1)} \mathrm{Sp}(FF^\dagger). \tag{71,4}$$

Таким образом, общее дифференциальное сечение рассеяния (71,3) примет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u \left\{ 1 + \boldsymbol{P}_{\text{вх}} \frac{\mathrm{Sp}(F\boldsymbol{\sigma}F^\dagger)}{\mathrm{Sp}(FF^\dagger)} \right\}. \tag{71,5}$$

Среднее значение вектора поляризации в выходном канале определяется согласно (69,7) и (71,2) формулой

$$\boldsymbol{P}_{\text{вых}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\text{вых}} = \frac{\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\sigma}FF^\dagger) + \boldsymbol{P}_{\text{вх}}\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\sigma}F\boldsymbol{\sigma}F^\dagger)}{\mathrm{Sp}(FF^\dagger) + \boldsymbol{P}_{\text{вх}}\mathrm{Sp}(F\boldsymbol{\sigma}F^\dagger)}. \tag{71,6}$$

В случае неполяризованных падающих нуклонов

$$\boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} = \frac{\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\sigma}FF^\dagger)}{\mathrm{Sp}(FF^\dagger)}. \tag{71,7}$$

Таким образом, (71,6) можно привести к виду

$$\boldsymbol{P}_{\text{вых}} = \frac{\boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} + B\boldsymbol{P}_{\text{вх}}}{1 + \boldsymbol{P}_{\text{вх}} \dfrac{\mathrm{Sp}(F\boldsymbol{\sigma}F^\dagger)}{\mathrm{Sp}(FF^\dagger)}}, \tag{71,8}$$

где величину B следует рассматривать как тензор второго ранга, элементы которого определяются соотношениями

$$B_{xy} \equiv \frac{\mathrm{Sp}\,(\sigma_x F \sigma_y F^\dagger)}{\mathrm{Sp}\,(FF^\dagger)}. \tag{71,9}$$

Таким образом, входящая в (71,8) величина $B\boldsymbol{P}_{\text{вх}}$ является вектором, компоненты которого определяются равенствами

$$(B\boldsymbol{P}_{\text{вх}})_i = \sum_{k=1}^{3} B_{ik} (\boldsymbol{P}_{\text{вх}})_k, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{71,8a}$$

Вектор поляризации $\boldsymbol{P}^u_{\text{вых}}$ рассеянных неполяризованных нуклонов является псевдовектором (среднее значение векторной матрицы Паули). В случае рассеяния неполяризованного пучка нуклонов на неполяризованных ядрах этот вектор может быть только функцией относительных импульсов во входном ($\boldsymbol{k}_\alpha$) и выходном ($\boldsymbol{k}_3$) каналах; поэтому можно написать:

$$\boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} = P^u_{\text{вых}} \boldsymbol{n}, \tag{71,10}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный псевдоскалярный вектор, построенный на векторах $\boldsymbol{k}_3$ и $\boldsymbol{k}_\alpha$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{k}_3 \boldsymbol{k}_\alpha]}{|[\boldsymbol{k}_3 \boldsymbol{k}_\alpha]|}. \tag{71,11}$$

Таким образом, вектор поляризации при рассеянии неполяризованных нуклонов на неполяризованных ядрах всегда перпендикулярен к плоскости рассеяния.

Вольфенштейн и Ашкин [10] показали, что в случае упругого рассеяния нуклонов на неполяризованных ядрах вследствие инвариантности амплитуды рассеяния относительного обращения времени выполняется равенство

$$\mathrm{Sp}\,(F\boldsymbol{\sigma}F^\dagger) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{\sigma}FF^\dagger). \tag{71,12}$$

Учитывая это равенство и (71,7), представим дифференциальное сечение (71,5) для случая упругого рассеяния в виде

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u_{el} \left\{ 1 + A \right\}, \tag{71,13}$$

где

$$A \equiv \boldsymbol{P}_{\text{вх}} \boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} \leqslant 1 \tag{71,14}$$

— коэффициент, определяющий азимутальную ассиметрию рассеянных нуклонов. Учитывая (71,10), можно привести коэффициент асимметрии (71,14) к виду

$$A \equiv \boldsymbol{P}_{\text{вх}} \boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} = P^u_{\text{вых}} \boldsymbol{n} \boldsymbol{P}_{\text{вх}}. \tag{71,14a}$$

Из (71,13) и (71,14а) следует, что рассеяние, связанное с поляризацией нуклонов в падающем пучке, зависит от проекции вектора поляризации падающих нуклонов на направление нормали к плоскости рассеяния. Измерение азимутальной ассиметрии позволяет судить о степени поляризации падающего пучка, соответствующей составляющей вектора поляризации $\boldsymbol{P}_{\text{вх}}$, перпендикулярной к направлению падения. Продольная составляющая $\boldsymbol{P}_{\text{вх}}$ всегда перпендикулярна к $\boldsymbol{n}$ и не вносит вклада в A, а следовательно и в сечение рассеяния (71,13).

Учитывая (71,12), (71,7) и (71,14а), можно вектор поляризации упруго рассеянных нуклонов на неполяризованных ядрах привести к виду

$$\boldsymbol{P}_{\text{вых}}=\frac{P^{u}_{\text{вых}}\boldsymbol{n}+B\boldsymbol{P}_{\text{вх}}}{1+A}. \tag{71,15}$$

Знание матрицы плотности спиновых состояний выходного канала $\rho_{\text{вых}}=F\rho_{\text{вх}}F^{\dagger}$ позволяет определить не только состояния поляризации нуклонов в выходном канале, но и средние значения базисных матриц ω^{μ}_{J} спинового пространства ядра отдачи

$$\langle\omega^{\mu}_{J}\rangle=\frac{\operatorname{Sp}(\omega^{\mu}_{J}\rho_{\text{вых}})}{\operatorname{Sp}(\rho_{\text{вых}})}=\frac{\operatorname{Sp}(\omega^{\mu}_{J}FF^{\dagger})+\boldsymbol{P}_{\text{вх}}\operatorname{Sp}(\omega^{\mu}_{J}F\boldsymbol{\sigma}F^{\dagger})}{\operatorname{Sp}(FF^{\dagger})+\boldsymbol{P}_{\text{вх}}\operatorname{Sp}(F\boldsymbol{\sigma}F^{\dagger})}. \tag{71,16}$$

Эти величины полностью определяют матрицу плотности спиновых состояний ядер отдачи

$$\rho_{J}=\frac{1}{2J+1}\sum_{\mu}\langle\omega^{\mu}_{J}\rangle\,\omega^{\mu}_{J}.$$

Из условия инвариантности амплитуды рассеяния F при пространственных вращениях следует, что при рассеянии нуклонов на неполяризованных ядрах (ненулевого спина) амплитуда рассеяния должна иметь вид (см. § 45)

$$F=\mathfrak{a}1+\mathfrak{b}\,\boldsymbol{\sigma n}+\mathfrak{c}\boldsymbol{\sigma K}+\mathfrak{d}\boldsymbol{\sigma N}, \tag{71,17}$$

где вектор $\boldsymbol{n}$ определен формулой (71,11);

$$\boldsymbol{K}=\frac{\boldsymbol{k}_{\beta}-\boldsymbol{k}_{\alpha}}{|\boldsymbol{k}_{\beta}-\boldsymbol{k}_{\alpha}|};\quad \boldsymbol{N}=\frac{[\boldsymbol{nK}]}{|[\boldsymbol{nK}]|};$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ — матрицы, элементы которых являются функциями k^2_{α}, k^2_{β} и угла рассеяния. Из условия инвариантности F относительно пространственных отражений следует, что $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ должны выражаться через скалярные функции, а $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ через псевдоскалярные функции. В случае упругого рассеяния амплитуда рассеяния инварианта относительно отражения времени; это приводит к дополнительным требованиям, накладываемым на коэффициенты (71,17): при отражении времени матрица $\mathfrak{c}$ должна менять знак, а остальные матрицы должны оставаться неизменными.

Пользуясь (71,17), можно выразить сечение рассеяния и поляризацию первоначально неполяризованных нуклонов через матрицы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, определяющие амплитуду рассеяния:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = \frac{1}{2(2J+1)} \operatorname{Sp}(\mathrm{aa}^\dagger + \mathrm{bb}^\dagger + \mathrm{cc}^\dagger + \mathrm{dd}^\dagger), \tag{71,18}$$

$$P^u_{\text{вых}} = \frac{\operatorname{Sp}(\mathrm{ab}^\dagger + \mathrm{ab}^\dagger)}{2(2J+1)\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u} \boldsymbol{n}. \tag{71,19}$$

В частном случае рассеяния на ядрах нулевого спина амплитуда рассеяния выражается только через две комплексные функции (a и b) угла рассеяния и энергии:

$$F = a\mathrm{I} + b\boldsymbol{\sigma n}. \tag{71,20}$$

В этом случае сечение рассеяния нуклонов определяется формулой

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = (aa^* + bb^*), \tag{71,18а}$$

а вектор поляризации

$$\boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} = \frac{ab^* + a^*b}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u} \boldsymbol{n} = \frac{2\operatorname{Re}(ab^*)}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u} \boldsymbol{n}. \tag{71,19а}$$

Полагая

$$a = a_0 e^{i\alpha}, \quad b = b_0 e^{i\beta}, \tag{71,21}$$

можно выразить дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных нуклонов и их поляризацию после рассеяния через функции a_0, b_0, α, β энергии и угла рассеяния

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^u = (a_0^2 + b_0^2), \tag{71,18б}$$

$$\boldsymbol{P}^u_{\text{вых}} = \frac{2a_0 b_0 \cos(\alpha - \beta)}{a_0^2 + b_0^2} \boldsymbol{n}. \tag{71,19б}$$

В случае рассеяния нуклонов на ядрах нулевого спина, используя (71,8а), имеем:

$$B\boldsymbol{P}_{\text{вх}} = \frac{(a_0^2 - b_0^2)\boldsymbol{P}_{\text{вх}} + 2b_0^2 \boldsymbol{n}(\boldsymbol{nP}_{\text{вх}}) + 2a_0 b_0 \sin(\alpha - \beta)\cdot[\boldsymbol{nP}_{\text{вх}}]}{a_0^2 + b_0^2}. \tag{71,22}$$

Если вектор поляризации $\boldsymbol{P}_{\text{вх}}$ падающего пучка нуклонов лежит в плоскости рассеяния, т. е. $(\boldsymbol{nP}_{\text{вх}}) = 0$, то вектор $(B\boldsymbol{P}_{\text{вх}})$ тоже лежит в плоскости рассеяния. В этом случае согласно (71,14а) коэффициент A азимутальной асимметрии равен нулю и согласно (71,15) нормальная к плоскости рассеяния компонента вектора поляризации рассеянных нуклонов не зависит от величины вектора поляризации $\boldsymbol{P}_{\text{вх}}$ падающих нуклонов:

$$(\boldsymbol{nP}_{\text{вых}}) = P^u_{\text{вых}}, \quad \text{если} \quad (\boldsymbol{nP}_{\text{вх}}) = 0. \tag{71,23}$$

Если вектор поляризации падающих нуклонов перпендикулярен к плоскости рассеяния, т. е. $\boldsymbol{P}_{\text{вх}} = P_{\text{вх}}\boldsymbol{n}$, то согласно (71,22)

$$B\boldsymbol{P}_{\text{вх}} = P_{\text{вх}}\boldsymbol{n}.$$

Теперь из (71,15) следует, что и вектор поляризации рассеянных нуклонов будет нормален к плоскости рассеяния:

$$\boldsymbol{P}_{\text{вых}} = \frac{P_{\text{вых}} + P_{\text{вх}}}{1 + A}\boldsymbol{n}, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{P}_{\text{вх}} = \boldsymbol{n}P_{\text{вх}}. \tag{71,24}$$

Из (71,14) и (71,19б) следует, что коэффициент, определяющий азимутальную асимметрию при рассеянии нуклонов на ядрах нулевого спина, можно записать в виде

$$A = \boldsymbol{P}_{\text{вх}}\boldsymbol{P}^{n}_{\text{вых}} = \frac{2a_0b_0}{a_0^2 + b_0^2}\cos(\alpha - \beta)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{\text{вх}}). \tag{71,25}$$

Итак дифференциальное сечение упругого рассеяния поляризованных нуклонов на ядрах нулевого спина принимает вид (см. (71,13) и (71,18б))

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = (a_0^2 + b_0^2)\left[1 + \frac{2a_0b_0}{a_0^2 + b_0^2}\cos(\alpha - \beta)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{\text{вх}})\right]. \tag{71,26}$$

При этом вектор поляризации рассеянных нуклонов определяется формулой

$$\boldsymbol{P}_{\text{вых}} = \frac{2a_0b_0\cos(\alpha - \beta)\boldsymbol{n} + (a_0^2 - b_0^2)\boldsymbol{P}_{\text{вх}} + 2b_0^2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{\text{вх}}) + 2a_0b_0\sin(\alpha - \beta)[\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{\text{вх}}]}{a_0^2 + b_0^2 + a_0b_0\cos(\alpha - \beta)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{P}_{\text{вх}})}. \tag{71,27}$$

§ 72. Двукратное и трехкратное упругое рассеяние нуклонов на неполяризованных ядрах

Предположим, что неполяризованный пучок нейтронов рассеивается на ядре, имеющем спин J_1. Тогда согласно § 71 дифференциальное сечение рассеяния и вектор поляризации будут определяться выражением

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 = [2(2J_1 + 1)]^{-1}\,\mathrm{Sp}(FF^{\dagger}), \tag{72,1}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = \left|\frac{\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\sigma}FF^{\dagger})}{\mathrm{Sp}(FF^{\dagger})}\right|\boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{n}_1 = \frac{[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_1]}{|[\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_1]|}, \tag{72,2}$$

$\boldsymbol{k}_0$ — волновой вектор падающих нуклонов: $\boldsymbol{k}_1$ — волновой вектор рассеянных нуклонов. Вектор поляризации $\boldsymbol{P}_1$ направлен перпендикулярно волновому вектору $\boldsymbol{k}_0$ падающих нуклонов. Величину вектора поляризации $\boldsymbol{P}_1$ можно измерить, произведя анализ азимутальной асимметрии нуклонов, рассеянных на второй мишени (спин J_2).

При вторичном рассеянии вдоль волнового вектора $\boldsymbol{k}_2$ дифференциальное сечение рассеяния, отнесенное к единичному потоку первично