

большой массой. Поскольку длина рассеяния пропорциональна приведенной массе нейтрона и рассеивающего центра, то между длинами рассеяния на свободном и связанном ядре имеется простое соотношение (см. § 48):

$$(\mu a)_{\text{связ}} = (\mu a)_{\text{своб.}}$$

В случае кристалла $\mu_{\text{связ}} = M$, $\mu_{\text{своб}} = \frac{MA}{A+1}$, следовательно,

$$a_{\text{связ}} = \frac{A+1}{A} a_{\text{своб.}}$$

В дальнейшем в этой главе под длиной когерентного рассеяния a мы будем всегда понимать длину рассеяния $a_{\text{связ}}$, если не будет делаться специальных оговорок.

§ 85. Когерентное рассеяние медленных нейтронов поликристаллическим веществом с бесконечно тяжелыми ядрами

Как показано в предыдущем параграфе, когерентное рассеяние обусловлено только когерентной частью амплитуды рассеяния. Рассмотрим теперь, как можно учесть влияние пространственного распределения ядер на рассеяние тепловых нейтронов. Для простоты предположим, что ядра не имеют спина и обладают бесконечно большой массой. В этом случае все столкновения будут происходить без изменения энергии движения нейтронов (упругое рассеяние).

Предположим, что положения ядер в монокристалле определяются радиусами-векторами

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{d}_i,$$

где $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ — базисные векторы единичной ячейки кристалла; n_i — пробегают целочисленные значения: $0, 1, \dots, N_i$; $(N_1 + 1)(N_2 + 1) \times \times (N_3 + 1) = N$ — полное число ядер в кристалле.

Обозначив волновые векторы нейтрона перед рассеянием \mathbf{k} , а после рассеяния \mathbf{k}' , мы можем записать его волновую функцию на большом расстоянии от монокристалла в виде

$$\psi = e^{ikz} - \frac{a}{r} e^{ikr} \sum_{\mathbf{n}} \exp \{i\mathbf{n}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\},$$

где a соответствует когерентной части длины рассеяния ($a \equiv a_k$), суммирование по \mathbf{n} обозначает суммирование по n_1, n_2, n_3 .

Сечение рассеяния в единицу телесного угла в направлении \mathbf{k}' , отнесенное к одному ядру, будет

$$\frac{d\sigma(\mathbf{k}')}{d\Omega} = \frac{|a|^2}{N} \left| \sum_{\mathbf{n}} \exp \{i\mathbf{n}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\} \right|^2. \quad (85,1)$$

Для вычисления (85,1) удобно выразить волновые вектора \mathbf{k} и \mathbf{k}' через базисные векторы обратной решетки $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, связанные с базисными векторами прямой решетки $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ соотношениями:

$$\mathbf{b}_1 = B^{-1}[\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3], \mathbf{b}_2 = B^{-1}[\mathbf{d}_3\mathbf{d}_1], \mathbf{b}_3 = B^{-1}[\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2],$$

где $B = \mathbf{d}_1[\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3]$ — объем элементарной ячейки:

$$B \cdot \mathbf{b}_1[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] = 1.$$

Полагая $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \sum_{i=1}^3 (k_i - k'_i) \mathbf{b}_i$ и учитывая, что $\mathbf{d}_i \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$, полу-

чим $n(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \sum_{i=1}^3 n_i (k_i - k'_i).$

Подставляя последнее равенство в (85,1), находим:

$$\frac{d\sigma(\mathbf{k}')}{d\Omega} = \frac{|a|^2}{N} F(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (85,2)$$

где

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &\equiv \prod_{j=1}^3 \left| \sum_{n_j=0}^{N_j} \exp \{in_j(k_j - k'_j)\} \right|^2 = \\ &= \prod_{j=1}^3 \frac{\sin^2 \left\{ \frac{(N_j + 1)(k_j - k'_j)}{2} \right\}}{\sin^2 \left(\frac{k_j - k'_j}{2} \right)} \end{aligned}$$

— так называемый структурный фактор. При $N \rightarrow \infty$

$$F(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \prod_{j=1}^3 \{2\pi(N_j + 1) \delta(k_j - k'_j - 2\pi\tau_j)\}. \quad (85,3)$$

Здесь аргументами дельта-функции являются компоненты вектора в системе координат с базисными векторами обратной решетки. Если ввести декартовы координаты тех же векторов, то*)

$$\begin{aligned} \prod_j \delta(k_j - k'_j - 2\pi\tau_j) &= \\ &= B^{-1} \delta(k_x - k'_x - 2\pi\tau_x) \delta(k_y - k'_y - 2\pi\tau_y) \delta(k_z - k'_z - 2\pi\tau_z). \end{aligned}$$

Поэтому

$$F(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{(2\pi)^3 N}{B} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - 2\pi\boldsymbol{\tau}), \quad (85,3a)$$

где $\boldsymbol{\tau} = \sum_{j=1}^3 \tau_j \mathbf{b}_j$ — вектор обратной решетки, определяемый через ба-

*) Пусть компоненты вектора \mathbf{A} в декартовой системе координат равны A_x, A_y, A_z , а в системе координат, связанной с базисными векторами обратной решетки, A_1, A_2, A_3 , где $A_j = \mathbf{d}_j \mathbf{A} = d_{jx} A_x + d_{jy} A_y + d_{jz} A_z$. Из этих равенств следует, что $dA_1 dA_2 dA_3 = B^{-1} dA_x dA_y dA_z$, где $B = \mathbf{d}_1[\mathbf{d}_2\mathbf{d}_3]$.

зисные векторы обратной решетки \mathbf{b}_j и целые числа τ_j , называемые *миллеровскими индексами* отражающих плоскостей. Каждому вектору обратной решетки $\boldsymbol{\tau}$ соответствует семейство параллельных кристаллических плоскостей, уравнения которых $\tau \sum_{j=1}^3 \nu_j d_j = m$, где ν_1, ν_2, ν_3 и m — целые числа. Расстояние между соседними плоскостями равно $1/\tau$. В случае простой кубической решетки с ребром куба d

$$\frac{1}{\tau} = d (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

При учете (85,3а) сечение упругого рассеяния будет равно

$$\frac{d\sigma(\mathbf{k}')}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^2 |a|^2}{B} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - 2\pi\boldsymbol{\tau}). \quad (85,4)$$

Для монокристаллов очень больших размеров ($N \rightarrow \infty$) сечение (85,4) имеет резкие максимумы при выполнении условий Брегга:

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}' = 2\pi\boldsymbol{\tau}. \quad (85,5)$$

Условия Брегга выполняются всегда для рассеяния вперед ($\mathbf{k} = \mathbf{k}'$), в этом случае $\boldsymbol{\tau} = 0$. Однако в дальнейшем упругим рассеянием мы будем называть только рассеяние под углом $\theta \neq 0$, поэтому случай $\boldsymbol{\tau} = 0$ будет исключаться, если не будут делаться специальные оговорки. Для кристаллов конечных размеров максимумы сечения (85,4) имеют конечную угловую ширину, по порядку величины равную $\sim (kL)^{-2}$, где L — линейные размеры кристалла.

Для того чтобы получить среднее сечение упругого рассеяния нейтронов в поликристаллах, нужно усреднить (85,4) по всем направлениям вектора $\boldsymbol{\tau}$ при заданной его абсолютной величине. При фиксированном значении τ заданному волновому вектору падающих нейтронов \mathbf{k} будут согласно (85,5) соответствовать направления \mathbf{k}' , образующие с \mathbf{k} угол θ , удовлетворяющий условию

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\pi\tau}{k}, \quad \text{или} \quad 2d \sin \frac{\theta}{2} = \lambda, \quad (85,6)$$

где $d = \frac{1}{\tau}$ — расстояние между брегговскими плоскостями в кристалле.

Из (85,6) непосредственно следует, что вклад в рассеяние будут давать только значения τ , удовлетворяющие неравенству

$$\tau \leq \frac{k}{\pi}, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{2} \leq d. \quad (85,7)$$

Для нейтронов с длиной волны, превышающей удвоенное наибольшее расстояние между кристаллическими плоскостями, брегговское условие (для рассеяния с $\theta \neq 0$) не выполняется ни для одного из микрокристаллов. Такие нейтроны проходят через кристалл, почти не рассеиваясь в стороны. На этом свойстве основано действие фильтров,

обрезающих в проходящем пучке нейтронов коротковолновую область спектра. В качестве фильтров берутся микрокристаллические вещества, обладающие малым поглощением нейтронов и свойством только когерентного спинового рассеяния, например окись бериллия ($d = 4,4 \text{ \AA}$) или графит ($d = 6,7 \text{ \AA}$). На рис. 68, заимствованном из работы [3],

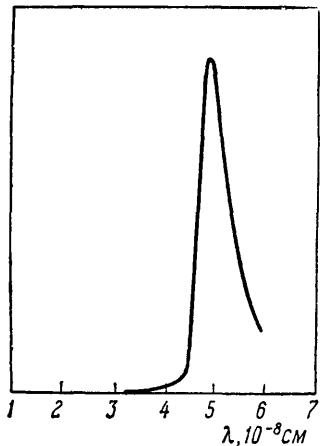


Рис. 68. Спектр нейтронов теплового реактора, профильтрованных через окись бериллия.

приведен участок спектра нейтронов теплового реактора, профильтрованных поликристаллами окиси бериллия. Используя графит в качестве фильтра, удалось получить нейтроны с энергией около 18°K .

Для усреднения (85,4) по всем направлениям τ введем полярную ось вдоль направления $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$, обозначим полярные координаты вектора τ τ , ϑ , φ и вычислим интеграл

$$D \equiv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - 2\pi\tau).$$

Перейдем от переменных ϑ , φ к переменным $2\pi\tau_x$ и $2\pi\tau_y$; тогда, принимая во внимание, что

$$d\vartheta d\varphi = \frac{d(2\pi\tau_x) d(2\pi\tau_y)}{4\pi^2\tau^2 \cos \vartheta}$$

и что компоненты вектора $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ по осям x и y равны нулю из-за выбора полярной оси, можно написать:

$$D = (4\pi^2\tau^2)^{-1} \iint \delta(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| - 2\pi\tau_z) \delta(2\pi\tau_x) \delta(2\pi\tau_y) \frac{d(2\pi\tau_x) d(2\pi\tau_y)}{\cos \vartheta};$$

производя интегрирование, получим подынтегральное выражение при $\tau_z = \tau$ и $\cos \vartheta = 1$:

$$D = (2\pi^2\tau^2)^{-1} \delta(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| - 2\pi\tau). \quad (85,8)$$

При упругом рассеянии $k = k'$ и $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, где θ — угол рассеяния. Обозначая среднее значение сечения рассеяния (85,4) $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$, получим, учтя (85,8):

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \equiv \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\sigma(k')}{d\Omega} d\varphi d\vartheta = \frac{|a|^2}{2B\tau^2} \delta\left(2k \sin \frac{\theta}{2} - 2\pi\tau\right). \quad (85,9)$$

Для определения интегрального сечения рассеяния нейтронов проинтегрируем (85,9) по углу рассеяния: $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$,

$$\sigma_\tau = \int \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = \frac{2\pi^2}{Bk^2\tau} |a|^2.$$

Полное сечение рассеяния получим из σ_τ после суммирования по всем допустимым значениям векторов обратной решетки

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{Bk^2} |a|^2 \sum_{\tau \leq \frac{k}{\pi}} \frac{1}{\tau}. \quad (85,10)$$

Для простой кубической решетки ($B = d^3$) граничная длина волны нейтрона, начиная с которой происходит упругое когерентное рассеяние, определяется отражением от шести плоскостей $\{(100), (010), \dots\}$, для каждой из которых $\frac{1}{\tau} = 2d$, следовательно, граничная длина волны $\lambda_{гр} = 2d$, а соответствующее сечение рассеяния получим из (85,10):

$$\sigma_{гр} = 6 \frac{2\pi^2 |a|^2}{k_{гр}^2 d^2} = \frac{3}{\pi} \sigma_0, \quad \text{где } \sigma_0 = 4\pi |a|^2.$$

С уменьшением длины волны все большее число плоскостей начинает участвовать в отражении и наблюдаемое сечение при любой длине волны определяется суммой вкладов от всех отражающих плоскостей, причем согласно (85,10) вклад каждой группы плоскостей изменяется обратно пропорционально k^2 (т. е. энергии нейтрона). При энергиях порядка 0,1 эв отражает уже такое большое число групп плоскостей, что сечение становится плавно меняющейся функцией энергии. На рис. 69 приведен график изменения полного эффективного сечения рассеяния нейтронов на поликристаллическом серебре. На рисунке ясно видны вклады от отдельных групп кристаллических плоскостей.

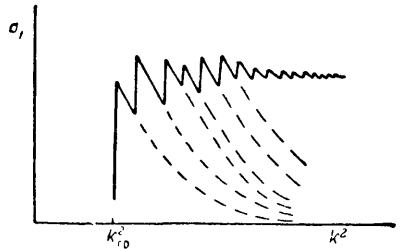


Рис. 69. Зависимость полного эффективного сечения рассеяния нейтронов на поликристаллическом серебре от энергии.

§ 86. Изотопическая некогерентность рассеянных нейтронных волн

Согласно квантовой механике всякое рассеяние, сопровождающееся изменением внутреннего состояния (спин, энергия и т. д.) рассеивающего ядра, является некогерентным, так как изменение квантового состояния является причиной отсутствия интерференции. Это понятие когерентности относится уже к одному рассеивателю. К такому типу некогерентности относятся некогерентность, обусловленная неупругим рассеянием, и рассмотренная выше спиновая некогерентность (§ 85).

При исследовании рассеянных волн от системы рассеивателей, расположенных в узлах кристаллической решетки не возникает дополнительная некогерентность только при строго фиксированном расположении