$\frac{4\pi V\,\omega^2\,d\omega}{(2\pi c)^3}$ и суммируя по состояниям поляризации, получим:

$$\bar{f}=\frac{\hbar k^2\mu V}{2\pi^2 MNc^2}\int\limits_0^{\varepsilon/\hbar}\omega\left(1+\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)-1}\right)d\omega.$$

При

$$T\ll\Theta,\quad \bar{f}\approx\frac{\varepsilon_0\mu V}{2\pi^2 NMc^3\hbar}\left(\frac{\varepsilon_0}{\hbar}\right)^2.$$

Если принять во внимание, что $\omega^3_{max}=6\pi^2c^3\frac{N}{V}$ и $\hbar\omega_{max}=\Theta$, то

$$\bar{f}\approx\frac{\mu}{M}\left(\frac{\varepsilon_0}{\Theta}\right)^3.$$

Таким образом, при

$$\frac{(\hbar\pi\tau_{min})^2}{2\mu}\leqslant\varepsilon_0\leqslant\Theta$$

и $T\ll\Theta$ сечение рассеяния с испусканием одного фонона пропорционально $\frac{\mu}{M}\left(\frac{\varepsilon_0}{\Theta}\right)^3$, а сечение рассеяния с испусканием двух фононов пропорционально $\left(\frac{\mu}{M}\right)^2\left(\frac{\varepsilon_0}{\Theta}\right)^6$. Поэтому при $\varepsilon_0\ll\Theta$ при неупругом рассеянии существенны только процессы с испусканием только одного фонона. С ростом энергии нейтрона становятся существенны и процессы множественного рождения фононов. Эти процессы мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 89. Неупругое рассеяние нейтронов кристаллами при множественном рождении и поглощении фононов

Предположим, что конечное состояние кристалла, характеризуемое набором квантовых чисел $\{\nu'_s\}$, отличается от начального состояния $\{\nu_s\}$ более чем одним квантовым числом ν'_s. Эффективное сечение рассеяния в единицу телесного угла (отнесенное к одному ядру) определяется формулой (87,19):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ba}=\frac{\mu^2}{(2\pi)^2N\hbar^4}\frac{k'}{k}\,|(b\,|\,V\,|\,a)|^2, \tag{89,1}$$

где

$$k'=\left\{k^2+\frac{1}{\hbar}\sum_s\omega_s(\nu_s-\nu'_s)\right\}^{1/2}, \tag{89,2}$$

а квадрат матричного элемента

$$|(b\,|\,V|\,a)|^2=|A|^2\sum_{\{\nu'_s\}}\Big|\sum_n\exp\{i\boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\}\prod_s M_{\nu'_s\nu_s}\Big|^2. \tag{89,3}$$

Как показано в предыдущем параграфе, при малых энергиях нейтрона возможны только однофононные процессы. Множественное излучение фононов существенно при $\varepsilon_0 > \Theta$.

Рассмотрим нейтроны с энергией $\varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$, при которой $kd \gg 1$. В этом случае интерференционные явления несущественны, так как структурные множители

$$|\sum_n \exp\{i\boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\}|^2 = N,$$

и (89,3) можно записать в виде

$$|(b|V|a)|^2 = N|A|^2 \sum_{\{\nu_s'\}} \left|\prod_s M_{\nu_s' \nu_s}\right|^2, \tag{89,4}$$

где матричные элементы $M_{\nu_s' \nu_s}$ берутся при одном фиксированном значении $\boldsymbol{n}$, которое для удобства можно выбрать равным нулю. Тогда функция $F(\boldsymbol{qn})$ согласно (87,11) будет иметь только два значения:

$$F(\boldsymbol{qn}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_3 > 0; \\ 1, & \text{если } q_3 \leqslant 0. \end{cases}$$

В связи с тем, что матричные элементы $M_{\nu_s+\rho, \nu_s}$ в силу (87,16) пропорциональны $\left\{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{e}_s \sqrt{\frac{2\hbar}{MN\omega_s}}\right\}^\rho$, в (89,4) существенны только элементы $M_{\nu_s \nu_s}$, M_{ν_s+1, ν_s}, M_{ν_s-1, ν_s}.

Чтобы упростить выкладки, дальнейшие вычисления проведем для модели эйнштейновского кристалла, т. е. предположим, что все фононы решетки обладают одной частотой: $\omega(q) = \omega_0$.

Рассмотрим сечение $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+}$, соответствующее испусканию l фононов. При $l \ll N$ согласно (88,2)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+} = \frac{\mu^2 |A|^2 k'}{(2\pi)^2 \hbar^4 k} e^{-2W} |M_{\nu_s+1, \nu_s}|^{2l}.$$

Подставляя $|A|^2$ из (87,5 а) и M_{ν_s+1, ν_s} из (87,17), имеем:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+} = \frac{|a|^2 k' e^{-2W}}{k} \left[\frac{(\nu_s+1)(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{e}_s}{MN\hbar\omega_0}\right]^l,$$

где

$$k' = \sqrt{k^2 - \hbar^{-1} 2\mu l \omega_0}, \quad \boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}.$$

Усредним полученное выражение по начальным состояниям и просуммируем по всем конечным состояниям b, обладающим одинаковой энергией. Получим:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{l+} = \sum_b \frac{|a|^2 k' e^{-2W}}{k} \left[\frac{(\bar{\nu}_s+1)(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{e}_s}{MN\hbar\omega_0}\right]^l;$$

здесь $\sum_b$ обозначает суммирование по состояниям поляризации фононов и по всем возможным типам испускаемых фононов (при $q_3 \leqslant 0$). Суммирование по поляризациям дает $\sum [(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,\boldsymbol{e}_s]^2 = (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2$. Суммирование по всем возможным типам фононов сводится к умножению одного из слагаемых суммы (они все одинаковы) на $(l!)^{-1}\left(\frac{N}{2}\right)^l$, так как из $N/2$ типов фононов, соответствующих $N/2$ возможным значениям вектора q (при $q_3 \leqslant 0$), можно выбрать l фононов $(l!)^{-1}\left(\frac{N}{2}\right)^l$ способами. Итак,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l+} = |a|^2 \frac{\sqrt{k^2 - 2\mu l\omega_0\hbar^{-1}}}{k} e^{-2W} (\bar{\nu}+1)^l \frac{1}{l!} \left\{\frac{(p-p')^2}{2M\hbar\omega_0}\right\}^l, \quad (89,5)$$

где a — длина рассеяния на одном ядре; W — определяется формулой (87,22);

$$\bar{\nu} = \left(\exp\left\{\frac{\hbar\omega_0}{T}\right\} - 1\right)^{-1}. \quad (89,6)$$

Если $R \equiv \frac{(p-p')^2}{2M\hbar\omega_0} < 1$, то из (89,5) следует, что наиболее вероятным будет упругое рессеяние, а рассеяние с испусканием l фононов будет в $\frac{1}{l!}R^l$ раз менее вероятно. Если же $R > 1$, то вероятность упругого рассеяния мала, а вероятность рассеяния с испусканием l фононов вначале возрастает с ростом l вплоть до $l_{\max} = [R] - 1$, где $[R]$ означает наибольшее целое число, заключенное в R, а затем снова падает при дальнейшем возрастании $l > l_{\max}$. В связи с тем, что $R \sim \frac{\mu\varepsilon_0}{M\hbar\omega_0}$, излучению многих фононов благоприятствуют возрастание отношения энергии нейтрона ε_0 к энергии фонона $\hbar\omega_0$ и малые значения масс рассеивающих ядер. Множественному рождению фононов благоприятствует также возрастание температуры кристалла из-за возрастания $\bar{\nu}$.

Эффективное сечение рассеяния, связанное с поглощением λ фононов, получается аналогичным путем и имеет вид

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{\lambda-} = |a|^2 \frac{(k^2 + 2\mu\lambda\omega_0\hbar^{-1})^{1/2}}{k} e^{-2W} \frac{(\bar{\nu})^\lambda}{\lambda!} \left\{\frac{(p-p')^2}{2M\hbar\omega_0}\right\}^\lambda. \quad (89,7)$$

Это сечение быстро стремится к нулю при понижении температуры кристалла из-за уменьшения $\bar{\nu}$.

Легко также получить эффективное сечение рассеяния, при котором излучается l фононов, а поглощается λ фононов:

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{l+,\,\lambda-} = |a|^2 \frac{\left[k - \frac{2\mu}{\hbar}\omega_0(l-\lambda)\right]^{1/2} e^{-2W}}{k} \frac{(\bar{\nu})^\lambda (\bar{\nu}+1)^l}{l!\,\lambda!} (R)^{l+\lambda}. \quad (89,8)$$

Введем сокращенные обозначения:

$$b \equiv \frac{(\bar{\nu}+1)(p-p')^2}{2M\hbar\omega_0} = (\bar{\nu}+1)\,R,$$

$$c \equiv \frac{\bar{\nu}(p-p')^2}{2M\hbar\omega_0} = \bar{\nu}R; \tag{89,9}$$

тогда (89,8) примет вид

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{l+,\lambda-} = |a|^2 \frac{\left[k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\,\omega_0(l-\lambda)\right]^{1/2}}{k} e^{-2W}\frac{b^l c^\lambda}{l!\,\lambda!}. \tag{89,10}$$

В эйнштейновской модели кристалла W имеет вид

$$W \equiv \frac{1}{2}\sum_s \frac{\hbar\left(\bar{\nu}_s + \frac{1}{2}\right)}{MN\omega_s}\left|(k-k')\,e_s\right|^2 = \frac{(p-p')^2\left(\bar{\nu}+\frac{1}{2}\right)}{2M\hbar\omega_0} = \frac{b+c}{2}. \tag{89,11}$$

Если нас интересует сечение рассеяния, соответствующее определенному изменению волнового числа нейтрона, например $l-\lambda = r$ и $k' = k_r = \sqrt{k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\omega_0 r}$, то надо просуммировать (89,10) по всем значениям l и λ, удовлетворяющим равенству $l-\lambda=r$. Таким образом,

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k\to k_r} = |a|\frac{\sqrt{k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\,\omega_0 r}}{k} e^{-2W} b^r \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(bc)^\lambda}{(r+\lambda)!\,\lambda!}. \tag{89,12}$$

При низких температурах $\bar{\nu} \ll 1$, следовательно, $bc \ll 1$, и сечение рассеяния (89,12) примет вид

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k-k_r} = |a|\frac{\sqrt{k^2 - \frac{2\mu}{\hbar}\,\omega_0 r}}{k} e^{-2W}\frac{b^r}{r!}. \tag{89,13}$$

Учитывая (89,9), мы убедимся, что формула (89,13) совпадает с (89,5). Это указывает, что при низких температурах нейтрон может уменьшать свою энергию, только испуская фононы.

Для исследования другого предельного случая — высоких температур (когда $\bar{\nu} \gg 1$), удобно выразить (89,12) через функцию Бесселя первого рода. Пользуясь равенством

$$J_r(2\sqrt{z}) = z^{r/2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-z)^\lambda}{\lambda!\,(r+\lambda)!}$$

и учитывая, что при $\nu \gg 1$ $b \approx c$, можно написать:

$$b^r \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{b^{2\lambda}}{(r+\lambda)!\,\lambda!} = (i)^{-r} J_r(2ib).$$

Теперь сечение рассеяния (89,12), соответствующее потере нейтроном энергии $r\hbar\omega_0$ в результате испускания и поглощения фононов, примет вид

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k\to k_r}=|a|^2\frac{\left[k^2-\frac{2\mu}{\hbar}\omega_0 r\right]^{1/2}e^{-2W}}{k}(i)^{-r}J_r(2ib),\quad \overline{\nu}\gg 1. \qquad (89,14)$$

При $r\leqslant 2b$ и $b>2$ формула (89,14) может быть еще более упрощена, если использовать приближенное равенство:

$$(i)^{-r}J_r(2ib)\approx\frac{1}{\sqrt{4\pi b}}\exp\left\{2b-\frac{r^2}{4b}\right\}$$

и учесть, что согласно (89,11) при $b=c$ $W=b$. Тогда

$$\overline{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)}_{k\to k_r}\approx|a|^2\frac{\left[k^2-\frac{2\mu}{\hbar}\omega_0 r\right]^{1/2}}{k\sqrt{4\pi b}}e^{-\frac{r^2}{4b}}$$

при

$$\overline{\nu}\gg 1,\quad r\leqslant 2b>4.$$

§ 90. Показатель преломления нейтронных волн в веществе

Исследуем прежде всего взаимодействие нейтронной волны с идеальным кристаллом. Покажем, что если длина волны нейтронов значительно больше расстояний между соседними атомами в кристалле, то взаимодействие нейтрона с кристаллом можно описать, заменив кристалл непрерывной средой с показателем преломления нейтронов n. В этом случае $k\ll\pi\tau_{\min}$ и согласно результатам, полученным в § 85, отсутствует упругое рассеяние нейтронных волн во все направления, кроме направления вперед.

Уравнение Шредингера для нейтронов в кристалле можно записать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi+V(r)\psi=E\psi, \qquad (90,1)$$

где $V(r)$ — потенциальная энергия нейтрона. Взаимодействие между нейтроном и кристаллом выразим через псевдопотенциал Ферми (§ 87), т. е.

$$V(r)=\frac{2\pi\hbar^2}{\mu}\sum_j a_j\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j), \qquad (90,2)$$

где суммирование распространяется на все ядра кристалла; a_j — длина когерентного рассеяния медленных нейтронов j-м ядром; $\boldsymbol{r}_j$ — радиус-вектор, определяющий положение этого ядра в кристалле. Для простоты в дальнейшем мы будем предполагать, что все ядра кристалла тождественны и не обладают спином. Подставив (90,2) в (90,1),