

Теперь сечение рассеяния (89,12), соответствующее потере нейтроном энергии  $r\hbar\omega_0$  в результате испускания и поглощения фононов, примет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{k \rightarrow k_r} = |a|^2 \frac{\left[ k^2 - \frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 r \right]^{1/2} e^{-2W}}{k} (i)^{-r} J_r(2ib), \quad \bar{v} \gg 1. \quad (89,14)$$

При  $r \leq 2b$  и  $b > 2$  формула (89,14) может быть еще более упрощена, если использовать приближенное равенство:

$$(i)^{-r} J_r(2ib) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi b}} \exp\left\{2b - \frac{r^2}{4b}\right\}$$

и учесть, что согласно (89,11) при  $b = c$   $W = b$ . Тогда

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{k \rightarrow k_r} \approx |a|^2 \frac{\left[ k^2 - \frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 r \right]^{1/2}}{k \sqrt{4\pi b}} e^{-\frac{r^2}{4b}}$$

при

$$\bar{v} \gg 1, \quad r \leq 2b > 4.$$

## § 90. Показатель преломления нейтронных волн в веществе

Исследуем прежде всего взаимодействие нейтронной волны с идеальным кристаллом. Покажем, что если длина волны нейтронов значительно больше расстояний между соседними атомами в кристалле, то взаимодействие нейтрона с кристаллом можно описать, заменив кристалл непрерывной средой с показателем преломления нейтронов  $n$ . В этом случае  $k \ll \pi\tau_{\min}$  и согласно результатам, полученным в § 85, отсутствует упругое рассеяние нейтронных волн во все направления, кроме направления вперед.

Уравнение Шредингера для нейтронов в кристалле можно записать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + V(r) \psi = E\psi, \quad (90,1)$$

где  $V(r)$  — потенциальная энергия нейтрона. Взаимодействие между нейтроном и кристаллом выразим через псевдопотенциал Ферми (§ 87), т. е.

$$V(r) = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \sum_j a_j \delta(r - r_j), \quad (90,2)$$

где суммирование распространяется на все ядра кристалла;  $a_j$  — длина когерентного рассеяния медленных нейтронов  $j$ -м ядром;  $r_j$  — радиус-вектор, определяющий положение этого ядра в кристалле. Для простоты в дальнейшем мы будем предполагать, что все ядра кристалла тождественны и не обладают спином. Подставив (90,2) в (90,1),

получим уравнение

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi \sum_j a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)\psi, \quad (90,3)$$

где  $k = \hbar^{-1}\sqrt{2\mu E}$  — волновой вектор нейтрона в вакууме.

Если длина волны нейтрона значительно больше расстояния между ядрами, то можно усреднить потенциальную энергию (90,2) по объему кристалла. Заменяем суммирование по  $j$  в (90,2) интегрированием по объему:

$$\sum_j \dots \rightarrow \int \dots N_0 d\tau,$$

где  $N_0$  — число ядер в единице объема кристалла; получим:

$$V = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu} a N_0.$$

Уравнение Шредингера с усредненной таким образом потенциальной энергией примет вид

$$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi N_0 a\psi.$$

Его решение изображается плоской волной  $\psi = ce^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}$  с волновым вектором, определяющимся через длину рассеяния соотношением

$$K^2 = k^2 - 4\pi N_0 a. \quad (90,4)$$

В общем случае длина рассеяния комплексна,  $a = \alpha + i\beta$ , поэтому волновой вектор  $\mathbf{K}$  будет также комплексным.

Определим показатель преломления  $n$  и коэффициент поглощения  $\kappa$  с помощью равенств

$$n = \frac{1}{k} \operatorname{Re} K, \quad \kappa = 2\operatorname{Im} K. \quad (90,5)$$

При условии  $\kappa \ll k$ , подставляя (90,4) в (90,5), получим простые формулы для показателя преломления и коэффициента поглощения:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1 - 4\pi N_0 \alpha k^{-2}}, \\ \kappa &= -4\pi N_0 \beta (k^2 - 4\pi N_0 \alpha)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (90,5a)$$

Длина рассеяния медленных нейтронов для большинства ядер положительна, поэтому  $n < 1$ . Мнимая часть длины рассеяния  $\beta < 0$ .

Перейдем теперь к исследованию взаимодействия нейтронов с системой ядер, произвольно расположенных в пространстве. Строгое изучение взаимодействия нейтрона с системой многих ядер очень сложно, так как относится к проблеме многих тел. Однако приближенно это взаимодействие можно свести к задаче многократного рассеяния на отдельных рассеивателях. При этом решение сложной проблемы многих тел выразится через свойства индивидуальных рассеивателей. Обычно такое приближенное рассмотрение базируется на двух предположениях:

1) свойства индивидуальных рассеивателей не изменяются связью между ними;

2) координаты, определяющие положение рассеивателей, рассматриваются как адиабатические параметры, т. е. рассеяние вычисляется при фиксированных положениях ядер, а затем результат усредняется по распределению координат рассеивателей во времени или в конфигурационном пространстве. Это предположение оправдывается, если смещение рассеивателей за время периода излучения мало по сравнению с длиной рассеянной волны.

Предположим для простоты, что система состоит из тождественных ядер, не обладающих спином. Взаимодействие каждого ядра с медленным нейтроном характеризуется, вообще говоря, комплексной длиной рассеяния (см. § 84). Положения ядер определяются радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Пусть функция  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)(d\mathbf{r})$ , где  $(d\mathbf{r}) \equiv d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N$ , определяет вероятность того, что ядро 1 находится в элементе объема  $d\mathbf{r}_1$  в точке  $\mathbf{r}_1$ , ядро 2 — в элементе объема  $d\mathbf{r}_2$  в точке  $\mathbf{r}_2$  и т. д. Если  $f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  — некоторая функция от  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ , то ее среднее значение по распределению  $P$  (конфигурационное усреднение) определим интегралом

$$\langle f \rangle \equiv \int f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) P(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) (d\mathbf{r}). \quad (90,6)$$

Пусть падающая нейтронная волна изображается функцией  $\varphi(\mathbf{r})$ , удовлетворяющей уравнению

$$(\Delta + k^2) \varphi(\mathbf{r}) = 0. \quad (90,7)$$

Рассеянная всеми ядрами волна будет функцией точки наблюдения  $\mathbf{r}$  и координат всех ядер:  $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Нас будет интересовать среднее значение по распределению ядер квадрата модуля полной волновой функции, которое можно представить в виде

$$\langle |\varphi + \Phi|^2 \rangle = |\varphi + \langle \Phi \rangle|^2 + \langle |\Phi|^2 \rangle - |\langle \Phi \rangle|^2.$$

Из этого выражения следует, что рассеяние, определяемое  $\langle \Phi \rangle$ , является когерентным, так как оно интерферирует с падающей волной  $\varphi$ . Рассеяние же, определяемое выражением  $\langle |\Phi|^2 \rangle - |\langle \Phi \rangle|^2$ , является абсолютно некогерентным. Если тождественные ядра занимают строго фиксированные положения, то  $\Phi = \langle \Phi \rangle$  и все излучение будет когерентным, конечно, за исключением некогерентности, обусловленной самим индивидуальным излучателем (§ 85).

Согласно § 43 общее решение уравнения, описывающего рассеяние волны  $\varphi(\mathbf{r})$  на потенциале  $V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2\mu} u(\mathbf{r})$ , можно представить в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} u(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') (d\mathbf{r}'). \quad (90,8)$$

При исследовании рассеяния медленных нейтронов в качестве потенциальной энергии взаимодействия можно использовать псевдопотенциал

Ферми, т. е. положить  $u(\mathbf{r}) = 4\pi a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ , где  $\mathbf{r}_j$  — координата рассеивающего ядра, и решать интегральное уравнение (90,8) в первом борновском приближении. Тогда получим:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + aF(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \varphi(\mathbf{r}_j), \quad (90,9)$$

где

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \equiv - \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}. \quad (90,10)$$

Первое слагаемое в (90,9) представляет собой падающую волну, а второе — рассеянную. Следовательно, можно написать:

$$\Phi_{\text{расс}} = aF(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \varphi(\mathbf{r}_j). \quad (90,11)$$

Таким образом, оператор  $aF(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$  «превращает» падающую на ядро волну  $\varphi(\mathbf{r}_j)$  в рассеянную волну.

Применим соотношение (90,11) к системе рассеивателей. На каждое ядро  $j$  будет действовать волна, равная сумме падающей и рассеянных волн от всех остальных ядер, т. е.

$$\Phi_j(\mathbf{r}_j) = \varphi(\mathbf{r}_j) + \sum_{l \neq j} aF(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l) \Phi_l(\mathbf{r}_l). \quad (90,12)$$

Рассеянная каждым ядром волна вместе с падающей дадут суммарную волну:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N aF(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \Phi_j(\mathbf{r}_j). \quad (90,13)$$

Система уравнений (90,12), (90,13) является основной системой уравнений многократного рассеяния медленных нейтронов на ядрах.

Так же как и в оптике, в нейтронной физике показатель преломления вещества по отношению к нейтронной волне определяется изменением фазовой скорости (длины волны) суммарной (падающей плюс все рассеянные) волны в веществе, возникающим из-за разности фаз между падающей и рассеянными волнами. Таким образом, для определения показателя преломления вещества надо исследовать только когерентную часть волн.

Найдем уравнение, определяющее закон распространения когерентных волн  $\langle \Phi \rangle$  в веществе. Для этого проведем конфигурационное усреднение системы уравнений (90,12), (90,13). Получим:

$$\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^N a \int F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \frac{N_0(\mathbf{r}_j)}{N} \langle \Phi_j(\mathbf{r}_j) \rangle_j (d\mathbf{r})_j, \quad (90,14)$$

где

$$\langle \Phi_j(\mathbf{r}_j) \rangle_j \equiv \int \Phi_j(\mathbf{r}_j) P(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) (d\mathbf{r})_j;$$

$$(d\mathbf{r})_j \equiv \frac{(d\mathbf{r})}{dr_j}; \quad P(\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)}{P(\mathbf{r}_j)}$$

— условная вероятность, определяющая при данном значении  $\mathbf{r}_j$  распределение всех остальных ядер;  $N_0(\mathbf{r}_j) = NP(\mathbf{r}_j)$  — средняя плотность ядер в точке  $\mathbf{r}_j$ . Учитывая тождественность ядер, уравнение (90,14) можно записать в виде

$$\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = \varphi(\mathbf{r}) + a \int F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) N_0(\mathbf{r}_j) \langle \Phi_j(\mathbf{r}_j) \rangle_j (d\mathbf{r})_j. \quad (90,15)$$

Функция  $\langle \Phi_j(\mathbf{r}_j) \rangle_j$  представляет собой поле, действующее на ядро  $j$ , усредненное по всем возможным конфигурациям остальных ядер. Оно отличается от среднего поля полем, излучаемым одним рассеивателем. Приближенно можно заменить  $\langle \Phi_j(\mathbf{r}_j) \rangle_j$  средним полем, т. е. положить  $\langle \Phi_j(\mathbf{r}_j) \rangle_j \approx \gamma \langle \Phi(\mathbf{r}_j) \rangle \approx \langle \Phi(\mathbf{r}_j) \rangle$ , так как множитель  $\gamma$ , учитывающий отличие действующего поля от среднего, равен 1 с точностью до членов порядка  $N^{-1}$ . В этом приближении уравнение (90,15) примет вид

$$\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = \varphi(\mathbf{r}) + a \int N_0(\mathbf{r}_j) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \langle \Phi(\mathbf{r}_j) \rangle (d\mathbf{r})_j.$$

Под действием на полученное интегральное уравнение оператором  $\Delta + \mathbf{k}^2$ ; тогда, принимая во внимание (90,7) и  $(\Delta + \mathbf{k}^2) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = \pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ , получим:

$$[\Delta + \mathbf{K}^2(\mathbf{r})] \langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = 0, \quad (90,16)$$

где

$$\mathbf{K}^2(\mathbf{r}) = \mathbf{k}^2 - 4\pi N_0(\mathbf{r}) a. \quad (90,17)$$

Итак, когерентная часть волны  $\langle \Phi \rangle$  удовлетворяет волновому уравнению (90,16) с волновым вектором  $\mathbf{K}$ , зависящим от длины рассеяния на каждом ядре и средней плотности ядер, которая, вообще говоря, является функцией координат. Если  $N_0(\mathbf{r}) = \text{const}$ , то уравнение (90,17) совпадает с (90,4). При этом показатель преломления и коэффициент поглощения нейтронов веществом определяются соответственно формулами (90,5а).