

### § 93. Когерентное упругое рассеяние и эффективный комплексный потенциал

В этом параграфе мы будем предполагать, что упругое рассеяние является только когерентным, т. е. положим в первом приближении

$$I_\alpha \equiv t_\alpha - \langle t_\alpha \rangle = 0.$$

Тогда система уравнений (92,2) перейдет в систему уравнений:

$$\langle \Omega \rangle = 1 + B^{-1} \sum_\alpha \langle t_\alpha \rangle \langle \Omega_\alpha \rangle, \quad (93,1)$$

$$\langle \Omega_\alpha \rangle = 1 + B^{-1} \sum_\beta \langle t_\beta \rangle \langle \Omega_\beta \rangle. \quad (93,2)$$

Введем упрощающее предположение, обычно используемое во всех теориях многократного рассеяния, о пропорциональности среднего эффективного поля полному когерентному полю, т. е. положим  $\langle \Omega_\alpha \rangle = \gamma \langle \Omega \rangle$ , где  $\gamma$  — постоянная величина с точностью до членов порядка  $A^{-1}$ , совпадающая с единицей. В этом случае уравнение (93,1) перейдет в уравнение

$$\langle \Omega \rangle = 1 + B^{-1} U \langle \Omega \rangle \equiv 1 + B^{-1} T_y, \quad (93,3)$$

где

$$U \equiv \gamma \sum_\alpha \langle t_\alpha \rangle \quad (93,4)$$

и

$$T_y \equiv U \langle \Omega \rangle. \quad (93,5)$$

Оператор  $\langle \Omega \rangle$  позволяет вычислить волновую функцию упругого когерентного рассеяния  $\Psi_{k\nu}^y(r)$  для каждой «падающей» волны  $\Phi_a$ :

$$\Psi_a^y \equiv \Psi_{k\nu}^y(r) \varphi_0(\xi) = \langle \Omega \rangle \Phi_a. \quad (93,6)$$

Матричный элемент, определяющий сечение когерентного упругого рассеяния, вычисляется с помощью одного из равенств

$$T_{ba}^y = (\Phi_b, T_y \Phi_a) = (\Phi_b, U \langle \Omega \rangle \Phi_a) = (\chi_{k'\nu'}, U \Psi_{k\nu}^y).$$

Согласно (93,3) функция  $\Psi_{k\nu}^y$  должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\Psi_{k\nu}^y = \chi_{k\nu} + B^{-1} U \Psi_{k\nu}^y. \quad (93,7)$$

Интегральному уравнению (93,7) соответствует дифференциальное уравнение

$$(\hat{K}_r + U - \varepsilon_k) \Psi_{k\nu}^y = 0 \quad (93,8)$$

с граничным условием: при  $r \rightarrow \infty$   $\Psi_{k\nu}^y$  должна переходить в сумму падающей и рассеянных волн. Подставляя выражение оператора  $\hat{K}$  и  $\varepsilon_k$ , перепишем (93,8) в виде

$$\left( \Delta_r - \frac{2\mu}{\hbar^2} U + k^2 \right) \Psi_{k\nu}^y = 0. \quad (93,8a)$$

Пользуясь (91,16) и (93,4), представим потенциал, входящий в уравнение (93,8а), в следующем виде:

$$U = \gamma \sum_{\alpha} \langle t_{\alpha} \rangle \approx \sum_{\alpha} \langle t_{\alpha} \rangle = \\ = \sum_{\alpha} (\varphi_0 | V_{\alpha} | \varphi_0) + \sum_{\alpha} \int \frac{(\varphi_0 | V_{\alpha} | \Phi_n) (\Phi_n | t_{\alpha} | \varphi_0)}{E_{\alpha} - E_n + i\eta} \rho(E_n) dE_n, \quad (93,9)$$

где  $E_n$  и  $\Phi_n$  — собственные значения и собственные функции оператора  $H_0$ ;  $\rho(E_n)$  — плотность числа состояний в области энергий  $E_n$ .

Потенциальная энергия  $U$ , определяемая (93,9), является функцией энергии (или  $k^2$ ) относительного движения нейтрона и ядра и их относительного расстояния:

$$U = U(k, r).$$

Предположим, что ядро имеет большие размеры; тогда, пренебрегая поверхностными эффектами и предполагая, что плотность ядра постоянна, можно описать свойства ядерного вещества по отношению к движению внешнего нейтрона показателем преломления, зависящим только от волнового числа  $k$ , т. е. положить  $U = U(k)$ . В этом случае в импульсном представлении оператор потенциальной энергии изобразится диагональной матрицей

$$(\mathbf{k}' | U | \mathbf{k}) = U(k) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

а в координатном представлении этот оператор будет функцией разности координат:

$$(\mathbf{r}' | U | \mathbf{r}) = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

При постоянном значении потенциальной энергии  $U$  внутри ядра решение (93,8а) можно искать в виде плоской волны с соответствующими граничными условиями на поверхности ядра

$$\Psi_{k\nu}^y = C \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad (93,10)$$

где постоянная  $C$  выбирается так, чтобы выполнялось условие нормировки

$$(\Psi_{k\nu}^y, \Psi_{k\nu}^y) = 1.$$

Подставляя (93,10) в (93,8а), получим уравнение, связывающее волновые векторы нейтрона  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$  соответственно внутри и вне ядра:

$$\mathbf{q}^2 = \mathbf{k}^2 - u, \quad (93,11)$$

где

$$u = \frac{2\mu}{\hbar^2} U. \quad (93,11a)$$

Введем показатели преломления  $n$  и поглощения  $\kappa$  с помощью соотношений

$$n = \frac{1}{k} \operatorname{Re} q, \quad \kappa = 2 \operatorname{Im} q. \quad (93,12)$$

Таким образом, движение нуклона в ядерном веществе, соответствующее когерентному рассеянию, описывается плоскими волнами, распространяющимися в «сплошной» среде, характеризуемой определенными показателями преломления и поглощения, зависящими от длины волны (энергии) нейтрона. Эти величины характеризуют коллективное взаимодействие всех нуклонов ядра с данным нуклоном, так как плоская волна (93,10), отображающая движение нуклона, является суперпозицией всех когерентно рассеянных волн от каждого нуклона ядра.

Из (93,12) и (93,11) следует, что

$$\kappa = -\frac{1}{nk} \operatorname{Im} u. \quad (93,13)$$

Если выполняется неравенство  $\kappa \ll k$ , то показатель преломления ядерного вещества определяется из (93,12) простой формулой

$$n = \left(1 - \frac{1}{k^2} \operatorname{Re} u\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (93,14)$$

Показатель поглощения (93,13) непосредственно определяет макроскопическое эффективное сечение  $\Sigma_{in}$  всех процессов, ведущих к ослаблению первоначального пучка частиц:

$$\Sigma_{in} \equiv N_1 \sigma_{in} = \kappa = -\frac{1}{nk} \operatorname{Im} u,$$

где  $N_1$  — число нуклонов в единице объема. Соответствующая вероятность переходов в единицу времени в единице объема вещества получится при умножении  $\Sigma_{in}$  на плотность потока частиц в ядерном веществе

$$W_{in} = \frac{\hbar nk}{\mu} \Sigma_{in} = -\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} (\Psi_{k\nu}^y, U \Psi_{k\nu}^y). \quad (93,15)$$

Соотношение (93,15) является частным случаем общей теоремы, связывающей вероятность всех процессов рассеяния с упругим рассеянием в первоначальном направлении. Как уже отмечалось ранее, всякое рассеяние (упругое и неупругое, включая ядерные реакции) должно сопровождаться ослаблением волны, движущейся в первоначальном направлении. Такое ослабление вызывается соответствующей интерференцией падающей волны с упруго рассеянной волной, движущейся в том же направлении. Этим и объясняется связь упругого рассеяния вперед с общей вероятностью всех других процессов рассеяния. Приведем здесь доказательство этой важной теоремы.

Матричный элемент оператора (93,5) упругого когерентного рассеяния вперед при учете (93,6) может быть записан в виде

$$T_{aa}^y \equiv (\Phi_a, T_y \Phi_a) = (\Phi_a, U \Psi_a^y), \quad (93,16)$$

где

$$\Psi_a^y = \Phi_a + B^{-1} U \Psi_a^y. \quad (93,17)$$

Подставляя значение  $\Phi_a$  из (93,17) в (93,16) получим:

$$T_{aa}^y = (\Psi_a^y, U \Psi_a^y) - (\Psi_a^y, U^\dagger B^{-1} U \Psi_a^y)^*, \quad (93,18)$$

где  $B = \varepsilon_a - K_r + i\tau_l$ . При написании (93,18) мы использовали равенство

$$(B^{-1} U \Psi_a^y, U \Psi_a^y) = (U \Psi_a^y, B^{-1} U \Psi_a^y)^* = (\Psi_a^y, U^\dagger B^{-1} U \Psi_a^y)^*.$$

Взяв мнимую часть от обеих сторон равенства (93,18) и используя соотношение

$$\lim_{\tau_l \rightarrow 0} \frac{\eta}{(\varepsilon_a - K_r)^2 + \tau_l^2} = \pi \delta(\varepsilon_a - K_r),$$

получим:

$$\text{Im } T_{aa}^y = \text{Im} (\Phi_a^y, U \Psi_a^y) - \pi (\Psi_a^y, U^\dagger \delta(\varepsilon_a - K_r) U \Psi_a^y)^*. \quad (93,19)$$

Полагая  $\Psi_a^y = \varphi_0 \Psi_{k\nu}^y$  и учитывая то, что оператор  $U$  не действует на внутренние координаты ядра, имеем:

$$(\Psi_a^y, U \Psi_a^y) = (\Psi_{k\nu}^y, U \Psi_{k\nu}^y).$$

Далее, поскольку  $\Psi_a^y = \langle \Omega \rangle \Phi_a$  и  $T_y = U \langle \Omega \rangle$ , можно написать:

$$\begin{aligned} (\Psi_a^y, U^\dagger \delta(\varepsilon_a - K_r) U \Psi_a^y)^* &= \langle \Omega \rangle \Phi_a, U^\dagger \delta(\varepsilon_a - K_r) U \langle \Omega \rangle \Phi_a)^* = \\ &= (\Phi_a, (T_y)^\dagger \delta(\varepsilon_a - K_r) T_y \Phi_a)^* = \sum_b |T_{ba}^y|^2 \delta(\varepsilon_a - \varepsilon_b). \end{aligned}$$

Теперь (93,19) примет вид

$$-\frac{2}{\hbar} \text{Im } T_{aa}^y = W_{in} + \sum_b W_{ba},$$

где  $W_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{ba}^y|^2 \delta(\varepsilon_a - \varepsilon_b)$  — вероятность упругого рассеяния из состояния  $a$  в состояние  $b$ ;  $\sum_b W_{ba}$  — вероятность всех упругих процессов;

$$W_{in} = -\frac{2}{\hbar} \text{Im} (\Psi_{k\nu}^y, U \Psi_{k\nu}^y) = \kappa \frac{\hbar n k}{\mu} \quad (93,20)$$

— вероятность всех неупругих процессов.

Итак, введение комплексной потенциальной энергии  $U = \gamma \sum_n \langle t_n \rangle$  позволяет рассматривать рассеяние нейтрона ядром как прохождение

нейтрона через непрерывную среду и отделить процесс упругого рассеяния без образования составного ядра от рассеяния и реакций с образованием составного ядра. Потенциальная энергия  $U$  является, вообще говоря, функцией координат, определяющих положение нуклона и ядра и их спиновые состояния. Характер этой зависимости определяется оператором  $t_\alpha$  эффективного рассеяния пары нуклонов и строением ядра в основном состоянии (через усреднение  $\langle \dots \rangle$ ).  $U$  также зависит от относительной энергии движения нуклона и ядра. Соответственно этому коэффициенты поглощения и преломления будут функциями энергии (длины волны) относительного движения нейтрона и ядра, т. е. ядерное вещество должно обладать дисперсией.

Исследованию зависимости действительной части потенциала от энергии ( $< 30$  Мэв) относительного движения нейтрона и ядра в области, где проявляются изолированные резонансы в сечениях, посвящена работа Аграновича и Давыдова [16]. В этой работе показано, что вещественная часть потенциала взаимодействия  $U$ , усредненная по состоянию  $\chi_{k\nu}$ , может быть представлена в виде

$$\operatorname{Re}(\chi_{k\nu}, U\chi_{k\nu}) = \operatorname{Re} \sum_{\alpha} \left\{ (\Phi_{0\alpha}, V_{\alpha} \Phi_{0\alpha}) + \sum_{\lambda} \frac{|R_{\lambda}^{\alpha}(\epsilon)|^2}{E - E_{\lambda} + Q_{\lambda\lambda}^{\alpha} + i\eta} + \right. \\ \left. + \sum_{\lambda, \mu} \frac{R_{\lambda}^{\alpha}(\epsilon)}{E - E_{\lambda} + Q_{\lambda\lambda}^{\alpha} + i\eta} Q_{\lambda\mu}^{\alpha} \frac{R_{\mu}^{\alpha}(\epsilon)}{E - E_{\mu} + Q_{\mu\mu}^{\alpha} + i\eta} + \dots \right\}, \quad (93,21)$$

где  $\Phi_{0\alpha} = \varphi_0 \chi_{k\nu}$ ;  $E_{\lambda}$  — энергетические уровни составного ядра;

$$R_{\lambda}^{\alpha}(\epsilon) \equiv (X_{\lambda}, V_{\alpha} \Phi_{0\alpha}).$$

Здесь  $X_{\lambda}$  — волновые функции составного ядра, соответствующие энергии  $E_{\lambda}$ ;

$$Q_{\lambda\mu}^{\alpha} \equiv (X_{\lambda}, \sum_{\beta \neq \alpha} V_{\beta} X_{\mu}).$$

Таким образом,  $Q_{\lambda\lambda}$  представляет среднюю энергию взаимодействия одного нуклона с  $A - 1$  нуклонами составного ядра, находящегося в состоянии, описываемом функцией  $X_{\lambda}$ . Поэтому  $Q_{\lambda\lambda} < 0$  и по абсолютной величине равно нескольким десяткам Мэв.

Из (93,11) следует, что при энергиях относительного движения  $\epsilon < 30$  Мэв действительная часть потенциальной энергии изменяется с энергией плавно. Для энергии  $\epsilon > 30$  Мэв, как мы увидим ниже, мнимая часть оптического потенциала делается столь значительной, что оптическая модель теряет смысл. При дальнейшем увеличении энергии (сотни Мэв) можно снова ввести представление об оптическом потенциале (см. § 104).

Рассмотренное выше сведение задачи многих тел к простой задаче двух тел носит в значительной степени формальный характер, так как

вычисление эффективного потенциала  $U$  требует решения системы уравнений (92,2) или приближенной системы (93,1) и (93,2), что можно сделать только при значительном упрощении задачи. Поэтому комплексный потенциал  $U$  приходится рассматривать как некоторый параметр, определяемый из экспериментальных данных по рассеянию нуклонов на ядрах. Напомним, что и в оптике коэффициенты поглощения и преломления света сложными телами, например стеклом, не вычисляются, а определяются из опыта.

Фешбах, Портер и Вайскопф [11] показали, что основные особенности сечения нейтронов в области до  $3 \text{ Мэв}$ , усредненные по резонансам, могут быть получены из оптической модели ядерных взаимодействий, если выбрать комплексный потенциал в виде прямоугольной ямы с параметрами

$$U = \begin{cases} -U_0(1 + i\zeta), & \text{если } r \leq R, \\ 0, & \text{если } r > R, \end{cases} \quad (93,22)$$

где

$$U_0 = 42 \text{ Мэв}, \quad \zeta = 0,03, \quad R = 1,45 \cdot A^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Такой потенциал, например, отражает наблюдаемое на опыте уменьшение эффективных сечений в области  $A \sim 40, 100 \not\approx A \not\approx 40$ , и большие значения сечений в области  $s$ -резонанса для  $A \sim 60$  и  $A \sim 150$  и  $p$ -резонанса в области  $A \sim 90$ . Теория описывает и некоторые другие детали экспериментальных зависимостей сечений от энергии и массового числа. Авторы отмечают согласие с экспериментом даже для  $A < 20$ .

Вычисленные на основе потенциальной энергии (93,22) угловые распределения упруго рассеянных нейтронов грубо воспроизводят экспериментальные данные Уолта и Баршала [17] по рассеянию  $1 \text{ Мэв}$  нейтронов ядрами и данные Чейса и Рорлиха [18] по угловому распределению упруго рассеянных протонов энергии  $\sim 20 \text{ Мэв}$ . Замена прямоугольного потенциала более медленно спадающим на границе ядра (спадание на протяжении  $0,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ ) приводит к лучшему согласию с экспериментом.

Исследованию влияния диффузности границы ядра на расчеты эффективных сечений упругого и неупругого рассеяния нуклонов на ядрах по методу оптической модели посвящены работы Немировского и ряда других исследователей [19]. В работе [20] отмечается, что хорошее согласие с экспериментальными данными по рассеянию протонов на ядрах от Fe до Pb получается при выборе потенциальной энергии чисто ядерного взаимодействия в виде, предложенном в работе Саксона и Вуда [21]:

$$U(r) = - \frac{U_0(1 + i\zeta)}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)}. \quad (93,23)$$

Радиус действия этого потенциала  $R_0 = 1,33 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  см, а параметр размытия края  $a = 0,5 \cdot 10^{-13}$  см. Обе эти величины мало изменяются с энергией у всех ядер, кроме легких. Параметры  $U_0$  и  $\zeta U_0$  существенно зависят от энергии. Их значение для трех энергий протонов приведены в таблице 32, заимствованной из [20]. Все величины в таблице 32 выражены в Мэв.

Таблица 32. Мнимая и действительная части «оптического потенциала»

Энергия протонов	$U_0$	$\zeta U_0$
5,25	52,5	0,9
17	$47 \pm 1$	$8,5 \pm 0,5$
31,5	$36 \pm 1$	$15,5 \pm 0,5$

Следует, конечно, иметь в виду, что сравнение теории с экспериментом затрудняется сложностью учета влияния некогерентного упругого рассеяния и влияния несферической формы ядра.

При исследовании поляризации нуклонов наряду с мнимой частью потенциала, учитывающий поглощение нуклонов, приходится вводить потенциальную энергию спин-орбитального взаимодействия. В этом случае потенциальная энергия взаимодействия может быть записана в виде

$$U = U_1(r) (1 + i\zeta) + U_2(r) \mathbf{ls}.$$

В выражении (93,23) предполагается, что мнимая и действительная части комплексного потенциала имеют одинаковую зависимость от радиуса. Исходя из предположения, что вследствие принципа Паули нуклоны малых энергий должны взаимодействовать преимущественно с поверхностью ядра, в некоторых работах допускалось, что мнимая часть потенциала отлична от нуля только на поверхности ядра. Так, например, Бджокланд, Фернбах и Шерман [22] выбирали радиальную зависимость оптического потенциала в форме

$$\operatorname{Re} U = \frac{U_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}, \quad \operatorname{Im} U = W_0 \exp\left\{-\left(\frac{r-R_0}{b}\right)^2\right\},$$

где  $U_0 = -40,3$  Мэв,  $R_0 = (1,2 \cdot A^{1/3} + 0,64) \cdot 10^{-13}$  см,  $a = 0,6 \cdot 10^{-13}$  см,  $W_0 = -8$  Мэв,  $b = 0,978 \cdot 10^{-13}$  см.

Как уже указывалось выше, оптическая модель ядерных взаимодействий позволяет объяснить значение эффективных сечений упругого и полного рассеяний нуклонов на ядрах, величину и угловую зависимость упругого рассеяния нуклонов на ядрах, поляризацию рассеянных ядрами нуклонов и др. На основе оптической модели ядерных взаимодействий, например, удалось предсказать, что среднее значение нейт-

ронной ширины, деленное на среднее расстояние между уровнями (так называемая «силовая функция», см. § 59), как функция радиуса ядра достигает при малых энергиях максимума при значениях радиуса ядра, удовлетворяющих равенству  $R = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ , где  $n$  — целое число, а  $\lambda$  — длина волны в ядерном веществе.

Однако с помощью оптической модели ядерных взаимодействий можно только указать, что происходит во входном канале при ядерной реакции, т. е. описать упругое рассеяние, не проходящее через стадию образования составного ядра, и указать совместную роль всех процессов, приводящих к неупругому рассеянию и реакциям. Таким образом, на основе этой модели нельзя выяснить взаимную роль и детали протекающих процессов по всем каналам, отличным от входного.

### § 94. Вычисление действительной части эффективного потенциала как решение задачи о самосогласованном поле

В предыдущих параграфах этой главы мы не учитывали тождественности рассеиваемого нуклона с другими нуклонами ядра, т. е. не учитывали принципа Паули. Чтобы при вычислении комплексной потенциальной энергии, определяющей взаимодействие нуклона с ядерным веществом, обойти трудность учета принципа Паули, можно вычислить потенциал, действующий на нуклон, находящийся в стационарном состоянии внутри ядерного вещества с той же энергией. Для этого надо ввести искусственные граничные условия на поверхности ядра, например потребовать, чтобы на поверхности ядра волновая функция, описывающая относительное движение этого нуклона и ядра, равнялась нулю. Такое упрощение задачи позволяет рассматривать все нуклоны системы одинаковым образом и, следовательно, легко учесть их тождественность. Кроме того, таким образом можно определить и потенциал, действующий на нуклоны ядра в его стационарном состоянии. Естественно, что, рассматривая стационарные состояния, мы сможем вычислить только действительную часть среднего потенциала взаимодействия данного нуклона со всеми остальными нуклонами ядра.

Переходя к новым граничным условиям, мы должны искать решение уравнения (91,16) в виде стоячих волн (см. § 63), т. е. положить

$$t_{ij} = V_{ij} + V_{ij} \mathcal{P} (E_a - H_0)^{-1} t_{ij}, \quad (94,1)$$

где знак  $\mathcal{P}$  перед оператором  $(E_a - H_0)^{-1}$  указывает, что надо взять главное значение от соответствующего интеграла. Индексами  $i$  и  $j$  отмечены номера взаимодействующих нуклонов.

Потенциал, действующий на нуклон номера  $i$ , при этом согласно (93,4) определится равенством (при  $\gamma \sim 1$ )

$$U_i = \sum_j' \langle t_{ij} \rangle, \quad (94,2)$$