ронной ширины, деленное на среднее расстояние между уровнями (так называемая «силовая функция», см. § 59), как функция радиуса ядра достигает при малых энергиях максимума при значениях радиуса ядра, удовлетворяющих равенству $R=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$, где n — целое число, а λ — длина волны в ядерном веществе.

Однако с помощью оптической модели ядерных взаимодействий можно только указать, что происходит во входном канале при ядерной реакции, т. е. описать упругое рассеяние, не проходящее через стадию образования составного ядра, и указать совместную роль всех процессов, приводящих к неупругому рассеянию и реакциям. Таким образом, на основе этой модели нельзя выяснить взаимную роль и детали протекания процессов по всем каналам, отличным от входного.

§ 94. Вычисление действительной части эффективного потенциала как решение задачи о самосогласованном поле

В предыдущих параграфах этой главы мы не учитывали тождественности рассеиваемого нуклона с другими нуклонами ядра, т. е. не учитывали принципа Паули. Чтобы при вычислении комплексной потенциальной энергии, определяющей взаимодействие нуклона с ядерным веществом, обойти трудность учета принципа Паули, можно вычислить потенциал, действующий на нуклон, находящийся в стационарном состоянии внутри ядерного вещества с той же энергией. Для этого надо ввести искусственные граничные условия на поверхности ядра, например потребовать, чтобы на поверхности ядра волновая функция, описывающая относительное движение этого нуклона и ядра, равнялась нулю. Такое упрощение задачи позволяет рассматривать все нуклоны системы одинаковым образом и, следовательно, легко учесть их тождественность. Кроме того, таким образом можно определить и потенциал, действующий на нуклоны ядра в его стационарном состоянии. Естественно, что, рассматривая стационарные состояния, мы сможем вычислить только действительную часть среднего потенциала взаимодействия данного нуклона со всеми остальными нуклонами ядра.

Переходя к новым граничным условиям, мы должны искать решение уравнения (91,16) в виде стоячих волн (см. § 63), т. е. положить

$$t_{ij}=V_{ij}+V_{ij}\mathcal{P}(E_a-H_0)^{-1}t_{ij}, \qquad (94,1)$$

где знак $\mathcal{P}$ перед оператором $(E_a-H_0)^{-1}$ указывает, что надо взять главное значение от соответствующего интеграла. Индексами i и j отмечены номера взаимодействующих нуклонов.

Потенциал, действующий на нуклон номера i, при этом согласно (93,4) определится равенством (при $\gamma\sim 1$)

$$U_i=\sum_j{}'\langle t_{ij}\rangle, \qquad (94,2)$$

где знак штрих у суммы указывает, что в ней отсутствует член с $j=i$. Усреднение $\langle t_{ij}\rangle$ в (94,2) производится по состояниям всех нуклонов $j\neq i$, соответствующим основному состоянию всего ядра. Если бы мы рассматривали бесконечно протяженное ядерное вещество, то из условия трансляционной симметрии следовало бы, что состояния отдельных нуклонов в ядре должны изображаться плоскими волнами. Предположим, что и в случае средних и тяжелых ядер можно использовать для описания состояний отдельных нуклонов волновые функции

$$\alpha_{q_i}(x_i)=s_i\frac{\exp(i\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{r}_i)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}, \tag{94,3}$$

где s_i — волновая функция, определяющая спиновые и зарядовые состояния нуклона; $\boldsymbol{q}_i$ — волновой вектор нуклона внутри ядерного вещества.

Если мы учтем, что оператор t_{ij}, входящий в (94,2), зависит только от разности координат $\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j$ (для простоты мы принимаем во внимание только обычные силы взаимодействия между нуклонами), то при использовании выражения (94,3) для описания состояний отдельных нуклонов в ядре усреднение в (94,2) можно проводить по основному состоянию всего ядра в целом (без исключения состояния i-го нуклона).

Представим волновую функцию основного состояния ядра в виде антисимметризованных произведений волновых функций отдельных нуклонов в ядре

$$\Phi_0=(A!)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu}(-1)^{\nu}P_{\nu}\prod_{i=1}^{A}\alpha_{q_i}(x_i), \tag{94,4}$$

где P_ν — одна из $A!$ возможных перестановок нуклонов. Перестановки нумеруются произвольно, но так, чтобы каждая последующая получалась из предыдущей перестановкой одной пары нуклонов; суммирование $\sum\limits_{\nu}$ производится по всем возможным перестановкам нуклонов.

В качестве следующего упрощающего шага заменим оператор E_a-H_0, входящий в операторное уравнение (94,1), оператором

$$\mathscr{E}_0-H_{\text{м}}, \tag{94,5}$$

где

$$H_{\text{м}}=\sum_{i=1}^{A}(\hat{K}_i+U_i) \tag{94,5а}$$

— оператор Гамильтона ядра в однонуклонном приближении, когда потенциальная энергия взаимодействия U_i нуклона с остальными нуклонами ядра вычисляется в приближении оптической модели ядерных взаимодействий, т. е. по формуле (94,2); $\mathscr{E}_0$ — энергия основного состояния ядра, вычисленная в том же приближении. Теперь операторное уравнение (94,1) перейдет в уравнение

$$t_{ji}=V_{ij}+V_{ij}\mathscr{P}(\mathscr{E}_0-H_{\text{м}})^{-1}t_{ij}. \tag{94,6}$$

Обозначим матричный элемент некоторого оператора d_{ij}, зависящего от координат двух нуклонов, на функциях типа (94,4), описывающих начальное и конечное состояния нуклонов i и j с импульсами* q_i, q_j и q'_i, q'_j, через

$$(q'_i, q'_j \,|\, d_{ij} \,|\, q_i q_j)_D. \tag{94,7}$$

Этот матричный элемент равен нулю, если хотя бы одно из четырех состояний q_i, q_j, q'_i, q'_j совпадает с состояниями q_l, занятыми другими нуклонами в состоянии ядра Φ_0 или если совпадают состояния q_i и q_j либо состояния q'_i и q'_j. Во всех остальных случаях

$$(q'_i q'_j \,|\, d_{ij} \,|\, q_i q_j)_D = (q'_i q'_j \,|\, d_{ij} \,|\, q_i q_j) - (q'_j q'_i \,|\, d_{ij} \,|\, q_i q_j). \tag{94,8}$$

Здесь матричные элементы без индекса D берутся на волновых функциях нуклонов i и j:

$$(q'_j q'_i \,|\, d_{ij} \,|\, q_i q_j) \equiv \int \overset{*}{\alpha}_{q'_i}(x_i)\, \alpha_{q'_j}(x_j)\, d_{ij}\, \alpha_{q_i}(x_i)\, \alpha_{q_j}(x_j)\, dx_i dx_j.$$

В последнем равенстве кроме интегрирования по пространственным переменным подразумевается суммирование по спиновым и зарядовым переменным. Второй матричный элемент в (94,8) соответствует обменному члену

$$(q'_i q'_j \,|\, d_{ij} \,|\, q_i q_j) \equiv \int \overset{*}{\alpha}_{q'_j}(x_i)\, \overset{*}{\alpha}_{q_i}(x_j)\, d_{ij}\, \alpha_{q_i}(x_i)\, \alpha_{q_j}(x_j)\, dx_i dx_j.$$

Теперь из операторного уравнения (94,6) можно легко получить уравнение для матриц операторов t_{ij} и V_{ij}:

$$(q'_i q'_j \,|\, t_{ij} \,|\, q_i q_j)_D = (q'_i q'_j \,|\, V_{ij} \,|\, q_i q_j)_D - \\ - \mathcal{P} \int \frac{(q'_i q'_j \,|\, V_{ij} \,|\, q''_i q''_j)_D\, (q''_i q''_j \,|\, t_{ij} \,|\, q_i q_j)_D}{\mathcal{E}(q''_i) + \mathcal{E}(q''_j) - \mathcal{E}(q_i) - \mathcal{E}(q_j)}\, dq''_i dq''_j, \tag{94,9}$$

где интеграл также обозначает интегрирование по пространственным переменным и суммирование по спиновым и зарядовым переменным; $\mathcal{E}(q)$ — энергия нуклона в приближении оптической модели, когда его состояние соответствует волновому числу q.

Легко показать, что матричные элементы типа (94,8) для операторов V_{ij} и t_{ij} содержат функции $\delta(q_i + q_j - q'_i - q'_j)$, выражающие закон сохранения импульса при столкновении двух нуклонов. Поэтому можно написать:

$$\left.\begin{aligned} (q'_i q'_j \,|\, t_{ij} \,|\, q_i q_j)_D &= (q'_i q'_j \,|\, \tilde{t}_{ij} \,|\, q_i q_j)_D\, \delta(q_i + q_j - q'_i - q'_j), \\ (q'_i q'_j \,|\, V_{ij} \,|\, q_i q_j)_D &= (q'_i q'_j \,|\, \tilde{V}_{ij} \,|\, q_i q_j)_D\, \delta(q_i + q_j - q'_i - q'_j). \end{aligned}\right\} \tag{94,10}$$

Используя (94,10), приведем уравнение (94,9) к виду

$$(q'_i q'_j \,|\, \tilde{t}_{ij} \,|\, q_i q_j)_D = (q'_i q'_j \,|\, \tilde{V}_{ij} \,|\, q_i q_j)_D - \\ - \mathcal{P} \int \frac{(q'_i q'_j \,|\, \tilde{V}_{ij} \,|\, q''_i q''_j)_D\, (q''_i q''_j \,|\, t_{ij} \,|\, q_i q_j)_D}{\mathcal{E}(q''_i) + \mathcal{E}(q_i + q_j - q''_i) - \mathcal{E}(q_i) - \mathcal{E}(q_j)}\, dq''_i; \tag{94,11}$$

* В этом параграфе используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

здесь значения q'_j и q''_j определяются значениями q_i, q_j, q'_i и q''_i из законов сохранения импульса:

$$q'_j = q_i + q_j - q'_i,$$
$$q''_j = q_i + q_j - q''_i.$$

Из свойств матричных элементов типа (94,7) следует, что в (94,11) волновые числа q''_i и q''_j должны отличаться от волновых чисел q_l, которые характеризуют состояния других нуклонов. Далее, если мы учтем, что интеграл в (94,11) вычисляется в смысле главного значения, т. е. при его вычислении исключается случай, когда q''_i и q''_j совпадают с начальными значениями q_i и q_j, то мы убедимся, что этот интеграл должен распространяться на все состояния, у которых q''_i и $q''_j = q_i + q_j - q''_i$ по абсолютной величине больше q_F, где q_F — радиус сферы Ферми, определяемый из условия

$$4 \int_0^{q_F} d\boldsymbol{q} = 4 \frac{4\pi}{3} q_F^3 = \frac{A}{\Omega}. \qquad (94,12)$$

Здесь Ω — объем ядра. Множитель 4 перед интегралом учитывает, что определенному значению $\boldsymbol{q}$ соответствуют четыре состояния, отличающихся знаком заряда или проекцией спина. Подставляя в (94,12)

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A, \text{ где } r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

получим:

$$q_F = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{r_0} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-1}. \qquad (94,13)$$

Выражение для энергии нуклона, входящее в (94,11), имеет вид

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{q}) = \frac{q^2}{2M} + U(\boldsymbol{q}), \qquad (94,14)$$

где согласно (94,2) и определению матричных элементов (94,10)

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_j (q_i q_j | \tilde{t}_{ij} | q_i q_j) = 3 \int_0^{q_F} (q_i q_j | \tilde{t}_{ij} | q_i q_j)\, d\boldsymbol{q}_j. \qquad (94,15)$$

Выражения (94,11), (94,14) и (94,15) образуют систему связанных самосогласованных уравнений, решив которую, мы вычислили бы потенциал $U(\boldsymbol{q})$, определяющий энергию взаимодействия нуклона, имеющего импульс $\boldsymbol{q}$, со всеми остальными нуклонами ядра, находящегося в основном состоянии.

Потенциал оптической модели $U(\boldsymbol{q})$ зависит от максимального импульса нуклонов в ядре и, следовательно, от плотности ядерного вещества (см. (94,13)), так как верхний предел интеграла в (94,15) и нижний предел интеграла в (94,11) равны q_F, а значение матрицы $(\ldots|\tilde{t}_{ij}|\ldots)$ также зависит от q_F.

Пользуясь (94,14), легко определить энергию W, приходящуюся на один нуклон в ядре:

$$W=\left[\int_0^{q_F} dq\right]^{-1}\int_0^{q_F}\left\{\frac{1}{2}U(q)+\frac{q^2}{2M}\right\}dq, \qquad (94{,}16)$$

где множитель $^1/_2$ у потенциала $U(q)$ введен для того, чтобы не учитывать взаимодействие нуклонов дважды. Поскольку

$$\int_0^{q_F} dq=\frac{4\pi}{3}q_F^3=\frac{A_1}{4}, \qquad (94{,}17)$$

где A_1 — число нуклонов в единице объема ядерного вещества, то

$$W=\frac{3}{4\pi}q_F^{-3}\int_0^{q_F}\left\{\frac{1}{2}U(q)+\frac{q^2}{2M}\right\}dq. \qquad (94{,}18)$$

Из условия экстремума (94,18) относительно q_F: $\frac{\partial W}{\partial q_F}=0$, можно найти значение q_F, а следовательно и число нуклонов в единице объема ядра, которое соответствует минимуму энергии, приходящейся на один нуклон в ядре. При некоторых упрощающих предположениях такая задача решалась в работах [15, 23, 24].

Предположим, что потенциал оптической модели ядерных взаимодействий можно апроксимировать функцией

$$U(q)=U_0+bq^2. \qquad (94{,}19)$$

Тогда энергия нуклона в ядре (94,14) может быть представлена в виде

$$\mathscr{E}(q)=U_0+\frac{q^2}{2M^*}, \qquad (94{,}20)$$

где

$$M^*=\frac{M}{1+2bM} \qquad (94{,}21)$$

играет роль *эффективной массы* нуклона в ядерном веществе.

Введение эффективной массы нуклона полезно в том случае, когда мы желаем сохранить представление о свободном движении нуклона в ядерном веществе. Подобно тому как медленное движение электрона в периодическом поле кристалла можно заменить движением свободного электрона с некоторой эффективной массой, так и в ядре зависимость потенциала от энергии движения нуклона может быть учтена введением эффективной массы. Конечно, эта масса будет некоторой постоянной величиной только в случае малых энергий, когда потенциал $U(q)$ зависит от волнового числа квадратично. При больших энергиях $U(q)=U_0+b(q)q^2$ и эффективная масса $M^*=\frac{M}{1+2b(q)M}$ будет сама функцией энергии.

Приравнивая энергию (ε) относительного движения нуклона и ядра энергии нуклона внутри ядра

$$\varepsilon = \frac{q^2}{2M^*} + U_0,$$

мы можем выразить волновой вектор q нуклона внутри ядра через энергию относительного движения ε, а именно:

$$q^2 = 2M^* (\varepsilon - U_0).$$

Подставляя это значение в (94,19) и используя (94,21), определим зависимость вещественной части оптического потенциала от энергии относительного движения:

$$U(\varepsilon) = U_0 \frac{M^*}{M} + \left(1 - \frac{M^*}{M}\right) \varepsilon. \tag{94,22}$$

Так как $M^* < M$ и $U_0 < 0$, то с ростом ε абсолютная величина $U(\varepsilon)$ уменьшается.

Зная зависимость действительной части оптического потенциала от энергии (94,22), можно определить значение эффективной массы нуклона. Если использовать экспериментальные данные, приведенные в таблице 32 в § 93, то получим:

$$M^* \approx (0{,}6 - 0{,}8)\, M,$$
$$U_0 \approx (70 - 100)\ \text{Мэв}.$$

В этом параграфе мы исследовали вопрос о вычислении эффективного потенциала, действующего на нуклон в ядерном веществе, не учитывая границы ядра. В случае реального ядра, имеющего конечный объем, вычисление эффективного потенциала усложняется, так как волновые функции, описывающие состояния отдельных нуклонов, не будут соответствовать плоским волнам, а сами определяются этим потенциалом. Вследствие этого задача отыскания самосогласованного потенциала, определяющего однонуклонные состояния в ядре, значительно усложняется (см., например, работу Бете [23]).

§ 95. Мнимая часть эффективного потенциала

Чтобы определить мнимую часть эффективного потенциала оптической модели ядерных взаимодействий, надо отказаться от использованной в предыдущем параграфе идеализации, согласно которой одночастичные состояния с положительной энергией рассматривались как стационарные состояния. Такие состояния на самом деле обладают конечным временем жизни, так как существует определенная вероятность вылета нуклона из системы (упругое рассеяние), кроме того, имеется определенная вероятность передачи энергии другим состояниям составного ядра (все неупругие процессы).