§ 99. Элементарная теория углового распределения нуклонов в реакциях срыва

Рассмотрим элементарную теорию реакции срыва $A(d, p)B$, предполагая, что ядра A и B очень тяжелые, чтобы не учитывать их движения *). Пусть $\boldsymbol{r}_p$ и $\boldsymbol{r}_n$ — координаты протона и нейтрона в дейтроне; $\boldsymbol{k}_d$ — волновой вектор, определяющий движение свободного дейтрона; $f(|\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_n|)$ — волновая функция внутреннего движения в дейтроне. Пусть далее ядро A находится в состоянии, определяемом волновой функцией

$$\psi_A(\xi)\,\varphi_{jm}(\theta_\xi, \sigma_\xi),$$

где $\varphi_{jm}(\theta_\xi, \sigma_\xi)$ — функция, зависящая от угловых и спиновых переменных нуклонов ядра A, соответствующая полному спину j и его проекции m на ось z. Тогда волновая функция начального состояния может быть записана в виде

$$\Phi_a = \exp\left\{i\boldsymbol{k}_d \frac{(\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_n)}{2}\right\} \chi_{1m_d}(\sigma_n\sigma_p) f(|\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_n|)\,\psi_A(\xi)\,\varphi_{jm}(\theta_\xi, \sigma_\xi), \tag{99,1}$$

где χ_{1m_d} — спиновая функция дейтрона.

Функция (99,1) является собственной функцией оператора Гамильтона H_a, который складывается из оператора Гамильтона ядра A, оператора внутреннего движения в дейтроне и оператора кинетической энергии движения дейтрона. Оператор взаимодействия дейтрона и ядра A обозначим V_a.

Функция конечного состояния описывает состояние ядра B, состоящего из ядра A и нейтрона, и свободное движение протона. Она может быть записана в виде

$$\Phi_b = \exp(i\boldsymbol{k}_p\boldsymbol{r}_p)\,\chi_{\frac{1}{2}m_p}(\sigma_p)\,\psi_B(\xi, r_n)\,\varphi_{JM}(\theta_\xi, \sigma_\xi, \theta_n, \sigma_n). \tag{99,2}$$

Если взаимодействие между протоном и ядром B изобразить оператором V_b, то согласно § 65 вероятность перехода из состояния a в состояние b может быть представлена

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|(\Phi_b, V_b\Omega_a\Phi_a)|^2\,\rho_b(\varepsilon), \tag{99,3}$$

где оператор Ω_a должен удовлетворять уравнению

$$\Omega_a = 1 + (E_a - H_a + i\eta)^{-1} V_a\Omega_a; \tag{99,4}$$

E_a — полная энергия системы.

*) Простой вывод формул для углового распределения протонов в реакции (d, p) с учетом рассеяния дейтронной и протонных волн в поле ядра дан в работах А. Ситенко [44].

Если интересоваться только угловым распределением протонов в реакции $A(d, p)B$, а не абсолютным значением сечения, то при некоторых упрощающих предположениях о потенциале взаимодействия V_b можно не решать сложного операторного уравнения (99,4).

Предположим, для простоты, что оператор V_b отличен от нуля только в том случае, когда протон находится на поверхности ядра; тогда можно написать:

$$V_b \Omega_a = \delta(\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_p)\,\delta(r_p - R)\,W(\xi). \qquad (99,5)$$

Преобразуем показатель экспоненты в (99,1) к виду

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_d(\boldsymbol{r}_n + \boldsymbol{r}_p) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_n + \boldsymbol{k}_p\boldsymbol{r}_p,$$

$\boldsymbol{Q} = \frac{\boldsymbol{k}_d}{2} - \boldsymbol{k}_p$ — импульс, характеризующий внутреннее движение протона в дейтроне; $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_n$; $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_d - \boldsymbol{k}_p$ — импульс, передаваемый ядру. Подставляя теперь (99,1), (99,2) и (99,5) в (99,3), получим:

$$P_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar}\rho_b(\varepsilon)\,C\left| g(Q)\sum_{\sigma}\int \varphi^*_{JM}(\theta_\xi, \sigma_\xi, \theta_n, \sigma_n)\times\right.$$

$$\left.\times\chi^*_{\frac{1}{2}m_p}(\sigma_p)\,e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{R}}\varphi_{jm}(\theta_\xi, \sigma_\xi)\,\chi_{1m_d}(\sigma_n\sigma_p)\,d\Omega_\xi d\Omega_n\right|^2, \qquad (99,6)$$

где

$$C = \left|\int \psi^*_B(\xi R)\,W(\xi)\,\psi_A(\xi)\,d\xi\right|^2, \qquad (99,7)$$

$$g(Q) = \int e^{i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\rho}} f(\rho)\,d\boldsymbol{\rho}. \qquad (99,8)$$

Для вычисления (99,6) разложим плоскую волну $e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{R}}$ по сферическим функциям, проинтегрируем по угловым переменным и просуммируем по спиновым переменным. Усредняя полученное выражение по квантовым числам m и m_d начального состояния и суммируя по квантовым числам m_p и M конечного состояния, получим:

$$\bar{P}_{ba} = |g(Q)|^2\sum_L A_L\{j_L(qR)\}^2, \qquad (99,9)$$

где A_L — коэффициенты, не зависящие от углов; L пробегает значения, удовлетворяющие неравенству

$$\left||J - j| - \frac{1}{2}\right| \leqslant L \leqslant J + j + \frac{1}{2}. \qquad (99,10)$$

Кроме того, L должно быть четным, если J и j одинаковой четности, и нечетным, если J и j разной четности.

Для вычисления явной зависимости функции $g(Q)$ от угла θ необходимо знать радиальную волновую функцию дейтрона. Если принять для этой функции выражение $f(\rho)=\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\frac{e^{-\gamma\rho}}{\rho}$, то из (99,8) получим:

$$g(Q)=\frac{2(2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}}}{\gamma^2+Q^2}=\frac{2(2\pi\gamma)^{\frac{1}{2}}}{\gamma^2+\left(k_p-\frac{k_d}{2}\right)^2+2k_dk_p\sin^2\frac{\theta}{2}}. \qquad (99{,}11)$$

Если взять функцию гюльтеновского типа, т. е.

$$f(\rho)=N(e^{-\alpha\rho}-e^{-\beta\rho})\frac{1}{\rho}, \quad N=\left[\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\pi(\alpha-\beta)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

то

$$g(Q)=4\pi N\{(\alpha^2+Q^2)^{-1}+(\beta^2+Q^2)^{-1}\}. \qquad (99{,}11\text{a})$$

Величина $[g(Q)]^2$ пропорциональна вероятности найти в системе, связанной с центром инерции дейтрона, импульс протона, равный $\hbar Q$.

Угловое распределение протонов, полученных в реакции $A(d,p)B$, определяется согласно (99,9) произведением квадратов функции (99,11) и сферической функции Бесселя. Первый множитель не зависит от L и имеет максимальное значение при $\theta=0$. Второй множитель зависит от L и является осциллирующей функцией угла θ, так как аргумент функции Бесселя зависит от угла θ:

$$qR=R\sqrt{(k_d-k_p)^2+4k_pk_d\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

При $L=0$ максимальное количество протонов испускается в направлении вперед, так как $g^2(Q)$ и $j_0^2(qR)$ имеют максимальное значение при $\theta=0$. При $L\neq 0$ малым значениям θ (а следовательно, и q) соответствует минимум функции $j_L(qR)$. В этом случае направления максимального испускания протонов соответствует углам, не равным нулю и тем большим, чем большему значению L соответствует главный член в сумме (99,9). Чтобы из опытных данных об угловом распределении определить значение L, необходимо экспериментальную кривую зависимости эффективного сечения от угла θ разделить на $g^2(Q)$; тогда полученный результат будет пропорционален

$$\sum_L A_L j_L^2(qR). \qquad (99{,}12)$$

Для некоторых реакций $A(d,p)B$ правилами отбора (99,10) разрешается только одно значение L; в этом случае его определение особенно просто. Первое указание на значение L можно получить исследованием кривой (99,12) при малых углах. Максимум в направлении вперед указывает, что $L=0$. Если максимум лежит при $\theta\neq 0$, то подбирают L и R, которые дают наилучшее согласие с экспериментом. Если найдено L и если известна четность и спин начального состояния, то правила отбора указывают четность конечного состояния, а его спин определяется с точностью до значений, допускаемых векторным сложением:

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{s} \quad \left(s=\frac{1}{2}\right).$$

В теории, не учитывающей кулоновских взаимодействий, реакции $A(d, p)B$ и $A(d, n)B$ описываются одинаковым образом.

§ 100*. Основные уравнения теории реакций срыва без учета кулоновского взаимодействия

В предыдущем параграфе мы рассмотрели элементарную теорию углового распределения протонов в реакциях типа $A(d, p)B$, считая, что ядра A и B столь тяжелы, что их движением можно пренебречь, и вводя очень грубые предположения о характере взаимодействия нуклонов с ядром. Здесь мы выведем основные уравнения теории реакций срыва, не прибегая к этим упрощениям.

Введем радиусы-векторы $\boldsymbol{x}_p$ и $\boldsymbol{x}_n$ протона и нейтрона в дейтроне и радиус-вектор $\boldsymbol{R}$, определяющий положение центра тяжести ядра A. Оператор кинетической энергии будет иметь вид

$$K=-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{A}\Delta_R+\Delta_{x_n}+\Delta_{x_p}\right\}, \tag{100,1}$$

где m — масса нуклона; mA — масса ядра; A — массовое число. Все дальнейшие рассуждения мы будем вести только в системе координат, связанной с центром инерции ядра A и дейтрона. Для перехода к системе центра инерции вводим новые координаты согласно соотношениям:

$$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_p \longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\zeta}=\dfrac{A\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}_p}{A+2}, \quad \boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{R}, & (100,2а)\\ \boldsymbol{\zeta}=\dfrac{A\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}_p}{A+2}, \quad \boldsymbol{r}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}_p)-\boldsymbol{R}, \\ \qquad\qquad \boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{x}_p-\boldsymbol{x}_n, & (100,2б)\\ \boldsymbol{\zeta}=\dfrac{A\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}_p}{A+2}, \quad \boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{R}, \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_p-\dfrac{\boldsymbol{x}_n+A\boldsymbol{R}}{A+1}. & (100,2в)\end{cases}$$

Тогда для кинетической энергии (100,1) получим выражения:

$$K=\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{1}{A+2}\Delta_\zeta+\dfrac{A+1}{A}\Delta_{r_n}+\dfrac{A+1}{A}\Delta_{r_p}\right], & (100,3а)\\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{1}{A+2}\Delta_\zeta+\dfrac{A+2}{2A}\Delta_r+2\Delta_\rho\right], & (100,3б)\\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{1}{A+2}\Delta_\zeta+\dfrac{A+1}{A}\Delta_{r_n}+\dfrac{A+2}{A+1}\Delta_y\right]. & (100,3в)\end{cases}$$