ПРИЛОЖЕНИЕ IV

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЯДРА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Будем считать, что коллективные колебания нуклонов в ядре можно рассматривать как безвихревое движение жидкости, имеющей постоянную плотность ρ. Разложим отклонение поверхности ядра от сферической формы по сферическим функциям

$$\Delta R = R(\vartheta, \varphi) - R_0 = R_0 \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi). \tag{IV,1}$$

Предположим далее, что изменение формы ядра связано с безвихревым движением ядерного вещества. Тогда вектор скорости этого движения будет определяться потенциалом скоростей Φ с помощью формулы

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi.$$

При постоянной плотности ядерного вещества

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla^2 \Phi = 0.$$

Решения этого уравнения, конечные при $r = 0$, можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\vartheta, \varphi),$$

где r, ϑ, φ — сферические координаты произвольной точки ядерного вещества. Связь между коэффициентами $A_{\lambda\mu}$ разложения потенциала скоростей и коэффициентами $\alpha_{\lambda\mu}$, определяющими форму поверхности ядра, находятся из условия

$$\frac{dR(\vartheta, \varphi)}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{r=R_0}.$$

Из этого условия следует

$$R_0^2 \dot{\alpha}_{\lambda\mu} = \lambda A_{\lambda\mu}. \tag{IV,2}$$

Кинетическая энергия колебаний определяется выражением *)

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2} \int |\operatorname{grad} \Phi|^2 d\tau,$$

*) Потенциал скоростей и отклонение ΔR вследствие дополнительного условия $\alpha^*_{\lambda\mu} = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu}$, накладываемого на коэффициенты $\alpha_{\lambda\mu}$, являются действительными величинами. Однако из формальных соображений удобно квадраты этих величин записать в виде квадратов модулей.

где интегрирование производится по объему ядра. Принимая во внимание, что

$$\operatorname{grad}_r \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\vartheta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \quad \operatorname{grad}_\varphi \Phi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

и используя приложение I, § E, можно написать:

$$E_{\text{кин}} = \frac{\rho}{2} \sum A^*_{\lambda\mu} A_{\lambda'\mu'} \int_0^{R_0} dr \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\lambda+\lambda'} \int d\Omega \left\{ \lambda\lambda' Y^*_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial Y^*_{\lambda\mu}}{\partial \vartheta} \frac{\partial Y_{\lambda'\mu'}}{\partial \vartheta} + \frac{\mu\mu'}{\sin^2 \vartheta} Y^*_{\lambda\mu} Y_{\lambda'\mu'} \right\} = \frac{R_0 \rho}{2} \sum_{\lambda\mu} \lambda \, | A_{\lambda\mu} |^2.$$

Подставляя в это выражение (IV,2), получаем окончательное выражение для кинетической энергии поверхностных колебаний

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} B_\lambda \, | \dot{\alpha}_{\lambda\mu} |^2,$$

где

$$B_\lambda = \rho R_0^5 \lambda^{-1}.$$

Потенциальную энергию, связанную с отклонением формы ядра от сферической, можно представить в виде суммы двух членов

$$V = V_\sigma + V_e, \tag{IV,3}$$

где

$$V_\sigma = \sigma \Delta S;$$

σ — поверхностное натяжение; ΔS — изменение поверхности ядра; V_e — изменение электростатической энергии при деформации ядра.

При изменении формы ядра ($R_0 \longrightarrow R_0 + \Delta R$) его поверхность изменяется на величину

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int \left\{ \left| \frac{\partial (\Delta R)}{\partial \vartheta} \right|^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left| \frac{\partial (\Delta R)}{\partial \varphi} \right|^2 - 2 | \Delta R |^2 \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{R_0}{2} \sum_{\lambda, \mu} (\lambda - 1)(\lambda + 2) \, | \alpha_{\lambda\mu} |^2.$$

Таким образом,

$$V_\sigma = \frac{R_0 \sigma}{2} \sum_{\lambda\mu} (\lambda - 1)(\lambda + 2) \, | \alpha_{\lambda\mu} |^2. \tag{IV,4}$$

Изменение электростатической энергии ядра при деформации его формы можно представить в виде

$$V_e = \frac{1}{2} \int q \Delta \varphi \, d\tau + \frac{1}{2} \int \varphi \Delta q^* \, d\tau + \frac{1}{2} \int \Delta \varphi \Delta q^* \, d\tau,$$

где φ — скалярный потенциал; q — плотность электрического заряда. Если плотность электрического заряда внутри ядра сферической формы постоянна и равна

$$q_0 = \frac{3Ze}{4\pi R_0},$$

а вне его равна нулю, то изменение плотности заряда, при изменении формы ядра (в первом приближении) эквивалентно появлению на его поверхности электрического заряда с поверхностной плотностью $q_0 R_0 \zeta$, т. е.

$$\Delta q = q_0 R_0 \zeta \delta (r - R_0), \tag{IV,5}$$

где $\zeta = \frac{\Delta R}{R_0}$. При этом $\int \Delta q \, d\tau = 0$.

Для вычисления дополнительного потенциала $\Delta\varphi$ разложим его по сферическим функциям:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} \frac{r^\lambda}{R_0^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}, & \text{если } r \leqslant R_0, \\ \sum\limits_{\lambda\mu} Q_{\lambda\mu} \frac{R_0^\lambda}{r^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}, & \text{если } r \geqslant R_0. \end{cases} \tag{IV,6}$$

Тогда коэффициенты разложения $Q_{\lambda\mu}$ можно определить из условия

$$\left[\frac{\partial (\Delta\varphi)}{\partial r}\right]_{r=R_0-0} - \left[\frac{\partial (\Delta\varphi)}{\partial r}\right]_{r=R_0+0} = 4\pi q_0 R_0 \zeta.$$

Действительно, подставляя в это равенство (IV,6) и (IV,1), находим:

$$Q_{\lambda\mu} = \frac{4\pi q_0 R_0^3}{2\lambda+1} \alpha_{\lambda\mu}. \tag{IV,7}$$

Используя (IV,1) и (IV,5) — (IV,7), получаем в рассматриваемом приближении:

$$\frac{1}{2}\int q\Delta\varphi \, d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int \Delta\varphi \Delta q^* \, d\tau = \frac{9Ze^2}{8\pi R_0} \sum_{\lambda\mu} \frac{|\alpha_{\lambda\mu}|^2}{2\lambda+1}. \tag{IV,8}$$

Для вычисления интеграла $\frac{1}{2}\int \varphi \Delta q^* \, d\tau$ представим потенциал φ в тонком поверхностном слое (где $\Delta q \neq 0$) приближенной формулой:

$$\varphi = \frac{eZ}{R_0(1+\zeta)} \approx \frac{eZ}{R_0}(1-\zeta);$$

тогда

$$\frac{1}{2}\int \varphi \Delta q^* \, d\tau = -\frac{3e^2Z^2}{8\pi R_0} \sum_{\lambda\mu} |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \tag{IV,9}$$

Складывая (IV,8) и (IV,9), находим:

$$V_e = -\frac{3e^2Z^2}{4\pi R_0} \sum_{\lambda\mu} \frac{(\lambda-1)}{(2\lambda+1)} \, |\alpha_{\lambda\mu}|^2. \tag{IV,10}$$

Подставляя (IV,4) и (IV,10) в (IV,3), получаем явное выражение потенциальной энергии поверхностных колебаний через коэффициенты $\alpha_{\lambda\mu}$:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_\lambda \, |\alpha_{\lambda\mu}|^2,$$

где

$$C_\lambda = (\lambda - 1)\left\{(\lambda+2) R_0 \sigma - \frac{3e^2Z^2}{2\pi(2\lambda+1)R_0}\right\}.$$