ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОБЩИЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ МОМЕНТОВ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

§ А. Состояния системы с определенными спиновыми и орбитальными моментами

Как известно из курса квантовой механики, в центрально-симметричном поле квадрат момента количества движения и одна из его проекций (например, J_z) могут одновременно иметь определенные значения. Любое состояние движения в таком поле может быть представлено в виде линейной суперпозиции состояний с определенными значениями абсолютной величины момента и значениями одной из его проекций.

В этом приложении мы приведем краткую сводку основных сведений о свойствах операторов момента количества движения и их собственных функций, которые используются при изложении отдельных вопросов теории ядра в этой книге.

Оператор полного момента количества движения в единицах $\hbar$ будем обозначать буквой $\hat{\boldsymbol{J}}$. Его проекции $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$ на координатные оси удовлетворяют перестановочному соотношению

$$\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_v\hat{J}_x = i\hat{J}_z \tag{A,1}$$

и двум другим, получаемым из (А,1) циклической перестановкой индексов x, y, z. Эти перестановочные соотношения можно записать более кратко в векторной форме $\left|\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{\boldsymbol{J}}\right| = i\hat{\boldsymbol{J}}$.

Операторы $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ и $\hat{J}_z$ коммутируют друг с другом и поэтому имеют общую систему собственных функций ψ_{JM}, которые удовлетворяют уравнениям

$$\hat{J}^2\psi_{JM} = J(J+1)\psi_{JM},$$
$$\hat{J}_z\psi_{JM} = M\psi_{JM}.$$

Собственные функции ψ_{JM} зависят от переменных, на которые действуют операторы $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$. В качестве примера рассмотрим три частных случая.

а) Оператор момента количества движения $\hat{J}$ соответствует только орбитальному движению частицы и, следовательно, действует только на угловые переменные θ, φ. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv \hat{L}_z, \\ \hat{J}_x &= i\left\{\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \equiv \hat{L}_x, \\ \hat{J}_y &= -i\left\{\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \equiv \hat{L}_y \end{aligned}\right\} \qquad (\text{A},2)$$

и собственными функциями операторов $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ и $\hat{L}_z$ являются сферические функции (шаровые функции Лапласа). При $M \geqslant 0$

$$Y_{LM}(\theta, \varphi) = \\ = \frac{(-1)^{L+M}}{2^L(L!)}\left[\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!}\right]^{1/2}(\sin\theta)^M\frac{d^{L+M}}{(d\cos\theta)^{L+M}}(\sin\theta)^{2L}\exp(iM\varphi), \qquad (\text{A},2\text{a})$$

где квантовое число L пробегает целые значения $0, 1, \ldots, \infty$ а $M = 0, 1, \ldots, L$.

Сферические функции для отрицательных значений $M = -1, -2, \ldots$ определяются из условия

$$Y^*_{LM} = (-1)^M Y_{L,-M}.$$

Сферические функции Y_{LM} образуют полную ортонормированную систему функций

$$\int Y^*_{LM} Y_{L'M'}\, d\Omega = \delta_{LL'}\delta_{MM'}. \qquad (\text{A},3)$$

Поэтому любая функция $F(\theta, \varphi)$, удовлетворяющая условию ограниченности интеграла

$$\int |F(\theta, \varphi)|^2\, d\Omega,$$

может быть представлена в виде линейной комбинации сферических функций

$$F(\theta, \varphi) = \sum_{LM} A_{LM} Y_{LM}(\theta, \varphi),$$

где

$$A_{LM} = \int F(\theta, \varphi)\, Y^*_{LM}\, d\Omega.$$

В частности, мы используем в книге разложение плоской волны, распространяющейся вдоль оси z:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\, j_l(kr)\, Y_{l0}(\theta), \qquad (\text{A},4)$$

где $j_l(kr) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+1/2}(kr)$ — сферическая функция Бесселя первого рода порядка l.

Если использовать теорему сложения сферических функций

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, Y_{l0}(\Theta) = \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2),$$

где Θ — угол между направлениями, определяемыми углами θ_1, φ_1 и θ_2, φ_2, то из (А,4) можно получить разложение по сферическим функциям плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, определяемом углами Θ, Φ:

$$e^{ikr} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{M=-l}^{\infty} i^l j_l(kr)\, Y^*_{lm}(\Theta, \Phi)\, Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{А,4а}$$

Входящая в (А,4) сферическая функция может быть выражена через полином Лежанра $P_l(\cos\theta)$ с помощью соотношения

$$Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta).$$

б) Рассмотрим теперь случай, когда оператор момента количества движения $\hat{J}$ соответствует спиновому моменту $J = {}^1/_2$. Тогда в представлении, в котором диагонален оператор $\hat{J}_z$, операторы проекций момента $\hat{J}$ изображаются двумерными матрицами

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_z}{2}, \quad \hat{J}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_x}{2}, \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\sigma_y}{2}.$$

Собственные функции операторов $\hat{J}^2 \equiv \frac{\sigma^2}{4}$ и $\hat{J}_z \equiv \frac{\sigma_z}{2}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\hat{J}^2 \chi_{{}^1/_2 m}(s_z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\chi_{{}^1/_2 m}(s_z),$$

$$\hat{J}_z \chi_{{}^1/_2 m}(s_z) = m\, \chi_{{}^1/_2 m}(s_z),$$

называются *спиновыми функциями*. Квантовое число m принимает два значения $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

Спиновые функции $\chi_{{}^1/_2 m}(s_z)$ являются функциями спиновой переменной s_z, принимающей только два значения $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. При этом

$$\left.\begin{aligned} \chi_{{}^1/_2\, {}^1/_2}\left(\frac{1}{2}\right) &= \alpha, & \chi_{{}^1/_2\, {}^1/_2}\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0, \\ \chi_{{}^1/_2, -{}^1/_2}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, & \chi_{{}^1/_2, -{}^1/_2}\left(-\frac{1}{2}\right) &= \beta. \end{aligned}\right\} \tag{А,5}$$

Спиновые функции (А,5) ортонормированы:

$$\sum_{s_z = {}^1/_2, -{}^1/_2} \chi^*_{{}^1/_2 m'}(s_z)\, \chi_{{}^1/_2 m}(s_z) = \delta_{mm'}. \tag{А,6}$$

Спиновые функции могут быть записаны также и в матричной форме

$$\chi_{^1/_2\, ^1/_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{^1/_2,\, -^1/_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A,7}$$

Условие ортонормированности спиновых волновых функций (A,7) в матричном виде записывается следующим образом:

$$\chi^{\dagger}_{^1/_2 m} \chi_{^1/_2 m'} = \delta_{mm'}.$$

в) Рассмотрим, наконец, случай, когда оператор момента количества движения соответствует спиновому моменту $J = 1$.

В этом случае в представлении, в котором диагонален оператор $\hat{J}_z$, операторы проекций момента $\hat{J}$ изображаются трехмерными матрицами

$$\hat{J}_x = s_x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = s_y \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_z = s_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A,8}$$

Оператор

$$\boldsymbol{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спиновые волновые функции операторов $\boldsymbol{s}^2$ и s_z могут быть записаны в виде векторных матриц:

$$\boldsymbol{e}_{1,1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{e}_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{e}_{-1} \end{pmatrix}, \tag{A,9}$$

где единичные векторы $\boldsymbol{e}_p$ определены соотношениями:

$$\boldsymbol{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{e}_x \pm i \boldsymbol{e}_y), \quad \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z;$$

здесь $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ — единичные векторы вдоль осей декартовой системы координат. Единичные векторы $\boldsymbol{e}_p$ удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}^*_{p'} = \delta_{pp'}, \quad p, p' = 0, 1, -1, \tag{A,9a}$$

при этом

$$\boldsymbol{e}^*_p = (-1)^p \boldsymbol{e}_{-p}. \tag{A,9б}$$

Любой вектор $\boldsymbol{A}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{A} = \sum_{p=0,\,\pm 1} A_p \boldsymbol{e}_p^* = \sum_p (-1)^p A_p \boldsymbol{e}_{-p}, \tag{A,10}$$

где $A_p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_p$, так что

$$A_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \pm i A_y), \quad A_0 = A_z. \tag{A,11}$$

Если из операторов $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (A,1), образовать три других оператора:

$$\hat{J}_0 = \hat{J}_z, \quad \hat{J}_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_x \pm i \hat{J}_y), \tag{A,12}$$

то действие этих операторов на собственные функции ψ_{JM} операторов $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$ выражаются простыми равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{J}_0 \psi_{JM} = M \psi_{JM}, \\ &\hat{J}_\pm \psi_{JM} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \psi_{J,\, M \pm 1}. \end{aligned}\right\} \tag{A,13}$$

Операторы $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ соответственно увеличивают и уменьшают магнитное квантовое число на единицу.

Учитывая (A,12) и используя (A,13), можно также написать:

$$\hat{J}_z \psi_{JM} = M \psi_{JM}, \tag{A,14}$$

$$\hat{J}_x \psi_{JM} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_- - \hat{J}_+) \psi_{JM} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, \psi_{J,\, M+1} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, \psi_{J,\, M-1} \right\}, \tag{A, 15}$$

$$\hat{J}_y \psi_{JM} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{J}_- + \hat{J}_+) \psi_{JM} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, \psi_{J,\, M+1} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, \psi_{J,\, M-1} \right\}. \tag{A,16}$$

С помощью равенств (A,13) — (A,16) легко вычислить матричные элементы операторов моментов количества движения.

Если ввести переменную $p = 0, \pm 1$, то соотношения (A, 13) можно записать в кратком виде:

$$\hat{J}_p \psi_{JM} = (-1)^p \sqrt{J(J+1)}\, (J1, M+p, -p \,|\, JM)\, \psi_{J,\, M+p}, \tag{A,17}$$

где $(J1, M+p, -p \,|\, JM)$ — коэффициенты векторного сложения, определенные в следующем параграфе этого приложения.

Теперь, пользуясь (A,10), можно написать:

$$\hat{\boldsymbol{J}} \psi_{JM} = \sum_{p=0,\,\pm 1} (-1)^p \hat{J}_p \boldsymbol{e}_{-p} \psi_{JM} =$$
$$= \sqrt{J(J+1)} \sum_p (J1, M+p, -p \,|\, JM)\, \psi_{J,\, M+p} \boldsymbol{e}_{-p}. \tag{A, 18}$$

Частным случаем равенства (А, 10) является представление радиуса-вектора

$$\boldsymbol{r} = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{p}(-1)^p Y_{1p}\boldsymbol{e}_{-p}. \tag{А,19}$$

§ Б. Векторное сложение моментов количества движения

Предположим, что некоторая система, в которой момент количества движения является интегралом движения, состоит из двух подсистем. Если оператор момента количества движения одной подсистемы $\hat{j}_1$, а второй подсистемы $\hat{j}_2$ и если эти операторы коммутируют друг с другом, то состояние всей системы можно характеризовать моментом количества движения, равным сумме моментов количества движения каждой из подсистем в отдельности. Такая ситуация возникает, например: а) при совместном рассмотрении орбитального и спинового моментов количества движения одной частицы; в этом случае, оператор орбитального движения действует на угловые переменные, а оператор спина действует на спиновые переменные, поэтому оба оператора коммутируют; б) при рассмотрении орбитального или спинового моментов двух частиц и т. д. Во всех этих случаях состояние полной системы может быть описано либо набором квантовых чисел j_1, j_2, m_1, m_2, определяющих соответственно для каждой подсистемы квадраты моментов количества движения и их проекции на ось z, либо набором квантовых чисел JMj_1j_2, определяющих полный момент и его проекцию на ось z для всей системы и полные моменты каждой из подсистем в отдельности.

Квантовое число J полного момента всей системы может пробегать значения, определяемые правилом *векторного сложения*

$$J = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \ldots, \quad |j_1 - j_2|,$$

или

$$|j_1 - j_2| \leqslant J \leqslant j_1 + j_2. \tag{Б,1}$$

Соотношение (Б,1) будем кратко обозначать $\Delta(j_1j_2J)$ и называть «*соотношением треугольника*».

Собственные функции оператора полного момента количества движения выражаются через линейную комбинацию произведений собственных функций операторов $\hat{j}_1$ и $\hat{j}_2$ с помощью соотношения

$$\Phi_{j_1j_2JM} = \sum_{m_1m_2}(j_1j_2m_1m_2|JM)\,\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}. \tag{Б,2}$$

Обратное преобразование к (Б, 2) имеет вид:

$$\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(j_1j_2m_1m_2|JM)\,\Phi_{j_1j_2JM}. \tag{Б,3}$$

Коэффициенты $(j_1j_2m_1m_2|JM)$ линейных комбинаций (Б,2) и (Б,3)