Частным случаем равенства (А, 10) является представление радиуса-вектора

$$\boldsymbol{r} = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{p}(-1)^p Y_{1p}\boldsymbol{e}_{-p}. \tag{А,19}$$

§ Б. Векторное сложение моментов количества движения

Предположим, что некоторая система, в которой момент количества движения является интегралом движения, состоит из двух подсистем. Если оператор момента количества движения одной подсистемы $\hat{j}_1$, а второй подсистемы $\hat{j}_2$ и если эти операторы коммутируют друг с другом, то состояние всей системы можно характеризовать моментом количества движения, равным сумме моментов количества движения каждой из подсистем в отдельности. Такая ситуация возникает, например: а) при совместном рассмотрении орбитального и спинового моментов количества движения одной частицы; в этом случае, оператор орбитального движения действует на угловые переменные, а оператор спина действует на спиновые переменные, поэтому оба оператора коммутируют; б) при рассмотрении орбитального или спинового моментов двух частиц и т. д. Во всех этих случаях состояние полной системы может быть описано либо набором квантовых чисел j_1, j_2, m_1, m_2, определяющих соответственно для каждой подсистемы квадраты моментов количества движения и их проекции на ось z, либо набором квантовых чисел JMj_1j_2, определяющих полный момент и его проекцию на ось z для всей системы и полные моменты каждой из подсистем в отдельности.

Квантовое число J полного момента всей системы может пробегать значения, определяемые правилом *векторного сложения*

$$J = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \ldots, \quad |j_1 - j_2|,$$

или

$$|j_1 - j_2| \leqslant J \leqslant j_1 + j_2. \tag{Б,1}$$

Соотношение (Б,1) будем кратко обозначать $\Delta(j_1j_2J)$ и называть «*соотношением треугольника*».

Собственные функции оператора полного момента количества движения выражаются через линейную комбинацию произведений собственных функций операторов $\hat{j}_1$ и $\hat{j}_2$ с помощью соотношения

$$\Phi_{j_1j_2JM} = \sum_{m_1m_2}(j_1j_2m_1m_2\,|\,JM)\,\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}. \tag{Б,2}$$

Обратное преобразование к (Б, 2) имеет вид:

$$\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}(j_1j_2m_1m_2\,|\,JM)\,\Phi_{j_1j_2JM}. \tag{Б,3}$$

Коэффициенты $(j_1j_2m_1m_2\,|\,JM)$ линейных комбинаций (Б,2) и (Б,3) являются действительными числами и называются *коэффициентами векторного сложения* или *коэффициентами Клебша — Жордана*. Они равны нулю, если $M \neq m_1 + m_2$, поэтому в (Б, 2) фактически суммирование происходит только по одному из квантовых чисел m_1 или m_2; запись в виде двойной суммы иногда удобна из формальных соображений.

В таблицах 33, 34, 35 приведены значения коэффициентов векторного сложения для $j_2 = {}^1/_2$, 1 и часть коэффициентов для $j_2 = 2$. В книге Е. Кондона и Г. Шортли [22] приведены таблицы *) для $j_2 = {}^3/_2$ и $j_2 = 2$.

Таблица 33. Коэффициенты векторного сложения $(j_1 {}^1/_2 m_1 m_2 \mid JM)$

J	$m_2 = {}^1/_2$	$m_2 = -{}^1/_2$
$j_1 + {}^1/_2$	$\left(\dfrac{j_1 + M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$	$\left(\dfrac{j_1 - M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$
$j_1 - {}^1/_2$	$-\left(\dfrac{j_1 - M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$	$\left(\dfrac{j_1 + M + {}^1/_2}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$

Полезно иметь в виду, что если $J = j_1 + j_2$, то $(j_1 j_2 j_1 j_2 \mid JJ) = (j_1 j_2, -j_1, -j_2 \mid J, -J) = 1$.

Таблица 34. Коэффициенты векторного сложения $(j_1 1 m_1 m_2 \mid JM)$

J	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j_1 + 1$	$\left\{\dfrac{(j_1+M)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right\}^{1/2}$	$\left\{\dfrac{(j_1-M+1)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$\left\{\dfrac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}\right\}^{1/2}$
j_1	$-\left\{\dfrac{(j_1+M)(j_1-M+1)}{2j_1(j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$\dfrac{M}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\left\{\dfrac{(j_1-M)(j_1+M+1)}{2j_1(j_1+1)}\right\}^{1/2}$
$j_1 - 1$	$\left\{\dfrac{(j_1-M)(j_1-M+1)}{2j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$-\left\{\dfrac{(j_1-M)(j_1+M)}{j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$	$\left\{\dfrac{(j_1+M+1)(j_1+M)}{2j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$

*) Наши обозначения коэффициентов Клебша — Жордана отличаются от обозначений Кондона и Шортли, которые использовали обозначения: $(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j_1 j_2 JM)$ вместо наших $(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM)$.

Таблица 35. Коэффициенты векторного сложения $(j_1 2 m_1 0 \mid JM)$

$J=j_1+2$	$\left\{\dfrac{3(j_1-M+2)(j_1-M+1)(j_1+M+2)(j_1+M+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)(2j_1+3)(j_1+2)}\right\}^{1/2}$
$J=j_1+1$	$M\left\{\dfrac{3(j_1-M+1)(j_1+M+1)}{j_1(2j_1+1)(j_1+1)(j_1+2)}\right\}^{1/2}$
$J=j_1$	$\dfrac{3M^2-j_1(j_1+1)}{\sqrt{(2j_1-1)j_1(j_1+1)(2j_1+3)}}$
$J=j_1-1$	$-M\left\{\dfrac{3(j_1-M)(j_1+M)}{(j_1-1)j_1(2j_1+1)(j_1+1)}\right\}^{1/2}$
$J=j_1-2$	$\left\{\dfrac{3(j_1-M)(j_1-M-1)(j_1+M)(j_1+M-1)}{(2j_1-2)(2j_1-1)j_1(2j_1+1)}\right\}^{1/2}$

Волновые функции $\Phi_{j_1j_2JM}$ будут функциями переменных, от которых зависят функции $\psi_{j_1m_1}$ и $\psi_{j_2m_2}$. В частности, если одна из этих функций зависит от спиновых переменных, а вторая от угловых, то соответствующую функцию $\Phi_{j_1j_2JM}$ называют *сферической функцией со спином* [23] или *спин-угловой функцией* (см. § В).

Коэффициенты векторного сложения удовлетворяют следующим условиям симметрии:

$$(j_1j_2m_1m_2 \mid JM) = (-1)^{j_1+j_2-J}(j_1j_2, -m_1, -m_2 \mid J, -M), \tag{Б,4}$$

$$(j_1j_2m_1m_2 \mid JM) = (-1)^{j_1+j_2-J}(j_2j_1m_2m_1 \mid JM), \tag{Б,5}$$

$$\sqrt{2j_1+1}(j_1j_2m_1m_2 \mid JM) = (-1)^{j_2+m_2}\sqrt{2J+1}(Jj_2, -M, m_2 \mid j_1, -m_1), \tag{Б,6}$$

$$\sqrt{2j_2+1}(j_1j_2m_1m_2 \mid JM) = (-1)^{j_1-m_1}\sqrt{2J+1}(j_1Jm_1, -M \mid j_2, -m_2), \tag{Б,7}$$

$$\sqrt{2j_1+1}(j_1j_2m_1m_2 \mid JM) = (-1)^{j_1-J+m_2}\sqrt{2J+1}(j_2Jm_2, -M \mid j_1, -m_1). \tag{Б,8}$$

Коэффициенты векторного сложения удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\sum_{m_1m_2}(j_1j_2m_1m_2 \mid JM)(j_1j_2m_1m_2 \mid J'M') = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{Б,9}$$

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_M (j_1j_2m_1m_2 \mid JM)(j_1j_2m_1'm_2' \mid JM) = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}, \tag{Б,10}$$

$$\sum_{m_1M}(j_1j_2m_1m_2 \mid JM)(j_1j_2'm_1m_2' \mid JM) = \frac{2J+1}{2j_2+1}\delta_{j_2j_2'}\delta_{m_2m_2'}. \tag{Б,11}$$

Частным случаем последней формулы является правило сумм

$$\sum_M |(j_1 j_2 0M \mid JM)|^2 = \frac{2J+1}{2j_1+1}. \tag{Б,12}$$

Приведем еще значения некоторых часто встречающихся коэффициентов векторного сложения

$$(j_1 0 m_1 m_2 \mid J,\ m_1+m_2) = \delta_{j_1 J}\delta_{m_2 0}. \tag{Б,13}$$

Если j_1 и j_2 принимают целые значения l_1 и l_2, то из (Б,4) следует, что $(l_1 l_2 00 \mid L0) = 0$, если $l_1+l_2+L \neq$ четному числу (Б,14).

Если l_1+l_2+L четно и $2g = l_1+l_2+L$, то

$$(l_1 l_2 00 \mid L0) =$$

$$= (-1)^{g+L}\left(2L+\frac{1}{2}\right)^{1/2} \frac{g!}{(g-l_1)!\,(g-l_2)!\,(g-L)!} f(l_1 l_2 L), \tag{Б,15}$$

где

$$f(l_1 l_2 L) \equiv \left[\frac{(l_1+l_2-L)!\,(l_1-l_2+L)!\,(-l_1+l_2+L)!}{(l_1+l_2+L+1)!}\right]^{1/2}.$$

Общая формула, определяющая коэффициенты векторного сложения через значения их аргументов, имеет вид

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid JM) = \delta_{M,\, m_1+m_2}\left[\frac{(2J+1)\,(j_1+j_2-J)!\,(j_1-j_2+J)!\,(J+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+J+1)!}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\sum_n \frac{(-1)^n\,[(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!\,(J+M)!\,(J-M)!]^{1/2}}{n!\,(j_1+j_2-J-n)!\,(j_1-m_1-n)!\,(j_2+m_2-n)!\,(J-j_2+m_1+n)!\,(J-j_1-m_2+n)!}. \tag{Б,16}$$

Коэффициенты векторного сложения определены для целых и полуцелых значений квантовых чисел j_1, m_1, j_2, m_2, таких, чтобы j_1-m_1, j_2-m_2 были целыми числами и $|j_1-j_2| \leqslant J \leqslant j_1+j_2$. Сумма по n в (Б,16) берется по таким целым числам, для которых аргументы факториалов не отрицательны. Число членов в сумме на единицу превышает наименьшее положительное число из следующих девяти чисел:

$$j_1+m_1,\ j_1-m_1,\ j_2+m_2,\ j_2-m_2,\ J+M,\ J-M,\ j_1+j_2-J,$$
$$j_1+J-j_2,\ j_2+J-j_1. \tag{Б,17}$$

Коэффициент векторного сложения равен нулю, когда одно из чисел (Б,17) отрицательно. Если одно из чисел (Б,17) равно нулю, то сумма сводится к одному слагаемому.