напряженности электрического и магнитного полей которого равны соответственно

$$\mathcal{E}_M(Jm) = ikA_M(Jm), \quad \mathcal{H}_M(Jm) = \operatorname{rot} A_M(Jm); \qquad (\Gamma,16)$$

при этом напряженность электрического поля перпендикулярна к радиусу-вектору

$$r\mathcal{E}_M(Jm) = 0.$$

Потенциалу $A_E(Jm)$ соответствует *электрическое мультипольное излучение*, напряженности электрического и магнитного полей которого равны соответственно

$$\mathcal{E}_E(Jm) = ikA_E(Jm), \quad \mathcal{H}_E(Jm) = \operatorname{rot} A_E(Jm). \qquad (\Gamma,17)$$

Учитывая (Г,13), (Г,15) и (Г,16), имеем:

$$\mathcal{E}_E(Jm) = \mathcal{H}_M(Jm) = \operatorname{rot} A_M(Jm),$$
$$\mathcal{E}_M(Jm) = -\mathcal{H}_E(Jm) = ik\, A_M(Jm).$$

В электрическом мультипольном излучении напряженность магнитного поля перпендикулярна к радиусу-вектору

$$r\mathcal{H}_E = 0.$$

§ Д. Вращение твердого тела и собственные функции симметричного волчка

Ориентация твердого тела в пространстве определяется тремя углами Эйлера α, β, γ, фиксирующими положение трех взаимно-перпендикулярных осей ξ, η, ζ, жестко связанных с телом. Переход от неподвижной системы координат xyz к системе координат $\xi\eta\zeta$, связанной с телом, осуществляется при помощи операции вращения $R(\alpha, \beta, \gamma)$, которое может быть представлено как произведение трех последовательных вращений $R(\gamma)R(\beta)R(\alpha)$: вращение $R(\alpha)$ на угол α вокруг оси z в направлении от оси oy к оси ox, в результате которого ось ox совпадает с прямой пересечения плоскостей xoy и $\xi o\eta$, затем вращение $R(\beta)$ на угол β вокруг нового положения оси ox, в результате которого ось oz совпадает с осью $o\zeta$, и, наконец, вращение $R(\gamma)$ на угол γ вокруг оси $o\zeta$.

Операции вращения $R(\alpha)$, $R(\beta)$ и $R(\gamma)$ изображаются матрицами:

$$R(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\beta) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$R(\gamma) \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Состояние вращения твердого тела как целого описывается в квантовой механике волновыми функциями, зависящими от трех углов Эйлера. Твердое тело, обладающее аксиальной осью симметрии (симметричный волчок), может находиться в состоянии вращения с определенным моментом количества движения J и определенными проекциями $J_z = M$ на неподвижную пространственную ось oz и $J_\zeta = K$ на ось $o\zeta$, направленную вдоль оси симметрии волчка. Эти состояния характеризуются волновыми функциями $D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)$, удовлетворяющими системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}^2 D^J_{MK} &= J(J+1) D^J_{MK}, \\ \hat{J}_z D^J_{MK} &= M D^J_{MK}, \\ \hat{J}_\zeta D^J_{MK} &= K D^J_{MK}, \end{aligned}\right\} \tag{Д,1}$$

где число J принимает целые или полуцелые значения, а числа M и K — значения $\pm J$, $\pm(J-1)$, $\pm \ldots$ Операторы проекций момента количества движения на оси неподвижной системы координат могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_x &= -i\left(\sin\alpha \frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{ctg}\beta\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right), \\ \hat{J}_y &= -i\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} - \operatorname{ctg}\beta\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right), \\ \hat{J}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{Д,2}$$

так что для оператора квадрата момента количества движения $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ имеем:

$$\hat{J}^2 = -\left\{\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right]\right\}, \tag{Д,3}$$

а для оператора проекции момента количества движения на ось ζ

$$\hat{J}_\zeta = -i\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Волновые функции D^J_{MK}, удовлетворяющие системе уравнений (Д,1), могут быть записаны в виде

$$D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{iM\alpha} d^J_{MK}(\beta)\, e^{iK\gamma}, \tag{Д,4}$$

где

$$d^J_{MK}(\beta) \equiv \sum_\varkappa (-1)^\varkappa \left\{\frac{(J+M)!\,(J-M)!\,(J+K)!\,(J-K)!}{(J-M-\varkappa)!\,(J+K-\varkappa)!\,\varkappa!\,(\varkappa+M-K)!}\right\}^{1/2} \times$$
$$\times \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2J+K-M-2\varkappa}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2\varkappa+M-K};$$

здесь сумма по $\varkappa$ распространяется на все целые числа от наибольшего из чисел 0 и $K-M$ до наименьшего из чисел $J-M$ и $J+K$. При $M=J$ и $M=-J$ в сумме по $\varkappa$ остается только один член с $\varkappa=0$ для первого случая и $\varkappa=J+K$ для второго. Тогда функции D^J_{MK} принимают особенно простой вид:

$$D^J_{JK}=\left\{\frac{(2J)!}{(J+K)!\,(J-K)!}\right\}^{1/2} e^{iJ\alpha}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{J+K}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{J-K} e^{iK\gamma};$$

$$D^J_{-JK}=\left\{\frac{(2J)!}{(J+K)!\,(J-K)!}\right\}^{1/2} e^{-iJ\alpha}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{J-K}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{J+K} e^{iK\gamma}.$$

Собственные волновые функции операторов $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$ $\hat{J}_\zeta$:

$$\varphi^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)=\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\,D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma), \qquad (Д,5)$$

нормированные условием

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{*}{\varphi}{}^J_{MK}\varphi^{J'}_{M'K'}\sin\beta\,d\beta\,d\alpha\,d\gamma=\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{KK'},$$

будем называть *собственными волновыми функциями симметричного волчка*.

Функции D^J_{MK}, введенные впервые Вигнером [28], иногда называют *обобщенными сферическими функциями* [23]. Они образуют неприводимое унитарное представление трехмерной группы вращения и удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$(D^J_{MK},D^{J'}_{M'K'})\equiv\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{*}{D}{}^J_{MK}D^{J'}_{M'K'}\sin\beta\,d\beta\,d\alpha\,d\gamma=\frac{8\pi^2}{2J+1}\,\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{KK'}. \qquad (Д,6)$$

Если J принимает целые значения, то представление группы вращения однозначно, т. е. каждому вращению на углы α, β, γ соответствует только одна матрица $D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)$. Если J принимает полуцелые значения, то представление вращения является двузначным, так как каждому вращению, определяемому углами Эйлера α, β, γ, соответствуют две матрицы $\pm D^J_{MK}$, отличающиеся знаком.

При целом $J=L$ и при $M=0$, или $K=0$, функции D^J_{MK} с точностью до постоянного множителя совпадают со сферическими функциями:

$$\left.\begin{aligned} D^L_{M0}&=\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\,Y_{LM}(\alpha,\beta),\\ D^L_{0K}&=\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\,Y_{LK}(\gamma,\beta).\end{aligned}\right\}. \qquad (Д,7)$$

Приведем для примера обобщенные сферические функции (функции Вигнера) порядка $\frac{1}{2}$ и 1:

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\gamma)=\pm\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta}{2}e^{-i\frac{\gamma}{2}} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\gamma}{2}} \\ e^{i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2}e^{-i\frac{\gamma}{2}} & e^{-i\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$D^{1}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\frac{1+\cos\beta}{2}e^{-i\gamma} & -e^{-i\alpha}\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{-i\alpha}\frac{1-\cos\beta}{\sqrt{2}}e^{i\gamma} \\ \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{-i\gamma} & \cos\beta & -\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}e^{i\gamma} \\ e^{i\alpha}\frac{1-\cos\beta}{2}e^{-i\gamma} & e^{i\alpha}\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} & e^{i\alpha}\frac{1+\cos\beta}{2}e^{i\gamma} \end{pmatrix}.$$

Однозначные представления группы вращения $D^{L}_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)$ позволяют преобразовывать компоненты тензоров L-го ранга из одной системы координат в другую. Если α, β, γ — углы, определяющие вращение $R(\alpha,\beta,\gamma)$, с помощью которого старая система координат совмещается с новой, то компоненты вектора A'_{M} и тензора T'_{lM} в новой системе координат выражаются линейными комбинациями компонент в старой системе:

$$\left.\begin{aligned} A'_{M}&=\sum_{K}\overset{*}{D}{}^{1}_{MK}A_{K}, \\ T'_{LM}&=\sum_{k}\overset{*}{D}{}^{l}_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)\,T_{LK}, \end{aligned}\right\} \tag{Д,8}$$

где компоненты вектора A_{-1}, A_0, A_1 связаны с его компонентами в декартовой системе координат соотношениями:

$$A_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x-iA_y),$$
$$A_0=A_z,$$
$$A_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x+iA_y).$$

Матрица преобразования D^{L}_{MK} является унитарной матрицей, т. е. имеет место равенство

$$\sum_{M}\overset{*}{D}{}^{L}_{MK}D^{L}_{MK'}=\delta_{KK'}, \tag{Д,9}$$

или в сокращенном виде $(D^L)^{\dagger}D^L=1$.

Пользуясь этим свойством матрицы D^{L}_{MK}, можно из (Д,8) получить обратное преобразование:

$$A_K=\sum_{M}D^{1}_{MK}A'_{M}. \tag{Д,8а}$$

Из (Д,9), в частности, непосредственно следует, что матрица, обратная к D^L, совпадает с эрмитово-сопряженной к D^L, т. е.

$$(D^L)^{-1} = (D^L)^{\dagger}.$$

В различных физических приложениях приходится вычислять произведения от нескольких обобщенных сферических функций. Такие произведения всегда можно выразить с помощью коэффициентов векторного сложения через линейную комбинацию самих же обобщенных сферических функций, если использовать равенство

$$D^{j_1}_{m_1k_1} D^{j_2}_{m_2k_2} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_1j_2m_1m_2 \,|\, J, m_1+m_2)(j_1j_2k_1k_2 \,|\, J, k_1+k_2) \times \\ \times D^J_{m_1+m_2,\, k_1+k_2}. \qquad (Д,10)$$

Пользуясь формулами (Д,10) и (Д,6), легко показать, что

$$(D^J_{MK}, D^{j_1}_{m_1k_1} D^{j_2}_{m_2k_2}) = \frac{8\pi^2}{2J+1} (j_1j_2m_1m_2 \,|\, JM)(j_1j_2k_1k_2 \,|\, JK) \qquad (Д,11)$$

Отметим еще некоторые свойства функций D^J:

$$D^J_{MM'}(0, 0, 0) = \delta_{MM'},$$

$$D^J_{M'M} = (-1)^{M-M'} \overset{*}{D}{}^J_{-M', -M}.$$

Обозначим с помощью R и R' два вращения, определяемых соответственно углами Эйлера α, β, γ и α', β', γ'; тогда имеет место равенство

$$\sum_K D^J_{MK}(R') D^J_{KM'}(R) = D^J_{MM'}(R'R),$$

которое и указывает, что матрицы D^J_{MK} образуют представление группы вращения.

Предположим, что состояние системы частиц описывается волновой функцией $\psi_{JM}(\ldots x_i \ldots)$, соответствующей определенному значению полного момента количества движения и его проекции на ось oz. В этом случае соотношение

$$\psi_{JK}(\ldots q_i \ldots) = \sum_M \overset{*}{D}{}^J_{KM}(R) \psi_{JM}(\ldots x_i \ldots) \qquad (Д,12)$$

позволяет с помощью обобщенных сферических функций (функций Вигнера) перейти к новым функциям $\psi_{JK}(\ldots q_i \ldots)$, зависящим от координат q_i, получающихся из старых координат вращением R. При этом квантовое число K определяет проекцию полного момента на ось $o\zeta$, а координаты q_i являются координатами частиц относительно системы координат $\xi\eta\zeta$, которая получается из старой координатной системы xyz, с помощью операции вращения R.

Обратное к (Д,12) преобразование имеет вид

$$\psi_{JM}(\ldots x_i \ldots) = \sum_K D^J_{KM}(R)\, \psi_{JK}(\ldots q_t \ldots). \tag{Д,13}$$

Это преобразование позволяет выделить вращение системы как целого при рассмотрении произвольного движения многих взаимодействующих частиц в системе координат, связанной с центром инерции всех частиц.

§ Е. Некоторые преобразования сферических функций Лапласа

В связи с тем, что сферические функции Лапласа образуют полную ортогональную систему функций, произведение любого числа сферических функций от одних и тех же угловых переменных можно выразить через линейную комбинацию сферических функций тех же переменных. В частности, произведение двух сферических функций можно представить в виде

$$Y_{j_1 m_1}(\theta, \varphi)\, Y_{j_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} A_{j,\, m_1+m_2}(j_1 m_1 j_2 m_2)\, Y_{j,\, m_1+m_2}(\theta, \varphi). \tag{Е,1}$$

Коэффициенты линейной комбинации (Е,1) выражаются через коэффициенты векторного сложения

$$A_{jm}(j_1 m_1 j_2 m_2) \equiv \left\{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2j+1)}\right\}^{1/2} (j_1 j_2 00 \mid j0)\,(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm). \tag{Е,2}$$

Применяя несколько раз формулу (Е,1), можно представить в виде линейной комбинации сферических функций произведение любого числа сферических функций.

Пользуясь (Е,1), можно, например, показать, что

$$\int Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\, P_k(\cos\theta)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)\, d\Omega = C_k(lm, l'm'), \tag{Е,3}$$

где коэффициенты $C_k(lm, l'm')$ выражаются через коэффициенты векторного сложения

$$C_k(lm, l'm') = (-1)^m \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{2k+1} (ll'00 \mid k0)\,(ll', m, -m' \mid k, m - m'). \tag{Е,3а}$$

Аналогичным образом, с учетом ортогональности сферических функций можно доказать, что

$$\int Y^*_{jm} Y_{j_1 m_1} Y_{j_2 m_2}\, d\Omega = \left\{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2j+1)}\right\}^{1/2} (j_1 j_2 00 \mid j0)\,(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm). \tag{Е,4}$$