Обратное к (Д,12) преобразование имеет вид

$$\psi_{JM}(\ldots x_i \ldots) = \sum_K D^J_{KM}(R)\, \psi_{JK}(\ldots q_t \ldots). \qquad (Д,13)$$

Это преобразование позволяет выделить вращение системы как целого при рассмотрении произвольного движения многих взаимодействующих частиц в системе координат, связанной с центром инерции всех частиц.

## § Е. Некоторые преобразования сферических функций Лапласа

В связи с тем, что сферические функции Лапласа образуют полную ортогональную систему функций, произведение любого числа сферических функций от одних и тех же угловых переменных можно выразить через линейную комбинацию сферических функций тех же переменных. В частности, произведение двух сферических функций можно представить в виде

$$Y_{j_1 m_1}(\theta, \varphi)\, Y_{j_2 m_2}(\theta, \varphi) = \sum_{j=|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} A_{j,\, m_1 + m_2}(j_1 m_1 j_2 m_2)\, Y_{j,\, m_1 + m_2}(\theta, \varphi). \qquad (Е,1)$$

Коэффициенты линейной комбинации (Е,1) выражаются через коэффициенты векторного сложения

$$A_{jm}(j_1 m_1 j_2 m_2) \equiv \left\{ \frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}{4\pi (2j + 1)} \right\}^{1/2} (j_1 j_2 00 \mid j0)\, (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm). \qquad (Е,2)$$

Применяя несколько раз формулу (Е,1), можно представить в виде линейной комбинации сферических функций произведение любого числа сферических функций.

Пользуясь (Е,1), можно, например, показать, что

$$\int Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\, P_k(\cos\theta)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)\, d\Omega = C_k(lm,\, l'm'), \qquad (Е,3)$$

где коэффициенты $C_k(lm,\, l'm')$ выражаются через коэффициенты векторного сложения

$$C_k(lm,\, l'm') = (-1)^m \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{2k+1} (ll'00 \mid k0)\, (ll',\, m,\, -m' \mid k,\, m - m'). \qquad (Е,3а)$$

Аналогичным образом, с учетом ортогональности сферических функций можно доказать, что

$$\int Y^*_{jm} Y_{j_1 m_1} Y_{j_2 m_2} d\Omega = \left\{ \frac{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}{4\pi (2j + 1)} \right\}^{1/2} (j_1 j_2 00 \mid j0)\, (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm). \qquad (Е,4)$$

Из свойств коэффициентов векторного сложения следует, что выражение (Е,4) отлично от нуля только при выполнении «условия треугольника» $\Delta(j_1 j_2 j)$ и условия $j_1 + j_2 + j =$ четному числу. Первое из этих условий выражает закон сохранения момента количества движения, второе — закон сохранения чётности.

Функции Вигнера $D^L_{MK}$ позволяют производить преобразование сферических функций Лапласа из одной системы координат в другую с помощью соотношения

$$Y_{LM}(\theta, \varphi) = \sum_K D^L_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{LK}(\theta', \varphi'), \tag{Е,5}$$

где $\theta$, $\varphi$ — полярные углы в системе координат $xyz$, а $\theta'$, $\varphi'$ — углы в системе $\xi\eta\zeta$.

Положение системы координат $\xi\eta\zeta$ относительно системы $xyz$ характеризуется углами Эйлера $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Обратное к (Е,5) преобразование имеет вид

$$Y_{LK}(\theta', \varphi') = \sum_M D^{L*}_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{LM}(\theta, \varphi). \tag{Е,6}$$

Полагая $K = 0$ и учитывая (Д,7), получим теорему сложения сферических функций:

$$Y_{L0}(\theta') = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \sum_M Y^*_{LM}(\alpha, \beta)\, Y_{LM}(\theta, \varphi), \tag{Е,7}$$

или

$$P_l(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}') = \frac{4\pi}{2L+1} \sum_M Y^*_{LM}(\boldsymbol{n})\, Y_{LM}(\boldsymbol{n}'), \tag{Е,8}$$

где единичные векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ определяются соответственно полярными углами $\alpha$, $\beta$ и $\theta$, $\varphi$.

Для некоторых приложений удобно записать сферическую функцию в виде произведения

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \overline{P}_{lm}(\cos\theta)\, \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{Е,9}$$

где $\overline{P}_{lm}(\cos\theta)$ — нормированная присоединенная функция Лежандра первого рода:

$$\int_{-1}^{1} \overline{P}_{lm}(x)\overline{P}_{l'm'}(x)\,dx = 1, \quad \overline{P}_{lm}(-x) = (-1)^{l-m}\overline{P}_{l,m}(x).$$

Приведем еще несколько соотношений, полезных при вычислениях со сферическими функциями:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta\cdot\bar{P}_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\bar{P}_{l+1,\,m}+\\
&\quad+\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\bar{P}_{l-1,\,m},\\
\sin\theta\cdot\bar{P}_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\bar{P}_{l+1,\,m+1}-\\
&\quad-\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\bar{P}_{l-1,\,m+1},\\
\sin\theta\cdot\bar{P}_{lm} &= -\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\bar{P}_{l+1,\,m-1}+\\
&\quad+\sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\bar{P}_{l-1,\,m-1}.
\end{aligned}\right\}\quad(\text{Е},10)$$

Производные функций $\bar{P}_{lm}$ по углу $\theta$ можно выразить равенством

$$\frac{d\bar{P}_{lm}}{d\theta}=\mp\sqrt{(l\pm m+1)(l\mp m)}\,\bar{P}_{l,\,m\pm1}\pm m\operatorname{ctg}\theta\bar{P}_{l,\,m},\qquad(\text{Е},11)$$

из которого следуют два полезных соотношения:

$$2\,\frac{d\bar{P}_{lm}}{d\theta}=\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\bar{P}_{l,\,m+1}-\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\bar{P}_{l,\,m-1},$$

$$2m\operatorname{ctg}\theta\bar{P}_{lm}=\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\bar{P}_{l,\,m+1}+\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\bar{P}_{l,\,m-1}.$$

## § Ж. Матричные элементы от тензорных операторов. Инвариантные операторы Тамма

Соотношения типа (А,13) имеют место не только для сферических функций, но и для любых других функций, являющихся собственными функциями операторов полного момента количества движения любой системы частиц. Эти соотношения позволяют вычислять матричные элементы от операторов соответствующих физических величин.

Пусть операторы $F_{\lambda\mu}$ образуют совокупность $(2\lambda+1)$ величин, преобразующихся при вращении системы координат друг через друга так же, как компоненты волновой функции, соответствующей моменту $\lambda$. Другими словами, величины $F_{\lambda\mu}$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям по отношению к операторам полного момента (А,12), как и собственные функции этих операторов (когда последние рассматриваются как операторы), т. е.

$$\left.\begin{aligned}
[(\hat{J}_x\pm iJ_y),\,F_{\lambda\mu}] &= \mp\sqrt{(\lambda\mp\mu)(\lambda\pm\mu+1)}\,F_{\lambda,\,\mu\pm1},\\
[\hat{J}_z,\,F_{\lambda\mu}] &= \mu F_{\lambda\mu},\\
F^{\dagger}_{\lambda\mu} &= (-1)^{\mu}F_{\lambda,\,-\mu}.
\end{aligned}\right\}\quad(\text{Ж},1)$$

Тензорные операторы $F_{\lambda\mu}$ зависят от переменных, на которые