Если учесть, что $[\hat{\boldsymbol{l}}, \hat{\boldsymbol{l}}] = i\boldsymbol{l}$, то из тождества (В,3) непосредственно следует

$$\boldsymbol{\sigma l} = \boldsymbol{l}^2 - (\boldsymbol{\sigma l})(\boldsymbol{\sigma l}). \qquad (В,4)$$

Далее, из (В,3) можно получить:

$$(\boldsymbol{r\sigma})(\boldsymbol{\sigma l}) = (\boldsymbol{r\sigma})(\boldsymbol{r}\nabla) - r^2(\boldsymbol{\sigma}\nabla),$$

или, вводя

$$\sigma_r = \frac{\boldsymbol{r\sigma}}{r}, \quad \sigma_r^2 = 1, \qquad (В,5)$$

приходим к соотношению

$$\boldsymbol{\sigma}\nabla = \sigma_r \left\{\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\boldsymbol{\sigma l}}{r}\right\}. \qquad (В,6)$$

Пользуясь (В,6) и (В,3), можно показать, что

$$\sigma_r(\boldsymbol{\sigma l})\sigma_r = \sigma_r(\boldsymbol{\sigma l})\frac{(\boldsymbol{\sigma r})}{r} = -(\boldsymbol{\sigma l} + 2). \qquad (В,7)$$

Из операторного равенства (В,7) следует, что если $\Phi_{l^{1/2}jm}$ является нормированной собственной функцией оператора $\boldsymbol{\sigma l}$ с собственным значением A, то функция $\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}$ будет также нормированной собственной функцией этого оператора с собственным значением $-(A+2)$. Учитывая этот результат и уравнения (В,2), можно написать:

$$(\boldsymbol{\sigma l})(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}) = -\left(j+\frac{3}{2}\right)(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}), \text{ если } l = j - \frac{1}{2}; \qquad (В,8а)$$

$$(\boldsymbol{\sigma l})(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}) = \left(j-\frac{1}{2}\right)(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}), \quad \text{если } l = j + \frac{1}{2}. \qquad (В,8б)$$

Сравнивая (В,8) с (В,2), мы убедимся, что

$$\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm} = \Phi_{l+1,{}^1/_2jm}, \text{ если } l = j - \frac{1}{2};$$

$$\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm} = \Phi_{l-1,{}^1/_2jm}, \text{ если } l = j + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, действие оператора σ_r на волновую функцию $\Phi_{l^{1/2}jm}$ сводится к «опрокидыванию» спина нуклона при сохранении полного момента количества движения.

§ Г. Векторные сферические функции

В ряде приложений удобно использовать так называемые *векторные сферические функции*, являющиеся собственными функциями оператора $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$, где $\hat{\boldsymbol{L}} = -i[\boldsymbol{r}\nabla]$ — оператор орбитального момента количества движения, а $\hat{\boldsymbol{S}}$ — оператор момента количества движения (А,8), соответствующий спину, равному 1.

Векторные сферические функции $\boldsymbol{Y}_{JLm}$ определяются *) через сферические функции Y_{LM} и функции $\boldsymbol{e}_{1p}$ оператора $\boldsymbol{S}$ путем использования правил § Б:

$$\boldsymbol{Y}_{JLm} = \sum_p (1Lp,\ m-p\,|\,Jm)\,\boldsymbol{e}_{1p} Y_{L,\,m-p}\,(\theta,\ \varphi). \qquad (\Gamma,1)$$

Обратное преобразование к (Г,1) имеет вид

$$\boldsymbol{e}_{1p} Y_{Lm} = \sum_{J=L,\ L\pm 1} (1Lmp\,|\,J,\,m+p)\,\boldsymbol{Y}_{JL,\,m+p}. \qquad (\Gamma,2)$$

Векторные сферические функции являются функциями полярных углов θ, φ. При вращении координатной системы они преобразуются по неприводимому представлению трехмерной группы вращения, т. е. по представлению $D^J_{mk}(\alpha,\beta,\gamma)$ и, следовательно, являются не векторами, а неприводимыми тензорами ранга J и четности $(-1)^L$. Каждому значению $J \geqslant 1$ соответствует три линейно независимых тензора ранга J:

$$\boldsymbol{Y}_{JJ,\,m},\quad \boldsymbol{Y}_{J,\,J+1,\,m},\quad \boldsymbol{Y}_{J,\,J-1,\,m}.$$

При этом четность первого из них $\boldsymbol{Y}_{JJm}$ противоположна четности двух следующих. При $J=0$ имеется только один тензор нулевого ранга $\boldsymbol{Y}_{010} = -(4\pi)^{-1/2}\boldsymbol{e}_r$, где $\boldsymbol{e}_r$ — единичный вектор в направлении радиуса вектора.

Векторные сферические функции являются собственными функциями операторов $\hat{\boldsymbol{J}}^2 \equiv (\hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}})^2$, $\hat{J}_z$ и удовлетворяют равенствам:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{J}}^2 \boldsymbol{Y}_{JLm} &= J(J+1)\,\boldsymbol{Y}_{JLm}, \\ \hat{J}_z \boldsymbol{Y}_{JLm} &= m\boldsymbol{Y}_{JLm}. \end{aligned}\right\} \qquad (\Gamma,3)$$

Векторные сферические функции образуют полную ортонормированную систему функций

$$\int \boldsymbol{Y}^\dagger_{JLm} \boldsymbol{Y}_{J'L'm'}\,d\Omega = \delta_{mm'}\delta_{JJ'}\delta_{LL'}; \qquad (\Gamma,4)$$

поэтому любое векторное поле $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ может быть разложено в ряд по векторным сферическим функциям:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \sum_{JLm} f_{JLm}(r)\,\boldsymbol{Y}_{JLm}(\theta,\ \varphi). \qquad (\Gamma,5)$$

Коэффициенты ряда (Г,5) в силу (Г,4) определяются интегралами

$$f_{JLm}(r) = \int \boldsymbol{B}(r)\,\boldsymbol{Y}^\dagger_{JLm}\,d\Omega. \qquad (\Gamma,6)$$

В частности, векторный потенциал $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, удовлетворяющий условию поперечности $(\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0)$, можно представить в виде суммы маг-

---

*) Несколько иной метод введения векторных сферических функций был предложен В. Сорокиным [24]; см. также [25—27].

нитных и электрических мультипольных потенциалов:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{u}_p e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = \pi \sum_{J=1}^{\infty} \sum_{m} i^J \sqrt{(2J+1)}\, D^J_{mp}(R) \{\boldsymbol{A}_M(Jm) + ip\boldsymbol{A}_E(Jm)\}, \tag{Г,7}$$

где $p=1$, -1 определяют круговую поляризацию поля; $D^J_{mp}(R)$ соответствует повороту векторов $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{u}_p$ к направлениям ортов координатной системы, в которой рассматривают векторный потенциал:

$$\boldsymbol{A}_M(Jm) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_J(kr)\, \boldsymbol{Y}_{JJm}, \tag{Г,8}$$

$$\boldsymbol{A}_E(Jm) = \sqrt{\frac{2J}{\pi(2J+1)}}\, j_{J+1}(kr) \boldsymbol{Y}_{J,\,J+1,\,m} - \sqrt{\frac{2(J+1)}{\pi(2J+1)}}\, j_{J-1}(kr) \boldsymbol{Y}_{J,\,J-1,\,m}; \tag{Г,9}$$

здесь $j_J(kr)$ — сферическая функция Бесселя.

Учитывая равенство (А,18) для оператора $\hat{\boldsymbol{L}} = -i[\boldsymbol{r}\nabla]$, имеем:

$$\hat{\boldsymbol{L}} Y_{Jm} = \sqrt{J(J+1)} \sum_{p=0,\,\pm 1} (1J,\, m+p,\, -p \mid Jm)\, Y_{J,\,m+p}\, \boldsymbol{e}_{-p}. \tag{Г,10}$$

Теперь с помощью (Г,1) можно выразить векторные сферические функции $\boldsymbol{Y}_{JJm}$ через Y_{Jm}:

$$\boldsymbol{Y}_{JJm} = \frac{\hat{\boldsymbol{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, Y_{Jm}. \tag{Г,11}$$

Пользуясь (Г,11), запишем потенциал магнитного мультиполя в операторной форме:

$$\boldsymbol{A}_M(Jm) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_J(kr) \frac{\hat{\boldsymbol{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, Y_{Jm}. \tag{Г,12}$$

Поскольку потенциал электрического мультиполя $\boldsymbol{A}_E(Jm)$ связан с потенциалом магнитного мультиполя соотношением

$$\boldsymbol{A}_E(Jm) = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_M(Jm), \tag{Г,13}$$

для потенциала электрического мультиполя можно написать:

$$\boldsymbol{A}_E(Jm) = \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{L}}}{\sqrt{J(J+1)}}\, j_J(kr)\, Y_{Jm}. \tag{Г,14}$$

Потенциалы (Г,12) и (Г,13) удовлетворяют уравнениям:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_\lambda(Jm) = k^2 \boldsymbol{A}_\lambda(Jm), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A}_\lambda(Jm) = 0, \quad \lambda = E,\ M. \tag{Г,15}$$

Потенциалу $\boldsymbol{A}_M(Jm)$ соответствует *магнитное мультипольное излучение,* напряженности электрического и магнитного полей которого равны соответственно

$$\mathcal{E}_M(Jm) = ikA_M(Jm), \quad \mathcal{H}_M(Jm) = \operatorname{rot} A_M(Jm); \tag{Г,16}$$

при этом напряженность электрического поля перпендикулярна к радиусу-вектору

$$\boldsymbol{r}\mathcal{E}_M(Jm) = 0.$$

Потенциалу $A_E(Jm)$ соответствует *электрическое мультипольное излучение*, напряженности электрического и магнитного полей которого равны соответственно

$$\mathcal{E}_E(Jm) = ikA_E(Jm), \quad \mathcal{H}_E(Jm) = \operatorname{rot} A_E(Jm). \tag{Г,17}$$

Учитывая (Г,13), (Г,15) и (Г,16), имеем:

$$\mathcal{E}_E(Jm) = \mathcal{H}_M(Jm) = \operatorname{rot} A_M(Jm),$$
$$\mathcal{E}_M(Jm) = -\mathcal{H}_E(Jm) = ik\, A_M(Jm).$$

В электрическом мультипольном излучении напряженность магнитного поля перпендикулярна к радиусу-вектору

$$\boldsymbol{r}\mathcal{H}_E = 0.$$

§ Д. Вращение твердого тела и собственные функции симметричного волчка

Ориентация твердого тела в пространстве определяется тремя углами Эйлера α, β, γ, фиксирующими положение трех взаимно-перпендикулярных осей ξ, η, ζ, жестко связанных с телом. Переход от неподвижной системы координат xyz к системе координат $\xi\eta\zeta$, связанной с телом, осуществляется при помощи операции вращения $R(\alpha, \beta, \gamma)$, которое может быть представлено как произведение трех последовательных вращений $R(\gamma)R(\beta)R(\alpha)$: вращение $R(\alpha)$ на угол α вокруг оси z в направлении от оси oy к оси ox, в результате которого ось ox совпадает с прямой пересечения плоскостей xoy и $\xi o\eta$, затем вращение $R(\beta)$ на угол β вокруг нового положения оси ox, в результате которого ось oz совпадает с осью $o\zeta$, и, наконец, вращение $R(\gamma)$ на угол γ вокруг оси $o\zeta$.

Операции вращения $R(\alpha)$, $R(\beta)$ и $R(\gamma)$ изображаются матрицами:

$$R(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\beta) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

$$R(\gamma) \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$