получим с учетом (З, 22) искомый результат:

$$\left.\begin{aligned}\hat{J}_x D^J_{MK} &= \frac{1}{2}\{\sqrt{(J+M+1)(J-M)}\, D^J_{M+1,K} + \\ &\quad + \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, D^J_{M-1,K}\},\\ \hat{J}_y D^J_{MK} &= \frac{1}{2i}\{\sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, D^J_{M+1,K} - \\ &\quad - \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, D^J_{M-1,K}\}.\end{aligned}\right\} \tag{З,23}$$

§ И. Коэффициенты Рака

Сумма по магнитным квантовым числам произведений трех и большего числа коэффициентов векторного сложения может быть вычислена методом Рака [29]. Такие суммы выражаются через коэффициенты Рака $W(abcd;\ ef)$, зависящие от шести целых или полуцелых квантовых чисел моментов количества движения.

Наиболее часто используется равенство

$$\sum_{m_2 m_3 m m'} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm)(j j_3 m m_3 \mid JM)(j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j'm')(j_1 j' m_1 m' \mid JM) = \\ = \sqrt{(2j+1)(2j'+1)}\; W(j_1 j_2 J j_3;\ jj') \tag{И,1}$$

или эквивалентное ему равенство

$$\sum_{m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j_3 m_3)(j_3 j_4 m_3 m_4 \mid j_5 m_5)(j_2 j_4 m_2 m_4 \mid j_6 m_6) = \\ = \sqrt{(2j_3+1)(2j_6+1)}\,(j_1 j_6 m_1 m_6 \mid j_5 m_5)\; W(j_1 j_2 j_5 j_4; j_3 j_6). \tag{И,1а}$$

Если умножить правую и левую части (И, 1) на

$$(j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j'm)(j_1 j' m_1 m' \mid JM)$$

и просуммировать по j', то получим очень полезное равенство:

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm)(j j_3 m m_3 \mid JM) = \sum_{j'} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)}\,\times \\ \times (j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j', m_2+m_3)(j_1 j' m_1,\ m_2+m_3 \mid JM)\, W(j_1 j_2 J j_3;\ jj'). \tag{И,2}$$

Коэффициенты Рака широко используются при исследовании угловых корреляций нескольких последующих излучений в каскаде, угловых распределений рассеяния и продуктов ядерных реакций и т. д.

Коэффициенты Рака связывают две возможные схемы сложения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$:

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$, затем $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}$

или

2) $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}$, затем $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{c}$.

Основные свойства и численные значения коэффициентов Рака можно найти в обзоре Биденхарна, Блатта и Розе [34]. Ниже мы приведем некоторые из свойств этих коэффициентов, которые используются в этой книге.

Коэффициенты Рака отличны от нуля, только если выполняются соотношения треугольников

$$\triangle(abe),\quad \triangle(cde),\quad \triangle(acf),\quad \triangle(bdf).$$

Коэффициенты Рака удовлетворяют следующим свойствам симметрии:

$$W(abcd;\ ef)=W(badc;\ ef)=W(cdab;\ ef)=W(acbd;\ fe)=$$
$$=(-1)^{e+f-a-d}\,W(ebcf;\ ad)=(-1)^{e+f-b-c}\,W(ae_{fd};\ bc) \qquad (\text{И},3)$$

и правилам сумм

$$\sum_e (2e+1)(2f+1)\,W(abcd;\ ef)\,W(abcd;\ eg)=\delta_{fg}, \qquad (\text{И},3а)$$

$$\sum_e (-1)^{a+b-c}(2e+1)\,W(abcd;\ ef)\,W(bacd;\ eg)=W(agfb;\ cd). \qquad (\text{И},3б)$$

Если один из шести параметров коэффициентов Рака равен нулю, то с помощью (И, 3) такой коэффициент может быть сведен к коэффициенту:

$$W(abcd;\ 0f)=(-1)^{b+c-f}\frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}\,. \qquad (\text{И},4)$$

В ряде приложений часто используются коэффициенты Рака, в которых один из параметров равен $^1/_2$. Значения таких коэффициентов приведены в таблице 36.

Таблица 36. Коэффициенты $W(abcd;\ \frac{1}{2}f)$

	$a=b+\frac{1}{2},\ \lambda=b+d-f$	$a=b-\frac{1}{2},\ \lambda=b+d-f$
$c=d+{}^1/_2$	$(-1)^{\lambda}\left\{\frac{(b+d+f+2)(b+d-f+1)}{(2b+1)(2b+2)(2d+1)(2d+2)}\right\}^{1/2}$	$(-1)^{\lambda}\left\{\frac{(f-b+d+1)(f+b-a)}{2b(2b+1)(2d+1)(2d+2)}\right\}^{1/2}$
$c=d-{}^1/_2$	$(-1)^{\lambda}\left\{\frac{(f+b-d+1)(f-b+d)}{(2b+1)(2b+2)2d(2d+1)}\right\}^{1/2}$	$(-1)^{\lambda}\left\{\frac{(b+d+f+1)(b+d-f)}{2b(2b+1)2c(2c+1)}\right\}^{1/2}$

В качестве примера применения коэффициентов Рака для вычисления суммы по магнитным квантовым числам произведений коэффициентов векторного сложения вычислим

$$S(J_1JJ_2)=4\pi\sum_{MM_1}\left|(\Phi_{J_1M_1},\ Y_{JM}\Phi_{J_2M_2})\right|^2, \qquad (\text{И},5)$$

где

$$\Phi_{jm}=\sum_{\lambda}\left(L\frac{1}{2},\ m-\lambda,\ \lambda\,|\,jm\right)Y_{L,\,m-\lambda}\chi_{\frac{1}{2}\lambda}. \qquad (\text{И},6)$$

являются собственными функциями операторов $\hat{j}^2$, $\hat{j}_z$ и $\hat{L}^2$ с собственными значениями $j(j+1)$, m и $L(L+1)$. Подставляя (И,6) в матричный элемент (И,5), получим после суммирования по спиновым переменным:

$$(\Phi_{J_1M_1}, Y_{JM}\Phi_{J_2M_2}) = \sum_\lambda \left(L_1\frac{1}{2}, M_1-\lambda, \lambda | J_1M_1\right) \times$$
$$\times \left(L_2\frac{1}{2}, M_2-\lambda, \lambda | J_2M_2\right)\left(Y_{L_1M_1-\lambda}, Y_{JM}Y_{L_2M_2-\lambda}\right).$$

Используя (Е,4), находим:

$$(\Phi_{J_1M_1}, Y_{JM}\Phi_{J_2M_2}) = \sqrt{\frac{(2J+1)(2L_2+1)}{4\pi(2L_1+1)}}\,(L_2J00 | L_10)\sum_\lambda (L_2J, M_2-$$
$$-\lambda, M | L_1M_1-\lambda)\left(L_1\frac{1}{2}, M_1-\lambda, \lambda | J_1M_1\right)\left(L_2\frac{1}{2}, M_2-\lambda, \lambda | J_2M_2\right). \tag{И,7}$$

Из свойств коэффициентов векторного сложения следует, что в (И,7) $M=M_1-M_2$. Теперь, пользуясь условиями симметрии коэффициентов векторного сложения, можно написать:

$$(L_2J, M_2-\lambda, M_1-M_2 | L_1, M_1-\lambda)\left(L_1\frac{1}{2}, M_1-\lambda, \lambda | J_1M_1\right) =$$
$$= (-1)^{L_1-M_1+\lambda}\left(\frac{2J_1+1}{2}\right)^{1/2}(L_2J, M_2-\lambda, M_1-M_2 | L_1, M_1-\lambda)\times$$
$$\times\left(L_1J_1, M_1-\lambda, -M_1 \middle| \frac{1}{2}, -\lambda\right) = (-1)^{L_1-M_1+\lambda}\left(\frac{2J_1+1}{2}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\sum_j\sqrt{(2j+1)(2L_1+1)}\,(JJ_1, M_1-M_2, -M_1 | j, -M_2)\times$$
$$\times\left(L_2j, M_2-\lambda, -M_2 \middle| \frac{1}{2}, -\lambda\right) W\left(L_2J\frac{1}{2}J_1;\ L_1j\right). \tag{И,8}$$

Подставляя (И,8) в (И,7) и используя (И,2) и свойства симметрии и ортогональности коэффициентов векторного сложения, получим:

$$(\Phi_{J_1M_1}, Y_{JM}\Phi_{J_2M_2}) = \frac{(-1)^{L_1+L_2-M_1-M_2}}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{(2J+1)(2L_2+1)(2J_1+1)}\times$$
$$\times(L_2J00 | L_10)(JJ_1, M_1-M_2, -M_1 | J_2, -M_2)\, W\left(L_2J\frac{1}{2}J_1;\ L_1J_2\right). \tag{И,9}$$

Подставляя (И,9) в (И,5) и принимая во внимание симметрию коэффициентов Рака, имеем окончательно:

$$S(J_1JJ_2) = (2J+1)(2L_2+1)(2J_1+1)\,|(L_2J00 | L_10)|^2\times$$
$$\times W^2\left(L_2J\frac{1}{2}\ J_1;\ L_1J_2\right) = (2J+1)(2L_2+1)(2J_1+1)\,|(L_2J00 | L_10)|^2\times$$
$$\times W^2\left(L_2J_2L_1J_1;\ \frac{1}{2}\ J\right). \tag{И,10}$$

Во многих работах часто используется функция $Z(abcd;\ ef)$, представляющая собой комбинацию коэффициентов Рака и коэффициентов векторного сложения:

$$Z(abcd;\ ef) \equiv i^{f-a+c}[(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{1/2} \times \\ \times (ac00\,|\,f0)\ W(abcd;\ ef). \qquad (\text{И},11)$$

Пользуясь функцией $Z(abcd;\ ef)$, можно записать (И, 10) в более сокращенном виде:

$$S(J_1JJ_2) = \frac{Z^2\left(L_2J_2L_1J_1;\ \frac{1}{2}\,J\right)}{2J_2+1}. \qquad (\text{И}, 12)$$

Таблицы функций Z и их основные свойства приведены в [34]. Здесь мы отметим только некоторые из них:

функции Z удовлетворяют следующему условию симметрии:

$$Z(abcd;\ ef) = (-1)^f Z(cdab;\ ef),$$

и правилу сумм:

$$\sum_b Z(abcd;\ ef)\,Z(abc'd;\ ef) = \delta_{cc'}(2a+1)(2d+1)\,|\,(ac00\,|\,f0)\,|^2.$$

Далее, $Z(abcd;\ ef) = 0$, если $a+c+f$ нечетно;

$$Z(abcd;\ e0) = \delta_{ac}\delta_{bc}(-1)^{b-e}(2b+1)^{1/2},$$

$$Z(abcd;\ 0f) = \delta_{ab}\delta_{cd}(-1)^{2f}(ac00\,|\,f0)\sqrt{(2a+1)(2c+1)}.$$

Поскольку функции $Z(abcd;\ ef)$ содержат коэффициенты Рака, то они отличны от нуля, если выполняют одновременно следующие соотношения треугольников:

$$\triangle(abe),\quad \triangle(cde),\quad \triangle(acf),\quad \triangle(bdf).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

§ К. Квадрупольный электрический момент ядра в адиабатическом приближении

Для системы A частиц оператор электрического момента мультипольности λ в координатном представлении может быть определен выражением

$$\hat{Q}_\lambda = \frac{2}{e}\sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}}\sum_{i=1}^{A} e_i\, r_i^\lambda\, Y_{\lambda 0}(\theta_i),$$

где e — единичный положительный электрический заряд, e_i — электри-