Во многих работах часто используется функция $Z(abcd;\ ef)$, представляющая собой комбинацию коэффициентов Рака и коэффициентов векторного сложения:

$$Z(abcd;\ ef) \equiv i^{f-a+c}[(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)]^{1/2} \times \\ \times (ac00 \mid f0)\, W(abcd;\, ef). \qquad (\text{И},11)$$

Пользуясь функцией $Z(abcd;\ ef)$, можно записать (И, 10) в более сокращенном виде:

$$S(J_1JJ_2) = \frac{Z^2\left(L_2J_2L_1J_1;\ \frac{1}{2}\ J\right)}{2J_2+1}. \qquad (\text{И}, 12)$$

Таблицы функций Z и их основные свойства приведены в [34]. Здесь мы отметим только некоторые из них:

функции Z удовлетворяют следующему условию симметрии:

$$Z(abcd;\ ef) = (-1)^f Z(cdab;\ ef),$$

и правилу сумм:

$$\sum_b Z(abcd;\, ef)\, Z(abc'd;\, ef) = \delta_{cc'}(2a+1)(2d+1)\,|(ac00 \mid f0)|^2.$$

Далее, $Z(abcd;\, ef) = 0$, если $a+c+f$ нечетно;

$$Z(abcd;\, e0) = \delta_{ac}\delta_{bc}(-1)^{b-e}(2b+1)^{1/2},$$

$$Z(abcd;\ 0f) = \delta_{ab}\delta_{cd}(-1)^{2f}(ac00 \mid f0)\sqrt{(2a+1)(2c+1)}.$$

Поскольку функции $Z(abcd;\, ef)$ содержат коэффициенты Рака, то они отличны от нуля, если выполняют одновременно следующие соотношения треугольников:

$$\triangle(abe),\quad \triangle(cde),\quad \triangle(acf),\quad \triangle(bdf).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

§ К. Квадрупольный электрический момент ядра в адиабатическом приближении

Для системы A частиц оператор электрического момента мультипольности λ в координатном представлении может быть определен выражением

$$\hat{Q}_\lambda = \frac{2}{e}\sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}}\sum_{i=1}^{A} e_i\, r_i^\lambda\, Y_{\lambda 0}(\theta_i),$$

где e — единичный положительный электрический заряд, e_i — электрический заряд частицы i; r_i, θ_i, φ_i — полярные координаты частицы i. В применении к ядру, содержащему Z протонов:

$$\hat{Q}_\lambda = 2\sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}}\sum_{i=1}^{Z} r_i^\lambda Y_{\lambda 0}(\theta_i). \qquad (К, 1)$$

Из (К, 1) непосредственно следует, что четность мультипольного элекрического момента равна $(-1)^\lambda$.

Для того чтобы выразить электрический мультипольный момент ядра через мультипольный момент, связанный с главными осями $\xi\eta\zeta$ системы частиц, перейдем от координат r_i, θ_i, φ_i к углам Эйлера α, β, γ, определяющим положение системы координат $\xi\eta\zeta$, и «внутренним» координатам r_i', θ_i', φ_i', определяющим положение частиц в системе координат $\xi\eta\zeta$. При таком преобразовании $r_i' = r_i$, а шаровые функции преобразуются, согласно формуле (Е, 5) приложения I по закону

$$Y_{\lambda 0}(\theta_i, \varphi_i) = \sum_\nu D^\lambda_{0\nu}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{\lambda\nu}(\theta', \varphi'). \qquad (К,2)$$

Подставляя (К,2) в (К,1), найдем связь оператора мультипольного момента (К,1) с оператором $\hat{Q}^0_{\lambda\nu}$ «внутреннего» (собственного) мультипольного момента:

$$\hat{Q}_\lambda = \sum_\nu D^\lambda_{0\nu}\,(\alpha, \beta, \gamma)\,\hat{Q}^0_{\lambda\nu}, \qquad (К,3)$$

где

$$\hat{Q}^0_{\lambda\nu} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}}\sum_{i=1}^{Z} r_i^\lambda Y_{\lambda\nu}(\theta_i', \varphi_i').$$

Для получения среднего значения мультипольного момента ядра в состоянии, описываемом волновой функцией ψ, надо вычислить интеграл

$$\langle \hat{Q}_\lambda \rangle \equiv (\psi, \hat{Q}_\lambda\, \psi). \qquad (К,4)$$

Состояние ядра, обладающего аксиально симметричной формой в адиабатическом приближении (см. § 19 и 20) определяется волновой функцией

$$\psi_{JMK} = \varphi^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)\,\Phi_K(\ldots \boldsymbol{r}_i \ldots), \qquad (К,5)$$

где $\varphi^J_{MK} = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\, D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma)$ — собственная волновая функция симметричного волчка (см. § Д приложения I), описывающая вращение ядра как целого с полным моментом количества движения J и проекциями M и K соответственно на ось z и ось симметрии ядра;

$\Phi_K(\ldots \boldsymbol{r}'_i \ldots)$ — волновая функция, описывающая внутреннее движение нуклонов в ядре со спином K.

Подставляя (К,5) и (К,3) в (К,4), получим:

$$\langle Q_\lambda \rangle_{JMK} = \sum_\nu \langle D^\lambda_{0\nu} \rangle_{JMK} \langle Q^0_{\lambda\nu} \rangle_K, \qquad (К,6)$$

где

$$\langle Q^0_{\lambda\nu} \rangle_K \equiv (\Phi_K, \hat{Q}^0_{\lambda\nu} \Phi_K)$$

— внутренний мультипольный электрический момент ядра, находящегося в состоянии Φ_K, а матричный элемент

$$\langle D^\lambda_{0\nu} \rangle_{JMK} = (\varphi^J_{MK}, D^\lambda_{0\nu} \varphi^J_{MK}).$$

Подставляя сюда (К,5) и учитывая формулу (Д,11), получим:

$$\langle D^\lambda_{0\nu} \rangle_{JMK} = (\lambda J 0 M \mid JM)(\lambda J 0 K \mid JK)\, \delta_{0\nu}.$$

Таким образом, выражение (К,6) для среднего мультипольного электрического момента ядра в состоянии JMK примет вид

$$\langle \hat{Q}_\lambda \rangle_{JMK} = (\lambda J 0 M \mid JM)(\lambda J 0 K \mid JK) \langle Q^0_{\lambda 0} \rangle_K .$$

Вследствие наличия центра симметрии у всех ядер, находящихся в основном состоянии, внутренний дипольный электрический момент $\langle Q^0_{10} \rangle_K$ равен нулю.

Если форма ядра отличается от сферической и ядро обладает аксиальной осью симметрии, то квадрупольный электрический момент $Q_0 \equiv \langle Q^0_{20} \rangle_K$ в собственной системе отличен от нуля. В этом случае

$$\langle \hat{Q}_{20} \rangle_{JMK} = (2J0M \mid JM)(2J0K \mid JK)\, Q_0. \qquad (К,7)$$

Обычно квадрупольным моментом ядра называют значение (К,7) в состоянии с $M = J$; тогда

$$Q \equiv \langle \hat{Q}_{20} \rangle_{JJK} = (2J0J \mid JJ)(2J0K \mid JK)\, Q_0.$$

Пользуясь таблицей коэффициентов векторного сложения, получим окончательную формулу:

$$Q = \frac{3K^2 - J(J+1)}{(J+1)(2J+3)} Q_0. \qquad (К,8)$$

В основном состоянии ядра $K = J$, поэтому квадрупольный электрический момент ядра в основном состоянии, характеризуемом спином $J\,(M = K = J)$, связан с внутренним квадрупольным электрическим моментом Q_0, характеризующим отклонение распределения заряда ядра от сферически симметричного, простой формулой:

$$Q = \frac{(J(2J-1)}{J+1)(2J+3)} Q_0. \qquad (К,9)$$