§ Л. Квадрупольный электрический момент, создаваемый одним протоном

Вычислим квадрупольный электрический момент, создаваемый протоном, который находится в состоянии, описываемом волновой функцией

$$R(r)\,\Phi_{l\frac{1}{2}jm}(\theta, \varphi, s_z), \tag{Л,1}$$

где $R(r)$ — радиальная волновая функция, а $\Phi_{l\frac{1}{2}jm}$ — спин-угловая функция

$$\Phi_{l\frac{1}{2}jm} = \sum_{m_s=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \left(l\frac{1}{2}, m-m_s, m_s \mid jm\right) Y_{l, m-m} \chi_{\frac{1}{2}m_s}. \tag{Л,2}$$

Оператор квадрупольного электрического момента частицы, несущей единичный положительный заряд, равен

$$\hat{Q} = r^2(3\cos^2\theta - 1) = 2\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, r^2 Y_{20}(\theta, \varphi).$$

Среднее значение этого оператора в состоянии (Л,1) при $m=j$ называют квадрупольным электрическим моментом протона:

$$Q_j = \langle \hat{Q} \rangle_{jj} = \langle r^2 \rangle 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} \sum_{s_z} \int \Phi^*_{l\frac{1}{2}jj} Y_{20} \Phi_{l\frac{1}{2}jj}\, d\Omega, \tag{Л,3}$$

где $\langle r^2 \rangle$ — среднее значение квадрата радиуса-вектора протона в рассматриваемом состоянии.

Подставляя (Л,2) в (Л,3) и учитывая ортогональность и нормировку спиновых функций χ, получим:

$$Q_j = \langle r^2 \rangle 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} \sum_{m_s} \left(l\frac{1}{2}, j-m_s, m_s \mid jj\right)^2 \int Y^*_{l, j-m_s} Y_{20} Y_{l, j-m_s}\, d\Omega.$$

Преобразуем произведение двух последних сферических функций, входящих в интеграл (см. приложение I, (Е,2))

$$Y_{20} Y_{l, j-m_s} = \sum_{L, M} \sqrt{\frac{5(2l+1)}{4\pi(2L+1)}}\, (l200 \mid L0)\, (l2, j-m_s 0 \mid LM)\, Y_{LM}.$$

Тогда, принимая во внимание ортогональность сферических функций Лапласа, найдем:

$$Q_j = 2\langle r^2 \rangle (l200 \mid l0) \sum_{m_s} \left(l\frac{1}{2}, j-m_s, m_s \mid jj\right)^2 (l2, j-m_s, 0 \mid l, j-m_s).$$

Учитывая, что $(l200\,|\,l0) = -\dfrac{l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)\,l\,(l+1)(l+3)}}$,

$$\left(l\,\tfrac{1}{2}\,l\,\tfrac{1}{2}\middle|\,l+\tfrac{1}{2},\,l+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad (l2l0\,|\,ll) = \frac{l(2l-1)}{\sqrt{(2l-1)\,l\,(l+1)(l+3)}},$$

получим при $j = l + \dfrac{1}{2}$:

$$Q_j = Q_{l+\frac{1}{2}} = -\langle r^2\rangle\frac{2l}{2l+3} = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle.$$

Далее, принимая во внимание, что

$$\left(l\,\tfrac{1}{2},\,l-1,\,\tfrac{1}{2}\middle|\,l-\tfrac{1}{2},\,l-\tfrac{1}{2}\right)^2 = (2l+1)^{-1},$$

$$\left(l\,\tfrac{1}{2}\,l,\,-\tfrac{1}{2}\middle|\,l-\tfrac{1}{2},\,l-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2l\,(2l+1)^{-1},$$

$$(l2,\,l-1,\,0\,|\,l,\,l-1) = \frac{3(l-1)^2 - l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)(l+1)\,l\,(2l+3)}},$$

получим при $j = l - \dfrac{1}{2}$:

$$Q_j = Q_{l-\frac{1}{2}} = -\frac{2(l-1)}{2l+1}\langle r^2\rangle = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle.$$

Таким образом в обоих случаях $j = l \pm \dfrac{1}{2}$ квадрупольный момент протона выражается одной формулой:

$$Q_j = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЕМ ДИРАКА

§ M. Свободное движение частицы со спином $^1/_2$

Волновое поле частиц со спином $^1/_2$ описывается уравнением Дирака, которое можно записать в виде

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_D\psi, \tag{M,1}$$

где оператор Гамильтона

$$H_D = c\alpha\hat{p} + mc^2\beta, \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla. \tag{M,2}$$

Четырехмерные эрмитовские матрицы Дирака выражаются через двумерные матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$