Учитывая, что $(l200\,|\,l0) = -\dfrac{l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)\,l\,(l+1)(l+3)}}$,

$$\left(l\tfrac{1}{2}\,l\,\tfrac{1}{2}\middle|\,l+\tfrac{1}{2},\,l+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad (l2l0\,|\,ll) = \frac{l(2l-1)}{\sqrt{(2l-1)\,l\,(l+1)(l+3)}},$$

получим при $j = l + \frac{1}{2}$:

$$Q_j = Q_{l+\frac{1}{2}} = -\langle r^2\rangle\frac{2l}{2l+3} = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle.$$

Далее, принимая во внимание, что

$$\left(l\tfrac{1}{2},\,l-1,\,\tfrac{1}{2}\middle|\,l-\tfrac{1}{2},\,l-\tfrac{1}{2}\right)^2 = (2l+1)^{-1},$$

$$\left(l\tfrac{1}{2}\,l,\,-\tfrac{1}{2}\middle|\,l-\tfrac{1}{2},\,l-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 2l\,(2l+1)^{-1},$$

$$(l2,\,l-1,\,0\,|\,l,\,l-1) = \frac{3(l-1)^2 - l(l+1)}{\sqrt{(2l-1)(l+1)\,l\,(2l+3)}},$$

получим при $j = l - \frac{1}{2}$:

$$Q_j = Q_{l-\frac{1}{2}} = -\frac{2(l-1)}{2l+1}\langle r^2\rangle = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle.$$

Таким образом в обоих случаях $j = l \pm \frac{1}{2}$ квадрупольный момент протона выражается одной формулой:

$$Q_j = -\frac{2j-1}{2j+2}\langle r^2\rangle.$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ III

# ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЕМ ДИРАКА

## § М. Свободное движение частицы со спином $^1/_2$

Волновое поле частиц со спином $^1/_2$ описывается уравнением Дирака, которое можно записать в виде

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_D\psi, \tag{М,1}$$

где оператор Гамильтона

$$H_D = c\alpha\hat{p} + mc^2\beta, \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla. \tag{М,2}$$

Четырехмерные эрмитовские матрицы Дирака выражаются через двумерные матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и двумерную единичную матрицу $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ с помощью соотношений:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{M,3}$$

Четырехкомпонентная волновая функция $\psi$ записывается в виде столбца

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix},$$

а эрмитовски сопряженная к ней функция $\psi^\dagger$ — в виде строки

$$\psi^\dagger = (\psi_1^*, \ \psi_2^*, \ \psi_3^*, \ \psi_4^*).$$

Из волновых функций $\psi^\dagger$, $\psi$ и матриц Дирака можно построить величины, обладающие определенными тензорными свойствами. Так, билинейная комбинация волновых функций $\psi^\dagger\beta\psi$ является скаляром. Если ввести три матрицы $\gamma_k = -i\beta\alpha_k$ $(k = 1, 2, 3)$ и $\gamma_4 = \beta$, то с их помощью можно построить билинейные комбинации $\psi^\dagger\beta\gamma_\mu\psi$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$, преобразующиеся как компоненты четырехмерного вектора (см. § О). Величины

$$\psi^\dagger\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\psi \qquad (\mu \neq \nu)$$

образуют тензор второго ранга. Величина $\psi^\dagger\beta\gamma_\mu\gamma_5\psi$ преобразуется как псевдовектор, а $\psi^\dagger\beta\gamma_5\psi$, где $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ является псевдоскаляром.

Для многих приложений удобно выразить четырехкомпонентные функции $\psi$ через две двухкомпонентные ($\varphi$ и $\chi$):

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{M,4}$$

Тогда уравнение (М,1) для стационарных состояний с энергией $\varepsilon$ при учете (М,3) перейдет в систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\varphi &= c\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{p}}\chi + mc^2\varphi, \\ \varepsilon\chi &= c\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{p}}\varphi - mc^2\chi. \end{aligned}\right\} \tag{M,5}$$

Для состояний с определенным значением импульса оператор импульса совпадает с вектором импульса и система уравнений (М,5) переходит в

$$\left.\begin{aligned} (mc^2 - \varepsilon)\,\varphi + c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\chi &= 0, \\ c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\varphi - (mc^2 + \varepsilon)\,\chi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{M,5a}$$

Для разрешимости системы уравнений (М,5а) нужно, чтобы ее определитель равнялся нулю. Учитывая операторное тождество

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}],$$

для двух произвольных векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, коммутирующих с $\boldsymbol{\sigma}$, получим:

$$\begin{vmatrix} mc^2 - \varepsilon & c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} & mc^2 + \varepsilon \end{vmatrix} = m^2c^4 - \varepsilon^2 - c^2p^2 = 0,$$

откуда находим соотношение

$$\varepsilon = \pm\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \tag{М,6}$$

связывающее энергию частицы с ее импульсом. Двум значениям энергии (М,6) соответствуют два типа решений уравнения Дирака, которые будем называть решениями, соответствующими положительной и отрицательной энергии.

Из (М,5а) находим:

$$\chi = \frac{c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{mc^2 + \varepsilon}\varphi, \tag{М,7}$$

где $\varepsilon$ определяется (М,6).

Из (М,7) следует, что двухкомпонентные функции $\varphi$ и $\chi$ выражаются друг через друга. Таким образом, вместо (М,4) можно написать:

$$\psi = N\begin{pmatrix} u \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{mc^2 + \varepsilon}\, u \end{pmatrix} f(r), \tag{М,4а}$$

где $\varphi = uf(r)$; $f(r)$ — функция, не зависящая от спиновых переменных.

Выберем постоянную нормировки $N$ в (М,4а) так, чтобы выполнялось равенство

$$\psi^\dagger\psi = |f(\boldsymbol{r})|^2. \tag{М,8}$$

Легко убедиться, что если двухкомпонентные спиновые функции $\boldsymbol{u}$ нормированы условием

$$u^\dagger u = 1, \tag{М,8а}$$

то нормированная в смысле (М,8) функция $\psi$ имеет вид

$$\psi = \left(\frac{2\varepsilon}{mc^2 + \varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{mc^2 + \varepsilon}\, u \end{pmatrix} f(r). \tag{М,9}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что в состояниях с определенным импульсом матрица

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p} \end{pmatrix}$$

коммутирует с оператором гамильтона $H_D$ уравнения Дирака для свободного движения частицы. Следовательно, величина $\boldsymbol{\sigma p}$ является интегралом движения. Поскольку в этом случае $\boldsymbol{p}$ — интеграл движения, то интегралом движения должна быть проекция спина частицы на направление импульса частицы.

Если ось квантования выбрать вдоль направления импульса, то проекция спина частицы на это направление будет изображаться оператором $\frac{\hbar}{2}\sigma_z$. Собственные функции этого оператора

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

изображают состояния с определенной поляризацией частицы, соответствующие ориентации спина частицы вдоль и против направления импульса. Другие состояния поляризации частицы будут линейными комбинациями состояний, изображаемых функциями $u_1$ и $u_2$.

Если масса покоя частицы равна нулю, как, например, у нейтрино, то система уравнений (М,5а) переходит в систему

$$\varphi = \boldsymbol{\sigma n}\chi, \tag{М,10а}$$

$$\chi = \boldsymbol{\sigma n}\varphi, \tag{М,10б}$$

где $\boldsymbol{n} = \frac{c\boldsymbol{p}}{\varepsilon}$ — единичный вектор совпадающий с направлением импульса для состояний с положительной энергией и противоположный направлению импульса для состояний с отрицательной энергией. Волновая функция (М,9) в этом случае принимает вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u \\ \boldsymbol{\sigma n} u \end{pmatrix} f(r). \tag{М,11}$$

Составим сумму функций $\varphi$ и $\chi$. Тогда из (М,10б) следует, что

$$\Phi = \varphi + \chi \tag{М,12}$$

выражается через функцию $\varphi$:

$$\Phi = (1 + \boldsymbol{\sigma n})\,\varphi. \tag{М,12а}$$

Складывая (М,10а) и (М,10б), легко убедиться, что функция $\Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma n}\Phi. \tag{М,13}$$

Таким образом, функция $\Phi = \varphi + \chi$ является собственной функцией оператора проекции спина (в единицах $\hbar/2$) на направление импульса. Уравнение (М,13) имеет только одно собственное значение, равное единице. Следовательно, функция $\Phi$ удовлетворяет уравнению Дирака для свободного движения частицы с нулевой массой покоя и соответствует продольной поляризации частицы.

Итак, если частица с нулевой массой покоя находится в состоянии, описываемом функцией $\Phi$, то она имеет определенное состояние поляризации. При этом, если энергия частицы положительна, то проекция спина направлена вдоль импульса; если же энергия частицы отрицательна, то проекция спина частицы направлена против направления импульса.

Если из функций $\varphi$ и $\chi$ образовать функцию

$$F = \varphi - \chi, \tag{M,14}$$

то легко убедиться, что она будет удовлетворять уравнению

$$F = -\boldsymbol{\sigma n} F. \tag{M,15}$$

Следовательно, функция $F$ также изображает состояния с продольной поляризацией. Однако в этом случае в состояниях с положительной энергией проекция спина направлена против направления импульса, а в состояниях с отрицательной энергией — вдоль направления импульса.

## § Н. Матричные элементы некоторых операторов Дирака

В теории $\beta$-распада приходится вычислять матричные элементы от некоторых операторов Дирака, построенные на волновых функциях электрона $\psi_e$ и нейтрино $\psi_\nu$. Рассмотрим некоторые из этих матричных элементов.

Скалярное взаимодействие в разрешенном $\beta$-распаде содержит матричный элемент

$$(\psi_e^\dagger \beta \psi_\nu). \tag{Н,1}$$

Если выразить с помощью (М,9) и (М,11) четырехкомпонентные функции через двухкомпонентные:

$$\psi_e = \left(\frac{2\varepsilon}{mc^2+\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \dfrac{c\boldsymbol{\sigma p}}{mc^2+\varepsilon}\varphi_e \end{pmatrix}, \quad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi_\nu \\ \boldsymbol{\sigma n}\varphi_\nu \end{pmatrix},$$

то матричный элемент (Н,1) примет вид

$$(\psi_e^\dagger \beta \psi_\nu) = \left(\frac{4\varepsilon}{mc^2+\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\varphi_e^\dagger \left[1 - \frac{c(\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{\sigma n})}{mc^2+\varepsilon}\right] \varphi_\nu\right). \tag{Н,2}$$

Для описания разрешенных $\beta$-переходов без учета действия кулоновского поля ядра координатные части функций $\varphi_e$ и $\varphi_\nu$ полагают равными единице. Тогда



$$\varphi_e^\dagger \varphi_e = \varphi_\nu^\dagger \varphi_\nu = 1$$