Итак, если частица с нулевой массой покоя находится в состоянии, описываемом функцией Φ, то она имеет определенное состояние поляризации. При этом, если энергия частицы положительна, то проекция спина направлена вдоль импульса; если же энергия частицы отрицательна, то проекция спина частицы направлена против направления импульса.

Если из функций φ и χ образовать функцию

$$F=\varphi-\chi, \tag{М,14}$$

то легко убедиться, что она будет удовлетворять уравнению

$$F=-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}F. \tag{М,15}$$

Следовательно, функция F также изображает состояния с продольной поляризацией. Однако в этом случае в состояниях с положительной энергией проекция спина направлена против направления импульса, а в состояниях с отрицательной энергией — вдоль направления импульса.

§ Н. Матричные элементы некоторых операторов Дирака

В теории β-распада приходится вычислять матричные элементы от некоторых операторов Дирака, построенные на волновых функциях электрона ψ_e и нейтрино ψ_ν. Рассмотрим некоторые из этих матричных элементов.

Скалярное взаимодействие в разрешенном β-распаде содержит матричный элемент

$$(\psi_e^\dagger\beta\psi_\nu). \tag{Н,1}$$

Если выразить с помощью (М,9) и (М,11) четырехкомпонентные функции через двухкомпонентные:

$$\psi_e=\left(\frac{2\varepsilon}{mc^2+\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varphi_e\\ \dfrac{c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{mc^2+\varepsilon}\varphi_e\end{pmatrix},\quad \psi_\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_\nu\\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}\varphi_\nu\end{pmatrix},$$

то матричный элемент (Н,1) примет вид

$$(\psi_e^\dagger\beta\psi_\nu)=\left(\frac{4\varepsilon}{mc^2+\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi_e^\dagger\left[1-\frac{c(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n})}{mc^2+\varepsilon}\right]\varphi_\nu\right). \tag{Н,2}$$

Для описания разрешенных β-переходов без учета действия кулоновского поля ядра координатные части функций φ_e и φ_ν полагают равными единице. Тогда

$$\varphi_e^\dagger\varphi_e=\varphi_\nu^\dagger\varphi_\nu=1$$

и квадрат модуля матричного элемента (Н,2), усредненный по спиновым состояниям легких частиц, будет равен

$$2 \langle |\psi_e^\dagger \beta\psi_\nu)|^2\rangle_{\text{спин}} = 1 - \frac{pc}{\varepsilon} \cos\theta = 1 - \frac{v}{c} \cos\theta, \qquad (\text{Н},3)$$

где θ — угол между направлениями вылета электрона и нейтрино. При получении (Н,3) была учтена связь импульса со скоростью частицы

$$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{v}{c^2}.$$

Таким же путем можно показать, что в случае векторного взаимодействия корреляция в направлениях вылета электрона и нейтрино определяется выражением

$$2 \langle |(\psi_e^\dagger\psi_\nu)|^2\rangle_{\text{спин}} = 1 + \frac{v}{c} \cos\theta. \qquad (\text{Н},4)$$

Формулы (Н,3) и (Н,4) показывают, что угловая корреляция уменьшается при уменьшении скорости электронов и исчезает совсем при $v = 0$, а максимум угловой корреляции достигается при $\frac{v}{c} \to 1$. Далее из (Н,3) и (Н,4) следует, что при скалярном взаимодействии электрон и нейтрино разлетаются преимущественно в противоположном направлении, а при векторном взаимодействии они вылетают в одном направлении. Поскольку угловая корреляция пропорциональна первой степени косинуса угла между направлениями вылета обеих частиц, то она отсутствует при усреднении по всем направлениям вылета нейтрино. Таким образом, если не фиксировать направления отдачи ядра, которое связано с направлением вылета нейтрино, то угловое распределение электронов в разрешенных переходах будет изотропным.

При определении угловой корреляции в направлениях вылета электрона и нейтрино для псевдовекторного варианта взаимодействия надо вычислить матричный элемент

$$(\psi_e^\dagger \boldsymbol{\sigma}\psi_\nu).$$

Переходя к двухкомпонентным волновым функциям, имеем:

$$(\psi_e^\dagger \boldsymbol{\sigma}\psi_\nu) = \left(\frac{4\varepsilon}{mc^2 + \varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\varphi_e^\dagger \left[\boldsymbol{\sigma} + \frac{c(\boldsymbol{\sigma p})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma n})}{mc^2 + \varepsilon}\right] \varphi_\nu\right).$$

Квадрат модуля этого матричного элемента после усреднения по спиновым состояниям электрона и нейтрино принимает вид

$$2 \langle |(\psi_e^\dagger \boldsymbol{\sigma}\psi_\nu)|^2\rangle_{\text{спин}} = 1 - \frac{v}{3c} \cos\theta. \qquad (\text{Н},5)$$

При получении (Н,5) мы использовали равенство

$$2 \langle (\boldsymbol{\sigma p})(\boldsymbol{\sigma}^* \boldsymbol{n})\rangle_{\text{спин}} = \frac{1}{3} (\boldsymbol{pn}).$$

Таким же образом можно показать, что в случае тензорного варианта взаимодействия

$$2 \langle | \psi_e^\dagger \beta \sigma \psi_\nu) |^2 \rangle_{\text{спин}} = 1 + \frac{v}{3c} \cos \theta. \qquad \text{(Н,6)}$$

§ О. Некоторые преобразования волновых функций Дирака

Для исследования свойств преобразований волновых функций Дирака и билинейных комбинаций, составленных из этих функций и операторов γ_μ, удобно переписать уравнение Дирака (М,1) в более симметричном виде относительно пространственных и временных переменных. Для этого введем четыре координаты x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), такие, чтобы первые три (x_1, x_2, x_3) являлись компонентами радиуса-вектора, а $x_4 = ict$. Тогда уравнение (М,1) можно преобразовать к виду

$$\left(i \sum_\mu \gamma_\mu p_\mu + mc \right) \psi = 0, \quad p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \qquad \text{(О,1)}$$

Матрицы γ_μ определены в § М. Эти матрицы эрмитовские и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Уравнение, эрмитовски сопряженное к (О,1) имеет вид

$$i \sum_\mu p_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu - mc \psi^\dagger = 0.$$

Если умножить полученное уравнение справа на матрицу γ_4 и ввести функцию

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4, \qquad \text{(О,2)}$$

называемую *дираковски сопряженной* относительно ψ, то получим уравнение

$$i \sum_\mu p_\mu \overline{\psi} \gamma_\mu - mc \overline{\psi} = 0. \qquad \text{(О,3)}$$

Уравнение (О,3) называют «*сопряженным*» относительно уравнения (О,1).

Как известно [35], уравнения Дирака остаются инвариантными при ортогональных преобразованиях координат

$$\begin{gathered} x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \\ \sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}. \end{gathered} \qquad \text{(О,4)}$$

Преобразованию координат (О,4) соответствует преобразование волновых функций Дирака

$$\psi' = S\psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi} S^{-1}, \qquad \text{(О,5)}$$