Таким же образом можно показать, что в случае тензорного варианта взаимодействия

$$2 \langle | \psi_e^{\dagger} \beta \sigma \psi_{\nu}) |^2 \rangle_{\text{спин}} = 1 + \frac{v}{3c} \cos \theta. \tag{Н,6}$$

§ О. Некоторые преобразования волновых функций Дирака

Для исследования свойств преобразований волновых функций Дирака и билинейных комбинаций, составленных из этих функций и операторов γ_μ, удобно переписать уравнение Дирака (М,1) в более симметричном виде относительно пространственных и временных переменных. Для этого введем четыре координаты x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), такие, чтобы первые три (x_1, x_2, x_3) являлись компонентами радиуса-вектора, а $x_4 = ict$. Тогда уравнение (М,1) можно преобразовать к виду

$$\left(i \sum_\mu \gamma_\mu p_\mu + mc \right) \psi = 0, \quad p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{О,1}$$

Матрицы γ_μ определены в § М. Эти матрицы эрмитовские и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Уравнение, эрмитовски сопряженное к (О,1) имеет вид

$$i \sum_\mu p_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu - mc \psi^\dagger = 0.$$

Если умножить полученное уравнение справа на матрицу γ_4 и ввести функцию

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4, \tag{О,2}$$

называемую *дираковски сопряженной* относительно ψ, то получим уравнение

$$i \sum_\mu p_\mu \overline{\psi} \gamma_\mu - mc \overline{\psi} = 0. \tag{О,3}$$

Уравнение (О,3) называют «*сопряженным*» относительно уравнения (О,1).

Как известно [35], уравнения Дирака остаются инвариантными при ортогональных преобразованиях координат

$$\begin{gathered} x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \\ \sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\nu'} = \delta_{\nu\nu'}. \end{gathered} \tag{О,4}$$

Преобразованию координат (О,4) соответствует преобразование волновых функций Дирака

$$\psi' = S\psi, \quad \overline{\psi}' = \overline{\psi} S^{-1}, \tag{О,5}$$

где матрица преобразования S определяется коэффициентами $(a_{\mu\nu})$ преобразования координат (О,4) с помощью соотношения

$$S^{-1}\gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu. \tag{О,6}$$

Матрица S (вследствие мнимости четвертой координаты x_4) в общем случае не унитарна, а $S^\dagger=\gamma_4 S^{-1}\gamma_4$.

Частным случаем преобразования (О,4) является собственное преобразование Лоренца. Так, например, переходу от системы координат x_μ к системе x'_μ, движущейся относительно первой со скоростью v вдоль оси x, соответствует матрица преобразования

$$(a_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & i\frac{v}{c}\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{v}{c}\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Операции инверсии пространственных координат соответствует матрица преобразования

$$(a_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{О,7}$$

Пользуясь (О,4), можно убедиться, что преобразованию инверсии (О,7) соответствует матрица $S=\gamma_4$. Таким образом, при инверсии пространственных координат волновые функции Дирака преобразуются по закону

$$\psi'=\gamma_4\psi,\quad \overline{\psi}'=\overline{\psi}\gamma_4^{-1}=\overline{\psi}\gamma_4.$$

Пользуясь формулами (О,5) и (О,6), легко доказать указанные в § М свойства преобразований билинейных комбинаций, составленных из волновых функций Дирака. В самом деле, согласно (О,5)

$$\overline{\psi}'\psi'=\overline{\psi}S^{-1}S\psi=\overline{\psi}\psi.$$

Таким образом, $\overline{\psi}\psi\equiv\psi^\dagger\gamma_4\psi$ является скаляром. Далее, согласно (О,5) и (О,6)

$$\overline{\psi}'\gamma_\mu\psi'=\overline{\psi}S^{-1}\gamma_\mu S\psi=\sum_\nu a_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma_\nu\psi,$$

следовательно, величины $\overline{\psi}\gamma_\mu\psi=\psi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\psi$ преобразуются как компоненты 4-вектора. Таким же образом можно доказать свойства других билинейных комбинаций волновых функций Дирака, указанных в § М.

Рассмотрим теперь унитарную матрицу C, преобразующую эрмитовские матрицы Дирака γ_μ в транспонированные с помощью соотношений

$$\gamma_\mu^{\mathrm{T}} = -C\gamma_\mu C^{-1}. \tag{O,8}$$

Матрица C не эрмитова, так как

$$C^\dagger = -C^*, \quad \text{или} \quad C^{\mathrm{T}} = -C. \tag{O,9}$$

В частном случае представления матриц γ_μ, при котором выбираются

$$\gamma_4 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = -i\beta\alpha_k = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, k = 1, 2, 3, \tag{O,10}$$

матрица C, определяемая соотношением (O,8), имеет вид

$$C = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{O,11}$$

Введем волновые функции ψ^c и $\overline{\psi}^c$ с помощью соотношений:

$$\psi^c = C^{-1}\overline{\psi}, \quad \overline{\psi}^c = \psi C. \tag{O,12}$$

Функции ψ^c и $\overline{\psi}^c$ называются *зарядово-сопряженными волновыми функциями*.

Легко убедиться, что при применении операции зарядового сопряжения (O,12) к волновым функциям Дирака четырехмерный вектор плотности тока и заряда

$$j_\mu \equiv \overline{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{O,13}$$

меняет знак. Действительно, согласно (O,12) и (O,8)

$$j_\mu^c \equiv \overline{\psi}^c\gamma_\mu\psi^c = \psi C\gamma_\mu C^{-1}\overline{\psi} = -\psi\gamma_\mu^{\mathrm{T}}\overline{\psi} = -\overline{\psi}\gamma_\mu\psi \equiv -j_\mu. \tag{O,14}$$

Уравнение Дирака для частицы, движущейся в электромагнитном поле, определяемом четырехмерным потенциалом A_μ ($A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$, $A_3 = A_z$, $A_4 = i\varphi$), можно получить из (O,1) формальной заменой

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu,$$

где e — заряд частицы. Таким образом, уравнение Дирака при наличии электромагнитного поля имеет вид

$$\left[i\sum_\mu \gamma_\mu\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right]\psi = 0, \tag{O,15}$$

при этом функция $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_4$ удовлетворяет уравнению

$$i\sum_\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right)\overline{\psi}\gamma_\mu - mc\overline{\psi} = 0. \tag{O,16}$$

Подставляя $C\psi^c = \overline{\psi}$ и учитывая (О,12) в (О,16), получим:

$$\left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^{\mathrm{T}} \left(p_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu}\right) - mc\right] C\psi^c = 0.$$

Умножая это уравнение слева на C^{-1} и учитывая равенство

$$C^{-1}\gamma_{\mu}^{\mathrm{T}} = -\gamma_{\mu} C^{-1},$$

вытекающее из (О,8), получим уравнение, описывающее зарядово-сопряженное состояние:

$$\left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \left(p_{\mu} + \frac{e}{c} A_{\mu}\right) + mc\right] \psi^c = 0. \tag{О,17}$$

Сравнивая (О,17) и (О,15), мы убедимся, что функция ψ^c описывает частицу, заряд которой отличается знаком от заряда частицы, описываемой уравнением (О,15).

§ П. Спин-орбитальное взаимодействие и уравнение Дирака

Свободное движение частицы со спином $^1/_2$ описывается уравнением Дирака

$$\left(i \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_{\mu} p_{\mu} + mc\right) \psi = 0, \quad p_{\mu} = -i \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}. \tag{П,1}$$

Движение частицы во внешнем поле можно описать уравнением

$$\left(i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} p_{\mu} + mc\right) \psi = \sum_{i} Q_i \psi, \tag{П,2}$$

где величины Q_i определяются возможными типами взаимодействия частицы с внешними полями. Из этих взаимодействий мы рассмотрим только два:

а) взаимодействие с внешним скалярным полем, соответствующим притяжению, когда

$$Q_S = -\frac{1}{c} V; \tag{П,3}$$

б) взаимодействие с внешним векторным полем, когда

$$Q_V = \frac{i}{c} \gamma_{\mu} B_{\mu}. \tag{П,4}$$

Частным случаем взаимодействия (П,4) является взаимодействие с электромагнитным полем, характеризуемым четырехмерным потенциалом $A_{\mu} = (\boldsymbol{A},\ iA_0)$. В этом случае $B_{\mu} = eA_{\mu}$.