Подставляя $C\psi^c = \overline{\psi}$ и учитывая (О,12) в (О,16), получим:

$$\left[i\sum_\mu \gamma_\mu^{\mathrm{T}}\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right] C\psi^c = 0.$$

Умножая это уравнение слева на C^{-1} и учитывая равенство

$$C^{-1}\gamma_\mu^{\mathrm{T}} = -\gamma_\mu C^{-1},$$

вытекающее из (О,8), получим уравнение, описывающее зарядово-сопряженное состояние:

$$\left[i\sum_\mu \gamma_\mu\left(p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right]\psi^c = 0. \tag{О,17}$$

Сравнивая (О,17) и (О,15), мы убедимся, что функция ψ^c описывает частицу, заряд которой отличается знаком от заряда частицы, описываемой уравнением (О,15).

§ П. Спин-орбитальное взаимодействие и уравнение Дирака

Свободное движение частицы со спином $^1/_2$ описывается уравнением Дирака

$$\left(i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu + mc\right)\psi = 0, \quad p_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{П,1}$$

Движение частицы во внешнем поле можно описать уравнением

$$\left(i\sum_\mu \gamma_\mu p_\mu + mc\right)\psi = \sum_i Q_i\psi, \tag{П,2}$$

где величины Q_i определяются возможными типами взаимодействия частицы с внешними полями. Из этих взаимодействий мы рассмотрим только два:

а) взаимодействие с внешним скалярным полем, соответствующим притяжению, когда

$$Q_S = -\frac{1}{c}V; \tag{П,3}$$

б) взаимодействие с внешним векторным полем, когда

$$Q_V = \frac{i}{c}\gamma_\mu B_\mu. \tag{П,4}$$

Частным случаем взаимодействия (П,4) является взаимодействие с электромагнитным полем, характеризуемым четырехмерным потенциалом $A_\mu = (\boldsymbol{A}, iA_0)$. В этом случае $B_\mu = eA_\mu$.

Подставляя (П,3) и (П,4) в (П,2), преобразуем это уравнение к виду

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left\{c\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{p}-\frac{1}{c}\boldsymbol{B}\right)+\beta(mc^2+V)+B_0\right\}\psi. \qquad (\text{П},5)$$

В дальнейшем положим для простоты $\boldsymbol{B}=0$. В случае взаимодействия с электромагнитным полем это будет соответствовать движению в поле скалярного потенциала.

Стационарные решения (П,5) можно искать в виде

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}\exp\left(-i\frac{mc^2+\varepsilon}{\hbar}t\right), \qquad (\text{П},6)$$

где φ и χ — двухкомпонентные функции. Выражая матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и β через двумерные матрицы $\boldsymbol{\sigma}$ и I с помощью равенств

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & 0\\ 0 & -\mathrm{I}\end{pmatrix}$$

и подставляя (П,6) в (П,5) получим при $\boldsymbol{B}=0$:

$$(\varepsilon-B_0-V)\varphi=c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\chi, \qquad (\text{П},7\text{а})$$

$$(\varepsilon+2mc^2-B_0+V)\chi=c\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\varphi. \qquad (\text{П},7\text{б})$$

Из уравнения (П,7б) можно выразить функцию χ через функцию φ; тогда получим:

$$\chi=\left(1+\frac{\varepsilon-B_0+V}{2mc}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{2mc}\varphi. \qquad (\text{П},8)$$

Если выполняется неравенство

$$\varepsilon-B_0-V\ll 2mc^2, \qquad (\text{П},9)$$

то

$$\chi\approx\left(1-\frac{\varepsilon-B_0+V}{2mc^2}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}}{2mc}\varphi. \qquad (\text{П},10)$$

Подставляя (П,10) в (П,7а), находим приближенное уравнение, определяющее в нерелятивистском приближении функцию φ:

$$(\varepsilon-V-B_0)\varphi=\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\left(1-\frac{\varepsilon-B_0+V}{2mc^2}\right)\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p}\varphi. \qquad (\text{П},11)$$

Используя равенства:

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^2,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})f(r)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})=f(r)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})-i\hbar(\boldsymbol{\sigma}\operatorname{grad}f)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})=$$
$$=f(r)\boldsymbol{p}^2-i\hbar\{(\operatorname{grad}f)\boldsymbol{p}+i\boldsymbol{\sigma}[(\operatorname{grad}f),\ \boldsymbol{p}]\},$$

где $f(r)$ — произвольная функция координат, преобразуем (П,11) к виду *)

$$\varepsilon\varphi = \left\{V + B_0 + \left(1 - \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2mc}\right)\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar\sigma}{4m^2c^2}[p, \operatorname{grad}(B_0 - V)] - \right.$$
$$\left. - \frac{i\hbar\, p \operatorname{grad}(B_0 - V)}{4m^2c^2}\right\}\varphi. \qquad (\text{П},12)$$

Если выполняется приближенное равенство

$$\varepsilon - B_0 + V \approx \frac{p^2}{2m}$$

и неравенство (П,9), то можно написать:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon - B_0 + V}{2mc^2}\right)\frac{p^2}{2m} \approx \left(1 - \frac{p^2}{4m^2c^2}\right)\frac{p^2}{2m} \approx c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2.$$

Пользуясь этим приближенным равенством, перепишем (П,12) в виде

$$\varepsilon\varphi = \left\{V + B_0 + \varepsilon_0 - \frac{\hbar\sigma}{4m^2c^2}[p, \operatorname{grad} B_0] + \frac{\hbar\sigma}{4m^2c^2}[p, \operatorname{grad} V] - \right.$$
$$\left. - \frac{i\hbar}{4m^2c^2} p \operatorname{grad}(B_0 - V)\right\}\varphi, \qquad (\text{П},13)$$

где $\varepsilon_0 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2$ — кинетическая энергия частицы, движущейся с импульсом p. Последний член правой части (П,13) приводит к небольшому изменению энергии частицы, не зависящему от ориентации ее спина. Члены

$$W = -\frac{\hbar\sigma}{4m^2c^2}[p, \operatorname{grad} B_0] + \frac{\hbar\sigma}{4m^2c^2}[p, \operatorname{grad} V], \qquad (\text{П},14)$$

входящие в правую часть уравнения (П,13), определяют энергию спин-орбитального взаимодействия частицы со скалярным полем V и четвертой компонентой векторного поля $B_4 = iB_0$.

---

*) Уравнение (П, 12) написано для ненормированной функции, поэтому оно содержит неэрмитовский оператор $\frac{i\hbar\, p \operatorname{grad}(B_0 - V)}{4m^2c^2}$. Если ввести вместо φ новую волновую функцию $\Phi = L\varphi$ и выбрать оператор L так, чтобы с требуемой точностью выполнялось условие нормировки

$$1 = \int (\varphi^\dagger\varphi + \chi^\dagger\chi)\, d\tau \approx \int \Phi^\dagger\Phi\, d\tau,$$

то новый гамильтониан $H' = LHL^{-1}$ будет содержать только эрмитовские члены. Однако мы не будем здесь совершать такое преобразование, так как оно не изменяет члена, соответствующего энергии спин-орбитального взаимодействия. Более подробно вопрос о правильной нормировке функций при переходе в уравнении Дирака к нерелятивистскому приближению рассмотрен в книге А. Ахиезера и В. Берестецкого [36]. См. также работы Фольди и Моутхаузера, Куршуноглы, Захера [37].

Рассмотрим, как может быть использовано найденное выражение энергии спин-орбитального взаимодействия (П,14) для случая нуклонов. Известно, что из-за сильного взаимодействия нуклонов с мезонным полем поведение нуклонов в электромагнитном поле не может быть описано уравнением Дирака. В нерелятивистском приближении получаются правильные результаты, если в соответствующем уравнении провести замену

$$\frac{e\hbar}{2Mc} \longrightarrow \mu \frac{e\hbar}{2Mc}, \tag{П,15}$$

где

$$\mu = \begin{cases} 2{,}7929 & \text{для протонов,} \\ -1{,}9131 & \text{для нейтронов;} \end{cases} \tag{П,16}$$

M — масса нуклона.

Полагая $B_0 = eA_0$ и учитывая (П,15), получим для спин-орбитального взаимодействия нуклонов с электростатическим полем A_0 следующее выражение:

$$W_{\text{эм}} = -\frac{e\hbar\mu}{4M^2c^2}\,\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{p}, \operatorname{grad} A_0], \tag{П,17}$$

где μ — магнитный момент нуклона, выраженный в ядерных магнетонах, определяется (П,16).

Для определения энергии спин-орбитального взаимодействия нуклона, движущегося в поле других нуклонов, в (П,14) следует m заменить на M и положить $V = \sum V_i$, где V_i — потенциальная энергия парного взаимодействия данного нуклона с i-м нуклоном ядра. Практически, однако, из-за незнания величины и радиальной зависимости истинного потенциала при исследовании спин-орбитального взаимодействия приходится вместо V использовать потенциал оптической модели $V_{\text{оптич}}$. Этот потенциал плавно изменяется внутри ядра и позволяет сравнительно хорошо описать упругое рассеяние на ядрах, однако он не совпадает с истинным потенциалом, действующим на нуклоны внутри ядра (см. главу XIII), который возможно сильно изменяется на малых расстояниях. Поэтому для энергии спин-орбитального взаимодействия приходится принимать выражение

$$W_{\text{я}} = b\,\frac{\hbar}{4M^2c^2}\,\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{p}, \operatorname{grad} V_{\text{оптич}}], \tag{П,18}$$

где величина b существенно зависит от принимаемой зависимости потенциала $V_{\text{оптич}}$ от координат.

Для потенциала $V_{\text{оптич}}$, обладающего центральной симметрией

$$[\boldsymbol{p}, \operatorname{grad} V_{\text{оптич}}] = -\hbar\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial V_{\text{оптич}}}{\partial r}\,\boldsymbol{l},$$

поэтому энергия спин-орбитального взаимодействия может быть записана в виде

$$W_я = -b\frac{\hbar^2}{4M^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V_{оптич}}{\partial r}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{l}) = -\beta\frac{1}{r}\frac{\partial V_{оптич}}{\partial r}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{l}). \qquad (П,19)$$

Значение параметра β зависит от принимаемой зависимости $V_{оптич}$ от r. В работе Зака, Биденхарна и Брейта [38] указывается, что потенциал, содержащий спин-орбитальное взаимодействие,

$$V_{оптич}(r) = -V_0\left(1-\beta\frac{1}{r}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{l})\frac{\partial}{\partial r}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

при значении параметров $V_0 = 47{,}32$ *Мэв*, $\beta = 7{,}4\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2$, $a = 2{,}3 \times 10^{-13}$ хорошо описывает измеренную экспериментально зависимость от энергии (в области 1—15 *Мэв*) фазовых смещений, соответствующих состояниям $p_{1/2}$ и $p_{3/2}$. Сравнительно удовлетворительные результаты дает в этом случае и потенциал, выбранный в форме прямоугольной потенциальной ямы:

$$V_{оптич}(r) = \begin{cases} -D-\beta(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{l})\dfrac{1}{R_0}\delta(r-R_0), & r<R_0, \\ 0, & r>R_0, \end{cases}$$

если

$$\beta = 12{,}2\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2,$$
$$R_0 = 3{,}21\cdot 10^{-13}\ см,$$
$$D = 19{,}65\ Мэв.$$

Для объяснения тех же экспериментальных результатов с помощью потенциала, имеющего экспоненциальную зависимость от расстояния,

$$V_{оптич}(r) = -V_0\left(1-\beta(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{l})\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\exp\left(-\frac{2r}{b}\right)$$

пришлось выбрать

$$V_0 = 155{,}5\ Мэв,$$
$$b = 1{,}924\cdot 10^{-13}\ см$$

и

$$\beta = 5\left(\frac{\hbar}{Mc}\right)^2.$$

Таким образом, использование (П,18) для описания спин-орбитального взаимодействия нуклонов в ядре возможно только при условии подбора коэффициента b, косвенно учитывающего отличие потенциала $V_{оптич}$ от истинного потенциала и неполное описание поведения нуклонов уравнением Дирака.