§B. Спин-угловые волновые функции или сферические функции со спином

При исследовании движения частицы со спином $^1/_2$ в центрально-симметричном поле приходится пользоваться волновыми функциями операторов $\hat{j}^2$, $\hat{j}_z$, $\hat{l}^2$, $\hat{s}^2$, где

$$\hat{l} = -i[\mathbf{r}\nabla]; \quad \hat{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}; \quad \hat{j} = \hat{l} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2};$$

$\boldsymbol{\sigma}$ — оператор, действующий на спиновые функции. Согласно предыдущему параграфу функции $\Phi_{l^1/_2jm}$ выражаются через сферические функции Y_{lm} и спиновые функции $\chi_{^1/_2\mu}$ с помощью соотношения

$$\Phi_{l^1/_2jm} = \sum_{\mu} \left(l\frac{1}{2},\ m-\mu,\ \mu \mid jm\right) Y_{l,\, m-\mu}(\vartheta,\ \varphi)\, \chi_{^1/_2\mu}(s_z). \tag{B,1}$$

Подставляя в это выражение значения коэффициентов векторного сложения, находим явный вид сферических функций со спином:

$$\Phi_{l,\, ^1/_2,\, l+^1/_2,\, m} = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,\, m-^1/_2}\, \chi_{^1/_2\, ^1/_2} + \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,\, m+^1/_2}\, \chi_{^1/_2,\, -^1/_2},$$

$$\Phi_{l,\, ^1/_2,\, l-^1/_2,\, m} = -\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,\, m-^1/_2}\, \chi_{^1/_2\, ^1/_2} + \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, Y_{l,\, m+^1/_2}\, \chi_{^1/_2,\, -^1/_2}.$$

Спин-угловые функции, или сферические функции со спином, являются также собственными функциями оператора $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}$ и удовлетворяют уравнениям:

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l})\, \Phi_{l^1/_2\, jm} = \left(j - \frac{1}{2}\right) \Phi_{l^1/_2jm}, \qquad \text{если } l = j - \frac{1}{2}, \tag{B,2а}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l})\, \Phi_{l^1/_2\, jm} = -\left(j + \frac{3}{2}\right) \Phi_{l^1/_2jm}, \qquad \text{если } l = j + \frac{1}{2}. \tag{B,2б}$$

Для вычисления собственных значений некоторых других операторов, встречающихся в теории ядра, используем операторное тождество

$$(\boldsymbol{\sigma}A)(\boldsymbol{\sigma}B) = AB + i\boldsymbol{\sigma}[AB], \tag{B,3}$$

где A и B — два произвольных векторных оператора, действующих на функции координат.

Если учесть, что $[\hat{\boldsymbol{l}}, \hat{\boldsymbol{l}}] = i\boldsymbol{l}$, то из тождества (В,3) непосредственно следует

$$\boldsymbol{\sigma l} = \boldsymbol{l}^2 - (\boldsymbol{\sigma l})(\boldsymbol{\sigma l}). \tag{В,4}$$

Далее, из (В,3) можно получить:

$$(\boldsymbol{r\sigma})(\boldsymbol{\sigma l}) = (\boldsymbol{r\sigma})(\boldsymbol{r}\nabla) - r^2(\boldsymbol{\sigma}\nabla),$$

или, вводя

$$\sigma_r = \frac{\boldsymbol{r\sigma}}{r}, \quad \sigma_r^2 = 1, \tag{В,5}$$

приходим к соотношению

$$\boldsymbol{\sigma}\nabla = \sigma_r \left\{\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\boldsymbol{\sigma l}}{r}\right\}. \tag{В,6}$$

Пользуясь (В,6) и (В,3), можно показать, что

$$\sigma_r(\boldsymbol{\sigma l})\sigma_r = \sigma_r(\boldsymbol{\sigma l})\frac{(\boldsymbol{\sigma r})}{r} = -(\boldsymbol{\sigma l} + 2). \tag{В,7}$$

Из операторного равенства (В,7) следует, что если $\Phi_{l^{1/2}jm}$ является нормированной собственной функцией оператора $\boldsymbol{\sigma l}$ с собственным значением A, то функция $\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}$ будет также нормированной собственной функцией этого оператора с собственным значением $-(A+2)$. Учитывая этот результат и уравнения (В,2), можно написать:

$$(\boldsymbol{\sigma l})(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}) = -\left(j + \frac{3}{2}\right)(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}), \text{ если } l = j - \frac{1}{2}; \tag{В,8а}$$

$$(\boldsymbol{\sigma l})(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}) = \left(j - \frac{1}{2}\right)(\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm}), \quad \text{если } l = j + \frac{1}{2}. \tag{В,8б}$$

Сравнивая (В,8) с (В,2), мы убедимся, что

$$\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm} = \Phi_{l+1,{}^{1/2}jm}, \text{ если } l = j - \frac{1}{2};$$

$$\sigma_r\Phi_{l^{1/2}jm} = \Phi_{l-1,{}^{1/2}jm}, \text{ если } l = j + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, действие оператора σ_r на волновую функцию $\Phi_{l^{1/2}jm}$ сводится к «опрокидыванию» спина нуклона при сохранении полного момента количества движения.

§ Г. Векторные сферические функции

В ряде приложений удобно использовать так называемые *векторные сферические функции*, являющиеся собственными функциями оператора $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$, где $\hat{\boldsymbol{L}} = -i[\boldsymbol{r}\nabla]$ — оператор орбитального момента количества движения, а $\hat{\boldsymbol{S}}$ — оператор момента количества движения (А,8), соответствующий спину, равному 1.