инвариантности операторов L относительно вращений и отражений системы координат они должны иметь вид

$$L_j^{\mu\mu'}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'}) = A_j^{\mu\mu'}(\cos\theta) + \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{nn'}]\, B_j^{\mu\mu'}(\cos\theta). \qquad (Ж,\ 14)$$

В частности, если $\mu = \mu' = l = j - {}^1/_2$, то

$$L_j^{\mu\mu}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'}) = \left(j + \frac{1}{2}\right) P_{j-{}^1/_2}(\cos\theta) - i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{nn'}] \sin\theta \frac{dP_{j-{}^1/_2}}{d\cos\theta}. \qquad (Ж,\ 15)$$

Если $\mu = \mu' = l = j + \frac{1}{2}$, то

$$L_j^{\mu\mu}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'}) = \left(j + \frac{1}{2}\right) P_{j+{}^1/_2}(\cos\theta) + i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{nn'}] \sin\theta \frac{dP_{j+{}^1/_2}}{d\cos\theta}. \qquad (Ж,\ 16)$$

Операторы Тамма могут быть построены и для системы, состоящей из нескольких различных или одинаковых частиц. Явный вид некоторых операторов такого типа приведен в работах [31—33].

§ 3. Производные обобщенных сферических функций по углам Эйлера и времени

Как известно, при последовательном вращении системы координат вокруг осей z, y, x соответственно на углы δ_z, δ_y, δ_x волновая функция одной частиц $\varphi(x, y, z)$ преобразуется по закону

$$\varphi(x, y, z) \to \varphi(x', y', z') = \exp\{i(\delta_x \hat{l}_x + \delta_y \hat{l}_y + \delta_z \hat{l}_z)\}\, \varphi(x, y, z), \qquad (3,\ 1)$$

где

$$\hat{l}_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{l}_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{l}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

— соответственно проекции на оси x, y, z оператора орбитального момента количества движения одной частицы.

Рассмотрим теперь волновую функцию $\psi_{JM}(\ldots x_i \ldots)$ системы частиц, находящихся в состоянии с определенными значениями J и M. При вращении системы координат на эйлеровы углы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \equiv R$ эта функция преобразуется аналогично (3, 1) по закону

$$\psi_{JM}(\{x_i\}) \to \psi_{JM}(R\{x_i\}) = \exp\{i(\theta_3\hat{J}_z + \theta_2\hat{J}_x + \theta_1\hat{J}_z)\}\, \psi_{JM}(\{x_i\}), \qquad (3,2)$$

где $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_z$ — операторы, определенные в (Д, 2). С другой стороны, согласно (Д, 12) функцию $\psi_{JM}(R\{x_i\})$ можно выразить с помощью функций Вигнера через волновые функции в первоначальной системе координат

$$\psi_{JM}(R\{x_i\}) = \sum_{K'} \overset{*}{D}{}^J_{MK'}(R)\,\psi_{JK'}(\{x_i\}). \tag{3,3}$$

Приравняем правые части выражений (3,2) и (3,3), а затем умножим полученное равенство на функцию ψ^*_{JK} и проинтегрируем по всем значениям переменных, от которых зависят эти функции; в результате найдем:

$$\overset{*}{D}{}^J_{MK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (JK|\exp\{i(\theta_3\hat{J}_z + \theta_2\hat{J}_x + \theta_1\hat{J}_z)\}|JM). \tag{3,4}$$

Аналогичным путем для функции D^J_{MK}, совершающей обратное преобразование, получим:

$$D^J_{MK}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (JM|\hat{U}|JK), \tag{3,5}$$

где

$$\hat{U} \equiv \exp\{-i(\theta_1\hat{J}_z + \theta_2\hat{J}_x + \theta_3\hat{J}_z)\}. \tag{3,6}$$

Выражение (3, 5) позволяет вычислить производные от функций D^J_{MK} по углам Эйлера θ_1, θ_2, θ_3. Так, производная по θ_3 имеет простой вид:

$$\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial \theta_3} = -i(JM|\hat{U}\hat{A}_3|JK) = -i\sum_{M'} D^J_{MM'}(JM'|\hat{A}_3|JK), \tag{3,7}$$

где

$$\hat{A}_3 = \hat{J}_z.$$

Введем оператор

$$\hat{\mathscr{L}}_3 = i\frac{\partial}{\partial \theta_3}, \tag{3,8}$$

тогда из (3, 7) следует

$$\hat{\mathscr{L}}_3 D^J_{MK} = \sum_{M'} D^J_{MM'}(JM'|\hat{J}_z|JK). \tag{3,9}$$

В представлении, в котором матричный элемент $\hat{J}_z$ диагонален:

$$(JM'|\hat{J}_z|JK) = K\delta_{M'K},$$

уравнение (3, 9) принимает совсем простой вид;

$$\hat{\mathscr{L}}_3 D^J_{MK} = KD^J_{MK}.$$

Производные по углам θ_2 и θ_1 можно также представить в виде (3,7). При $l = 1, 2$

$$\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial \theta_l} = -i(JM|\hat{U}A_l|JK), \tag{3,10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}_2 &= \exp\{i\theta_3\hat{J}_z\}\,\hat{J}_x\exp\{-i\theta_3\hat{J}_z\}, \\ \hat{A}_1 &= \exp\{i\theta_3 J_z + i\theta_2\hat{J}_x\}\,\hat{J}_z\exp\{-i\theta_2\hat{J}_x - i\theta_3\hat{J}_z\}. \end{aligned}\right\} \tag{3,11}$$

Таким образом, оператор $\hat{A}_2$ получается из оператора $\hat{J}_x$ при вращении системы координат $(\theta_3, 0,0)$, а оператор $\hat{A}_1$ получается из оператора $\hat{J}_z$ при вращении $(\theta_3, \theta_2, 0)$. Следовательно, оба эти оператора можно выразить через операторы проекций полного момента всей системы

$$\hat{A}_l = \sum_{\lambda} q_{\lambda l} \hat{J}_{\lambda}, \quad l = 1,\ 2,\ 3. \tag{3,12}$$

Это равенство справедливо и для случая $l = 3$, если положить

$$q_{\lambda 3} = \delta_{\lambda 3}.$$

С помощью (3,12) производные от функций D^J_{MK} по эйлеровым углам θ_1, θ_2, θ_3 можно представить в виде

$$\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial \theta_l} = -i \sum_{\lambda,\, M'} q_{\lambda l} D^J_{M\,M'} (JM' \,|\, \hat{J}_{\lambda} \,|\, JK). \tag{3,13}$$

Введем теперь оператор

$$\hat{\mathscr{L}}_{\mu} = i \sum_{l} q^{-1}_{\mu l} \frac{\partial}{\partial \theta_l}, \quad \mu = 1,\ 2,\ 3, \tag{3,14}$$

который является естественным обобщением оператора $\hat{\mathscr{L}}_3$ на случай двух других компонент. Тогда из (3, 13) будет следовать, что

$$\hat{\mathscr{L}}_{\mu} D^J_{MK} = \sum_{M'} D^J_{MM'} (JM' \,|\, \hat{J}_{\mu} \,|\, JK). \tag{3,15}$$

Применяя к обеим частям уравнения (3, 15) оператор $\hat{\mathscr{L}}_{\mu}$ и снова используя (3,15), получим:

$$\hat{\mathscr{L}}^2_{\mu} D^J_{MK} = \sum_{M'} D^J_{MM'} (JM' \,|\, \hat{J}^2_{\mu} \,|\, JK).$$

Просуммируем это равенство по μ и обозначим $\hat{\mathscr{L}}^2 \equiv \sum_{\mu} \hat{\mathscr{L}}^2_{\mu}$, $\hat{J}^2 \equiv \sum_{\mu} \hat{J}^2_{\mu}$; тогда, учитывая, что в состояниях с определенным значением полного момента

$$(JM' \,|\, J^2 \,|\, JK) = J\,(J+1)\, \delta_{M'K},$$

получим:

$$\hat{\mathscr{L}}^2 D^J_{MK} = J\,(J+1)\, D^J_{MK}. \tag{3,16}$$

Таким образом, оператор $\hat{\mathscr{L}}^2$ также является оператором полного момента всей системы; его проекции $\hat{\mathscr{L}}_1$, $\hat{\mathscr{L}}_2$, $\hat{\mathscr{L}}_3$ являются операторами проекций полного момента на оси координат $\xi\eta\zeta$, связанные с телом.

Используя (3, 15), перепишем уравнение (3, 13) в следующем виде:

$$i\,\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial \theta_l} = \sum_{\lambda} q_{\lambda l} \hat{\mathscr{L}}_{\lambda} D^J_{MK}. \tag{3,17}$$

Вычислим теперь производную от обобщенных сферических функций по времени. Поскольку

$$\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial t} = \sum_l \frac{\partial D^J_{MK}}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_l}{\partial t},$$

то, используя (3, 17), получим:

$$i\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial t} = \sum_\lambda \omega_\lambda \hat{L}_\lambda D^J_{MK}, \tag{3,18}$$

где

$$\omega_\lambda = \sum_l q_{\lambda l} \frac{\partial \theta_l}{\partial t} \tag{3,19}$$

— компоненты угловой скорости вдоль соответствующих осей. Наконец, учитывая (3, 15), находим:

$$i\frac{\partial D^J_{MK}}{\partial t} = \sum_{\lambda M'} \omega_\lambda D^J_{MM'} (JM' \mid \hat{J}_\lambda \mid JK). \tag{3,20}$$

В этом параграфе мы определим еще результат действия операторов проекций момента количества движения J_x, J_y, J_z, выражающихся формулами (Д, 2), на обобщенные сферические функции D^J_{MK} (α, β, γ). Для этого введем операторы:

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{2}\,\hat{J}_1 &= \hat{J}_x + i\hat{J}_y = -ie^{-i\alpha}\left[\operatorname{ctg}\beta \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} + i\frac{\partial}{\partial\beta}\right], \\ \hat{J}_0 &= \hat{J}_z = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}, \\ \sqrt{2}\,\hat{J}_{-1} &= \hat{J}_x - i\hat{J}_y = -ie^{i\alpha}\left[\operatorname{ctg}\beta \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} - i\frac{\partial}{\partial\beta}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3,21}$$

Действие операторов (3, 21) на функции D^J_{MK} определяется простыми формулами:

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_0 D^J_{MK} &= M D^J_{MK}, \\ \sqrt{2}\,\hat{J}_{-1} D^J_{MK} &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, D^J_{M-1,K}, \\ -\sqrt{2}\,\hat{J}_1 D^J_{MK} &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, D^J_{M+1,K}. \end{aligned}\right\} \tag{3,22}$$

Представляя операторы $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$ в виде линейной комбинации операторов (3,21):

$$\hat{J}_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{J}_1 - \hat{J}_{-1}),$$

$$\hat{J}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{J}_1 + \hat{J}_{-1}),$$

получим с учетом (З, 22) искомый результат:

$$\left.\begin{aligned} \hat{J}_x D^J_{MK} &= \frac{1}{2}\{\sqrt{(J+M+1)(J-M)}\, D^J_{M+1,K} + \\ &\quad + \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, D^J_{M-1,K}\}, \\ \hat{J}_y D^J_{MK} &= \frac{1}{2i}\{\sqrt{(J-M)(J+M+1)}\, D^J_{M+1,K} - \\ &\quad - \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\, D^J_{M-1,K}\}. \end{aligned}\right\} \qquad (З,23)$$

§ И. Коэффициенты Рака

Сумма по магнитным квантовым числам произведений трех и большего числа коэффициентов векторного сложения может быть вычислена методом Рака [29]. Такие суммы выражаются через коэффициенты Рака $W(abcd;\ ef)$, зависящие от шести целых или полуцелых квантовых чисел моментов количества движения.

Наиболее часто используется равенство

$$\sum_{m_2 m_3 m m'} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm)(j j_3 m m_3 \mid JM)(j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j' m')(j_1 j' m_1 m' \mid JM) = \\ = \sqrt{(2j+1)(2j'+1)}\ W(j_1 j_2 J j_3;\ jj') \qquad (И,1)$$

или эквивалентное ему равенство

$$\sum_{m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid j_3 m_3)(j_3 j_4 m_3 m_4 \mid j_5 m_5)(j_2 j_4 m_2 m_4 \mid j_6 m_6) = \\ = \sqrt{(2j_3+1)(2j_6+1)}\,(j_1 j_6 m_1 m_6 \mid j_5 m_5)\ W(j_1 j_2 j_5 j_4;\ j_3 j_6). \qquad (И,1а)$$

Если умножить правую и левую части (И, 1) на

$$(j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j' m)(j_1 j' m_1 m' \mid JM)$$

и просуммировать по j', то получим очень полезное равенство:

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid jm)(j j_3 m m_3 \mid JM) = \sum_{j'} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)}\ \times \\ \times (j_2 j_3 m_2 m_3 \mid j', m_2 + m_3)(j_1 j' m_1,\ m_2 + m_3 \mid JM)\ W(j_1 j_2 J j_3;\ jj'). \qquad (И,2)$$

Коэффициенты Рака широко используются при исследовании угловых корреляций нескольких последующих излучений в каскаде, угловых распределений рассеяния и продуктов ядерных реакций и т. д.

Коэффициенты Рака связывают две возможные схемы сложения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$:

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}$, затем $\boldsymbol{e}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}$

или

2) $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f}$, затем $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{c}$.

Основные свойства и численные значения коэффициентов Рака можно найти в обзоре Биденхарна, Блатта и Розе [34]. Ниже мы приведем некоторые из свойств этих коэффициентов, которые используются в этой книге.