сферическими функциями:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta\cdot\bar{P}_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\bar{P}_{l+1,\,m}+\\
&\quad+\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\bar{P}_{l-1,\,m},\\
\sin\theta\cdot\bar{P}_{lm} &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\bar{P}_{l+1,\,m+1}-\\
&\quad-\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\bar{P}_{l-1,\,m+1},\\
\sin\theta\cdot\bar{P}_{lm} &= -\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}\,\bar{P}_{l+1,\,m-1}+\\
&\quad+\sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}\,\bar{P}_{l-1,\,m-1}.
\end{aligned}\right\}\qquad (\text{E},10)$$

Производные функций $\bar{P}_{lm}$ по углу θ можно выразить равенством

$$\frac{d\bar{P}_{lm}}{d\theta}=\mp\sqrt{(l\pm m+1)(l\mp m)}\,\bar{P}_{l,\,m\pm1}\pm m\operatorname{ctg}\theta\bar{P}_{l,\,m},\qquad (\text{E},11)$$

из которого следуют два полезных соотношения:

$$2\frac{d\bar{P}_{lm}}{d\theta}=\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\bar{P}_{l,\,m+1}-\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\bar{P}_{l,\,m-1},$$

$$2m\operatorname{ctg}\theta\bar{P}_{lm}=\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\bar{P}_{l,\,m+1}+\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\bar{P}_{l,\,m-1}.$$

§ Ж. Матричные элементы от тензорных операторов. Инвариантные операторы Тамма

Соотношения типа (А,13) имеют место не только для сферических функций, но и для любых других функций, являющихся собственными функциями операторов полного момента количества движения любой системы частиц. Эти соотношения позволяют вычислять матричные элементы от операторов соответствующих физических величин.

Пусть операторы $F_{\lambda\mu}$ образуют совокупность $(2\lambda+1)$ величин, преобразующихся при вращении системы координат друг через друга так же, как компоненты волновой функции, соответствующей моменту λ. Другими словами, величины $F_{\lambda\mu}$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям по отношению к операторам полного момента (А,12), как и собственные функции этих операторов (когда последние рассматриваются как операторы), т. е.

$$\left.\begin{aligned}
[(\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y),\,F_{\lambda\mu}] &= \mp\sqrt{(\lambda\mp\mu)(\lambda\pm\mu+1)}\,F_{\lambda,\,\mu\pm1},\\
[\hat{J}_z,\,F_{\lambda\mu}] &= \mu F_{\lambda\mu},\\
F^{\dagger}_{\lambda\mu} &= (-1)^{\mu}F_{\lambda,\,-\mu}.
\end{aligned}\right\}\qquad (\text{Ж},1)$$

Тензорные операторы $F_{\lambda\mu}$ зависят от переменных, на которые действуют операторы $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$, и от любых других переменных. Примером тензорных операторов $F_{\lambda\mu}$ могут служить операторы, содержащие сферические функции. В общем же случае индексы $\lambda\mu$ тензорных операторов могут иметь формальный смысл, не относясь к какому-либо реальному моменту. Так, для вектора $\lambda=1$, для симметричного тензора второго ранга $\lambda=2$ и т. д.

Рассмотрим теперь матричные элементы тензорных операторов $F_{\lambda\mu}$ от волновых функций $\psi_{\alpha_1 j_1 m_1}$ и $\psi_{\alpha_2 j_2 m_2}$, зависящих от координат и спинов системы частиц

$$(\alpha_1 j_1 m_1 \mid F_{\lambda\mu} \mid \alpha_2 j_2 m_2) \equiv (\psi_{\alpha_1 j_1 m_1}, F_{\lambda\mu}\psi_{\alpha_2 j_2 m_2}). \tag{Ж,2}$$

Действие оператора $F_{\lambda\mu}$ на функцию $\psi_{\alpha j m}$ можно записать в виде

$$F_{\lambda\mu}\psi_{\alpha_2 j_2 m_2} = \sum_{j=|j_2-\lambda|}^{j_2+\lambda} (\lambda j_2 \mu m_2 \mid jm)\, W_{jm}(\alpha_2 j_2), \tag{Ж,3}$$

где W_{jm} преобразуются так же, как собственные функции операторов полного момента количества движения системы. Учитывая свойства преобразований W_{jm}, имеем:

$$(\psi_{\alpha_1 j_1 m_1}, W_{jm}(\alpha_2 j_2)) = \delta_{m_1 m}\delta_{j_1 j}(\alpha_1 j_1 \| F_\lambda \| \alpha_2 j_2), \tag{Ж,4}$$

где $(\alpha_1 j_1 \| F_\lambda \| \alpha_2 j_2)$ — матричные элементы тензорных операторов $F_{\lambda\mu}$, не зависящие от магнитных квантовых чисел.

Подставляя (Ж,3) в (Ж,2) и учитывая (Ж,4), находим:

$$(\alpha_1 j_1 m_1 \mid F_{\lambda\mu} \mid \alpha_2 j_2 m_2) = (\lambda j_2 \mu m_2 \mid j_1 m_1)(\alpha_1 j_1 \| F_\lambda \| \alpha_2 j_2). \tag{Ж,5}$$

Таким образом, равенство (Ж,5) позволяет выделить в явном виде зависимость матричных элементов (Ж,2) от магнитных квантовых чисел. Равенство (Ж,5) было доказано в общем виде Вигнером [28] методами теории групп и Рака [29] без использования теории групп.

Наряду с равенством (Ж,5) для упрощения вычислений, связанных с разложением ряда физических величин по собственным функциям полного момента количества движения, можно пользоваться инвариантными операторами L, введенными в ряде работ И. Е. Тамма и его сотрудников [30—33]. Будем в дальнейшем для краткости называть эти операторы *операторами Тамма*. Операторы Тамма являются инвариантными относительно вращений и отражений в координатном пространстве функциями углов и спиновых переменных системы частиц.

Рассмотрим операторы Тамма для случая одной частицы со спином. Если направление в пространстве характеризовать единичным вектором $\boldsymbol{n}$, а ориентацию спина вектором $\boldsymbol{\sigma}$, то состояние нуклона с моментом j и проекцией этого момента на некоторое выделенное направление (ось квантования), равной m, будет определяться спин-угловой функцией

$$\Phi_{lsjm}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{m_s} (ls, m-m_s, m_s \mid jm)\, Y_{l, m-m_s}(\boldsymbol{n})\, \chi_{sm_s}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{Ж,6}$$

Заданному значению полного момента j и спина s соответствует несколько функций типа (Ж, 6), отличающихся значениями орбитального момента l, удовлетворяющими неравенству

$$|j-s| \leqslant l \leqslant j+s.$$

Перенумеруем эти функции индексом μ и введем краткое обозначение

$$\psi^{\mu}_{jm}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma}) \equiv \sum_{m_s} (ls,\ m-m_s,\ m_s|jm)\, Y_{l,\,m-m_s}(\boldsymbol{n})\, \chi_{sm_s}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{Ж,7}$$

Функции (Ж, 7) образуют полную ортонормированную систему собственных функций операторов $\hat{j}^2$ и $\hat{j}_z$, так что

$$\sum_{\sigma} \int \psi^{\mu*}_{jm}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})\, \psi^{\mu'}_{j'm'}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})\, d\Omega = \delta_{jj'}\delta_{mm'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{Ж,8}$$

$$\sum_{j,\,m,\,\mu} \psi^{\mu*}_{jm}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})\, \psi^{\mu}_{jm}(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{\sigma}') = \delta(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}')\, \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{Ж,9}$$

С помощью функций (Ж, 7) операторы Тамма определяются равенствами

$$L^{\mu\mu'}_{j}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'}) \equiv \sum_{m=-j}^{j} \psi^{\mu*}_{jm}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\sigma})\, \psi^{\mu'}_{jm}(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{\sigma}'). \tag{Ж,10}$$

В отличие от функций (Ж,7), содержащих магнитные квантовые числа m, соответствующие проекции полного момента системы на ось квантования z, операторы Тамма не зависят от m и, следовательно, не зависят от выбора оси квантования.

Пользуясь определением (Ж, 10) и условиями ортогональности (Ж, 8), можно показать, что операторы Тамма удовлетворяют условию эрмитовости

$$\{L^{\mu\mu'}_{j}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'})\}^{\dagger} = L^{\mu'\mu}_{j}(\boldsymbol{n'\sigma'};\ \boldsymbol{n\sigma}) \tag{Ж,11}$$

и ортогональности

$$\sum_{\sigma'} \int L^{\mu\mu'}_{j}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'})\, L^{\mu''\mu_1}_{j'}(\boldsymbol{n'\sigma'};\ \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\sigma}_1)\, d\Omega' = \\ = \delta_{jj'}\delta_{\mu'\mu''} L^{\mu\mu_1}_{j}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{\sigma}_1). \tag{Ж,12}$$

Кроме того, как следует из (Ж, 9), имеет место соотношение

$$\sum_{j,\,\mu} L^{\mu\mu}_{j}(\boldsymbol{n\sigma};\ \boldsymbol{n'\sigma'}) = \delta(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}')\, \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{Ж,13}$$

Если частицы не обладают спином, то μ принимает только одно значение и функции ψ^{μ}_{jm} совпадают со сферическими функциями: $\psi^{\mu}_{jm} \to Y_{lm}(\boldsymbol{n})$. В этом случае операторы Тамма с точностью до множителя совпадают с полиномами Лежандра:

$$L_l(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') = \sum_{m} Y^{*}_{lm}(\boldsymbol{n})\, Y_{lm}(\boldsymbol{n}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}'),\quad \boldsymbol{nn}' = \cos\theta.$$

Если частицы обладают спином $^1/_2$, то μ принимают два значения, соответственно двум значениям $l = j \pm {}^1/_2$. При этом, вследствие инвариантности операторов L относительно вращений и отражений системы координат они должны иметь вид

$$L_j^{\mu\mu'}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma};\ \boldsymbol{n}'\boldsymbol{\sigma}') = A_j^{\mu\mu'}(\cos\theta) + \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']\,B_j^{\mu\mu'}(\cos\theta). \qquad (\text{Ж, } 14)$$

В частности, если $\mu = \mu' = l = j - {}^1/_2$, то

$$L_j^{\mu\mu}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma};\ \boldsymbol{n}'\boldsymbol{\sigma}') = \left(j + \frac{1}{2}\right) P_{j-{}^1/_2}(\cos\theta) - i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']\sin\theta\,\frac{dP_{j-{}^1/_2}}{d\cos\theta}. \qquad (\text{Ж, } 15)$$

Если $\mu = \mu' = l = j + \frac{1}{2}$, то

$$L_j^{\mu\mu}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma};\ \boldsymbol{n}'\boldsymbol{\sigma}') = \left(j + \frac{1}{2}\right) P_{j+{}^1/_2}(\cos\theta) + i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']\sin\theta\,\frac{dP_{j+{}^1/_2}}{d\cos\theta}. \qquad (\text{Ж, } 16)$$

Операторы Тамма могут быть построены и для системы, состоящей из нескольких различных или одинаковых частиц. Явный вид некоторых операторов такого типа приведен в работах [31—33].

§ 3. Производные обобщенных сферических функций по углам Эйлера и времени

Как известно, при последовательном вращении системы координат вокруг осей z, y, x соответственно на углы δ_z, δ_y, δ_x волновая функция одной частиц $\varphi(x, y, z)$ преобразуется по закону

$$\varphi(x, y, z) \to \varphi(x', y', z') = \exp\{i(\delta_x\hat{l}_x + \delta_y\hat{l}_y + \delta_z\hat{l}_z)\}\,\varphi(x, y, z), \qquad (3,\ 1)$$

где

$$\hat{l}_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{l}_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{l}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

— соответственно проекции на оси x, y, z оператора орбитального момента количества движения одной частицы.

Рассмотрим теперь волновую функцию $\psi_{JM}(\ldots x_i \ldots)$ системы частиц, находящихся в состоянии с определенными значениями J и M. При вращении системы координат на эйлеровы углы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \equiv R$ эта функция преобразуется аналогично (3, 1) по закону

$$\psi_{JM}(\{x_i\}) \to \psi_{JM}(R\{x_i\}) = \exp\{i(\theta_3\hat{J}_z + \theta_2\hat{J}_x + \theta_1\hat{J}_z)\}\,\psi_{JM}(\{x_i\}), \quad (3,2)$$

где $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_z$ — операторы, определенные в (Д, 2). С другой стороны, согласно (Д, 12) функцию $\psi_{JM}(R\{x_i\})$ можно выразить с помощью