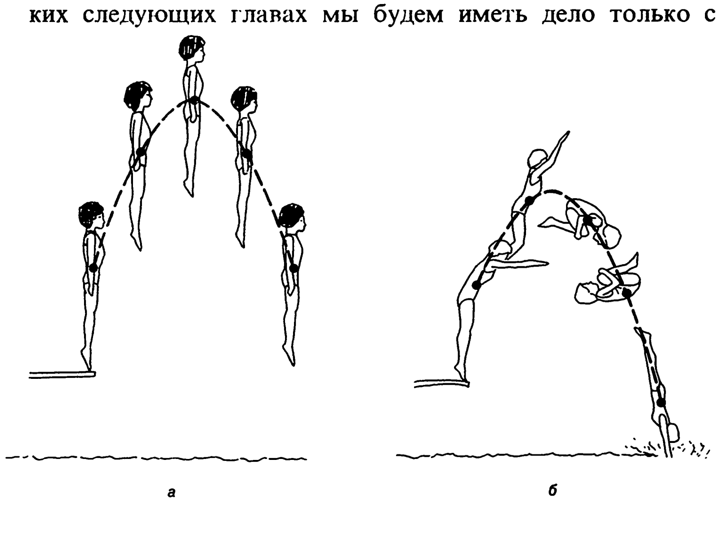
2 Движение: кинематика в одном измерении

Движение предметов – бейсбольных мячей, автомобилей, бегунов и даже Солнца и Луны – неотъемлемая часть повседневной жизни. Движение, несомненно, представляет собой важнейшее свойство физического мира и заслуживает пристального изучения, историю которого можно проследить, начиная с древних цивилизаций Малой Азии. Уже в древности было достигнуто глубокое понимание сути движения, однако лишь сравнительно недавно – в 16 и 17 вв. – установились современные представления о движении. В формирование этих представлений внесли свой вклад многие ученые, но, как мы вскоре увидим, среди них резко выделяются две личности: Галилео Галилей (1564–1642) и Исаак Ньютон (1643–1727).

Изучение движения предметов и связанных с этим представлений о силе и энергии образует область физики, называемую **механикой**. О твердых телах, перемещающихся без вращения, говорят, что они находятся в состоянии **поступательного движения**. Любая часть предмета, находящегося в состоянии только поступательного движения, проходит одну и ту же траекторию. Примером этого является движение прыгуна в воду, показанное на рис. 2.1, *а*; на рис. 2.1, *б* прыгун в воду совершает как поступательное, так и вращательное движение. В нескольких следующих главах мы будем иметь дело только с



а *б*

Рис. 2.1. Движение прыгуна в воду представляет собой чисто поступательное перемещение (*а*) или поступательное перемещение с вращением (*б*).

поступательным движением; вращательное движение будет рассмотрено в гл. 9 и 10.

При изучении движения мы будем пользоваться понятием идеализированной **частицы**. Такая частица рассматривается как математическая точка, т.е. у нее нет пространственной протяженности (размеров), и она может совершать только поступательное движение. Окружающие нас предметы, разумеется, не являются частицами: все они имеют протяженность в пространстве. Тем не менее понятие частицы полезно во многих реальных ситуациях, когда нас интересует лишь поступательное движение, а размеры тел не играют существенной роли. Например, бильярдный шар и даже космический корабль, летящий к Луне, при решении многих задач можно рассматривать как частицу. В следующих главах при обсуждении более сложных видов движения мы увидим, что понятие частицы очень полезно, поскольку любое протяженное тело можно считать составленным из множества мельчайших частиц.

Механику обычно делят на две части: **кинематику**, которая описывает то, как движутся предметы, и **динамику**, которая отвечает на вопрос о том, почему предметы движутся именно таким образом. Эта и следующая главы посвящены кинематике поступательного движения; в гл. 4 мы начнем рассматривать динамику поступательного движения. Настоящую же главу посвятим главным образом описанию движения тела по прямой линии (одномерное движение); в гл. 3 рассмотрим кинематику движения в двух и трех измерениях.

2.1. Средняя путевая скорость

Средняя скорость в физике определяется двояким образом[1]. Ниже (в разд. 2.4) мы покажем, в чем состоит различие между этими двумя определениями. Рассмотрим здесь пока лишь скорость, которая определяется как путь, проходимый телом в единицу времени, т.е. общее расстояние вдоль траектории, деленное на время, за которое тело его проходит. Если автомобиль проехал 400 км за 5 ч, то мы утверждаем, что его средняя скорость была 80 км/ч. Вообще говоря, *средняя скорость* движения тела определяется как *пройденное им расстояние, деленное на время, затраченное на прохождение этого расстояния.* Если D – пройденный путь, t – затраченное время, а v_s – скорость движения на этом пути, то средняя путевая

[1] В английском языке существует даже два различных слова для скорости speed и velocity. В этом разделе рассматривается скорость в ее первом значении. Такая скорость всегда положительна и не имеет направления в пространстве (т.е. является скаляром).– *Прим. ред.*

скорость определяется следующим образом:

$$\bar{v}_s = D/t.$$

Черта над v_s является общепринятым символом для обозначения «среднего».

Пример 2.1. Какое расстояние проедет велосипедист за 4,0 ч, если его средняя путевая скорость равна 11,5 км/ч?

Решение. Для того чтобы найти пройденный путь, перепишем представленное выше выражение для скорости как $D = \bar{v}_s t$. Используя то, что $\bar{v}_s = 11{,}5$ км/ч, а $t = 4{,}0$ ч, находим $D = (11{,}5$ км/ч$)(4{,}0$ ч$) = 46$ км.

2.2. Системы отсчета

Допустим, что во время путешествия на поезде вы наблюдаете за птицей, летящей у вас над головой, и замечаете, что полет птицы происходит со скоростью 30 км/ч. Но как, по-вашему, она движется со скоростью 30 км/ч: относительно поезда или относительно земли?

Всякое измерение должно быть сделано относительно какой-то **системы отсчета**. Вот наглядный пример. Допустим, вы находитесь в поезде, движущемся со скоростью 80 км/ч, и пусть к началу поезда мимо вас перемещается человек со скоростью 5 км/ч. Разумеется, это будет скорость человека относительно поезда. Относительно земли этот человек будет двигаться со скоростью 85 км/ч. В любом случае при определении скорости необходимо выделить систему отсчета. Почти всегда, даже не задумываясь об этом, мы имеем в виду скорость «относительно земли». Тем не менее всякий раз, когда может возникнуть затруднение, нужно точно указать систему отсчета.

Значения других физических величин тоже зависят от системы отсчета. Например, не имеет смысла говорить, что Иосемитский национальный парк находится в трехстах километрах, не указывая, откуда отсчитывается это расстояние. Расстояния всегда измеряются в некоторой системе отсчета. Кроме того, задавая движение предмета, важно указать не только скорость, но и направление движения. Например, пусть некто вылетел из Нью-Йорка на реактивном самолете, который движется со скоростью 1000 км/ч, а вы хотели бы узнать, в каком направлении летит этот самолет. Это может быть Вашингтон, Париж, Сан-Франциско или какое-либо другое место. Во многих случаях направление можно указать, пользуясь сторонами света: «север», «юг», «запад» и «восток»; применяются также направления «вверх» и «вниз». Однако это не всегда удобно. В физике, чтобы задать систему отсчета, часто изображают систему координатных осей, показанную на рис. 2.2. Указанные на рисунке обозначения положительного и отрицательного направлений являются общепринятыми, хотя в некоторых случаях возникает необ-

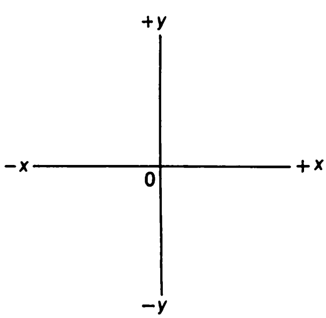


Рис. 2.2. Обычная декартова система координат на плоскости.

ходимость в их изменении. Можно, например, выбрать в качестве положительной оси y направление вниз вместо направления вверх. Любую точку плоскости можно задать ее координатами по осям x и y. При наличии трех измерений появляется третья ось, а именно ось z, перпендикулярная осям x и y.

Хотя большинство измерений выполняется в системах отсчета, закрепленных на земле, полное право на существование имеют и другие системы отсчета. Например, научные измерения часто выполняются в движущемся космическом корабле и могут производиться даже на Луне.

2.3. Замена единиц измерения

Во многих случаях из-за необходимости или в целях удобства одну систему единиц измерения желательно заменить на другую. Например, скорость автомобиля нередко лучше указывать в единицах м/с, а не в км/ч. Это удобно при измерении тормозного пути, когда время измеряют в секундах, а расстояние – в метрах, а не в часах и километрах. Кроме того, иногда может потребоваться перевести величины из метрической системы единиц в британскую и наоборот.

Чтобы определить, чему будет равна скорость 80 км/ч в метрах в секунду, проделаем следующий расчет. В 1 км содержится 1000 м, а в 1 ч мы имеем 3600 с. Таким образом,

$$80\ \text{км/ч} = \left(\frac{80\ \text{км}}{1\ \text{ч}}\right)\left(\frac{1000\ \text{м}}{1\ \text{км}}\right)\left(\frac{1\ \text{ч}}{3600\ \text{с}}\right) = (80)\left(\frac{1000}{3600}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}} =$$
$$= (80)\,(0{,}278)\ \text{м/с} = 22\ \text{м/с}.$$

Заметим, что в первой строке исходная величина (80 км/ч) умножается на два переводных множителя (1000 м)/(1 км) и (1 ч)/(3600 с), каждый из которых равен единице, и, следовательно, они не меняют выражения. Единицы часов и километров сокращаются, так что мы получаем м/с. (Заметим также, что в окончательном ответе остались только две значащие цифры, а именно 22 м/с, поскольку в произведении наименьшее количество значащих цифр имеет множитель с двумя значащими цифрами.)

При замене единиц измерения часто бывает трудно определить, где должен находиться переводной коэффициент,– в числителе или в знаменателе. Простейший путь – это проверить, сокращаются ли единицы так, как в приведенном выше примере. Если бы мы написали (80 км/ч) (1000 м/1 км) (3600 с/1 ч), то получили бы неверный результат, поскольку единицы «часы» не сокращаются.

В последней строке в приведенном выше расчете мы имеем множитель 0,278; это и есть переводной множитель между единицами км/ч и м/с. Этот множитель можно получать еще проще, если заметить, что 1 км/ч это то же самое, что 1 000 м за 3 600 с. Таким образом, 1 км/ч = = (1000 м)/(3600 с) = 0,278 м/с. Следовательно, умножая любую скорость в единицах км/ч на 0,278, ее можно перевести в единицы м/с.

2.4. Средняя скорость по перемещению

Как уже отмечалось выше, в физике существует два способа определения скорости. В первом случае скорость определяется по полному пройденному пути и характеризуется только своей величиной, в то время как во втором случае скорость определяется по перемещению и характеризуется как *величиной* (числовым значением), так и *направлением* (в гл. 3 мы покажем, что такие величины называются векторными). **Перемещение** определяется как величина, характеризующая *изменение положения тела.* Чтобы понять различие между полным пройденным путем и перемещением, представим себе человека, который прошел 50 м на восток, затем развернулся и прошел назад (на запад) расстояние 10 м. Полный пройденный путь равен 60 м, в то время как *перемещение* равно лишь 40 м, поскольку человек находится теперь всего лишь в сорока метрах от точки старта. Пусть в некоторый начальный момент времени t_1 тело находится в точке x_1 на оси x системы координат, изображенной на рис. 2.3. Допустим, что в некоторый последующий момент времени t_2 оно оказалось в точке x_2; тогда его перемещение будет равно $x_2 - x_1$. *Величина* его **средней скорости** ($\bar{v}$) определяется как *перемещение, деленное на затраченное время* (которое равно $t_2 - t_1$). Таким образом, мы имеем

$$\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1).$$

В приведенном выше примере предположим теперь, что человек, прошедший 50 м на восток, а затем 10 м на запад, затратил на это 40 с времени. При этом средняя скорость по перемещению оказывается равной всего лишь (40 м)/(40 с) = 1,0 м/с, тогда как вычисленная по полному пройденному пути она равна (60 м)/(40 с) = 1,5 м/с. Такое несоответствие между по-разному определяемыми величинами скорости имеет место в некоторых случаях и только лишь для *средних* значений, поэтому мы будем редко касаться этого вопроса. В следующем разделе мы покажем, что мгновенные значения этих скоростей всегда совпадают.

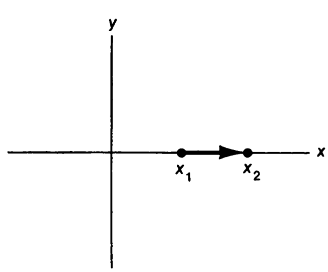


Рис. 2.3. Стрелка показывает направление перемещения, равного $x_2 - x_1$.

На рис. 2.3 перемещение рассматриваемого нами предмета за интервал времени $t_2 - t_1$ равно $x_2 - x_1$.

Величину $x_2 - x_1$ удобно записать в виде

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

где символ Δ (греческая буква «дельта») означает «изменение чего-то». Таким образом, Δx – это перемещение, или «изменение координаты x». Аналогично можно записать затраченное время (изменение времени) как $\Delta t = t_2 - t_1$. Следовательно, среднюю скорость можно определить как

$$\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t. \tag{2.1}$$

Заметим, что если x_2 меньше x_1, то тело движется влево и величина $\Delta x = x_2 - x_1$ оказывается меньше нуля. Знак перемещения, как и знак скорости, указывает направление; средняя скорость тела, движущегося вправо по оси x, положительна, в то время как при движении тела влево она отрицательна.

Пример 2.2. На графике построена зависимость положения кегельного шара от времени при его движении вдоль оси x. В момент времени $t_1 = 3{,}00$ с он находится в точке $x_1 = 40{,}5$ м, а в момент времени $t_2 = 5{,}50$ с – в точке $x_2 = 18{,}8$ м. Какова средняя скорость шара?

Решение. $\Delta x = x_2 - x_1 = 18{,}8$ м $-$ $- 40{,}5$ м $= - 21{,}7$ м, а $\Delta t = t_2 - t_1 =$ $= 5{,}50$ с $- 3{,}00$ с $= 2{,}50$ с. Следовательно, $\bar{v} = \Delta x/\Delta t = (-21{,}7$ м$)/(2{,}50$ с$) =$ $= -8{,}68$ м/с.

Перемещение и средняя скорость по перемещению отрицательны; значит, шар движется вдоль оси x влево.

2.5. Мгновенная скорость

Если на автомобиле вы проезжаете по прямой дороге 150 км за 2,0 ч, то ваша средняя скорость равна 75 км/ч. Однако маловероятно, чтобы в каждый момент времени вы двигались со скоростью именно 75 км/ч. Для описания такого движения необходимо ввести понятие *мгновенной скорости*, которая представляет собой скорость в данный момент времени (ее и должен показывать спидометр автомобиля). Это не очень строгое определение мгновенной скорости, поскольку пока мы еще не условились, что подразумевается под «мгновением».

Точнее говоря, **мгновенная скорость** в любой момент времени равна *средней скорости за бесконечно малый интервал времени*. Чтобы пояснить это, полезно построить график зависимости положения частицы от времени (пример такого графика приведен на рис. 2.4). В момент времени t_1 частица находится в положении x_1, а в момент t_2 она имеет координату x_2; на графике этим двум положениям соответствуют точки P_1 и P_2. Прямая линия, проведенная из точки $P_1(x_1, t_1)$ в точку $P_2(x_2, t_2)$, образует гипотенузу прямоугольного треугольника со сто-

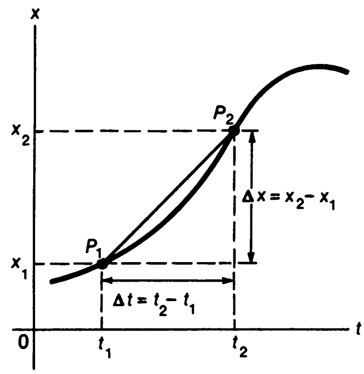


Рис. 2.4. График зависимости координаты частицы x от времени t. Тангенс угла наклона прямой P_1P_2 равен средней путевой скорости частицы в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

ронами Δx и Δt. Отношение $\Delta x/\Delta t$ («подъем» прямой за время «пробега») определяет *наклон* прямой P_1P_2. Но отношение $\Delta x/\Delta t$ является также средней скоростью частицы за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Следовательно, можно сделать вывод, что средняя скорость тела за любой интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равна наклону прямой (или *хорды*), соединяющей точки (x_1, t_1) и (x_2, t_2) на графике зависимости x от t.

Рассмотрим теперь момент времени t_i (промежуточный между t_1 и t_2), в который частица имеет координату x_i (рис. 2.5). Тогда наклон прямой P_1P_i меньше чем прямой P_1P_2. Значит, и средняя скорость в интервале времени $t_i - t_1$ меньше, чем в интервале $t_2 - t_1$.

Представим себе теперь, что на рис. 2.5 мы все более приближаем точку P_i к точке P_1; иными словами, интервал $t_i - t_1$ (который будем теперь называть Δt) становится все меньше и меньше. При этом наклон прямой, соединяющей обе точки, оказывается наклоном касательной к этой кривой в точке P_1. По мере того как мы выбираем Δt все меньше и меньше, средняя скорость (равная наклону хорды) стремится к величине наклона касательной в этой точке. По определению мгновенная скорость в данный момент времени (например, t_1) равна предельному значению средней скорости, когда $\Delta t \to 0$; мы видим, что она равна наклону касательной к кривой в данной точке

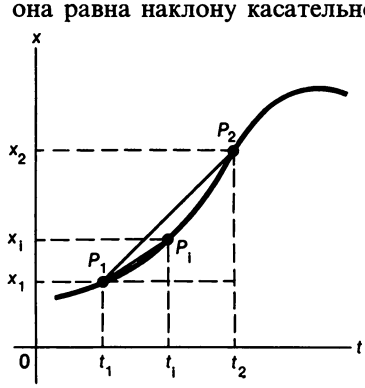


Рис. 2.5. Та же зависимость координаты от времени, что и на рис. 2.4, но заметьте, что средняя скорость по перемещению в промежутке времени $t_i - t_1$ (которая равна тангенсу угла наклона прямой P_1P_i) меньше, чем средняя скорость в промежутке времени $t_2 - t_1$.

(который можно просто называть наклоном кривой в этой точке):

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Этот предел при $\Delta t \to 0$ в математическом анализе записывается как dx/dt и называется производной величины x по t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad (2.2)$$

Это выражение и есть определение мгновенной скорости в случае одномерного движения.

Следует заметить, что мы не положили просто $\Delta t = 0$, поскольку величина Δx при этом также была бы равна нулю и мы имели бы неопределенное число. Таким образом, отношение $\Delta x/\Delta t$ необходимо рассматривать как единое целое; поскольку мы полагаем $\Delta t \to 0$, Δx также стремится к нулю, однако отношение $\Delta x/\Delta t$ приближается к некоторому определенному значению, которое и называется мгновенной скоростью. Заметим также, что мгновенная скорость обозначается символом v, тогда как средняя скорость через $\bar{v}$ (с чертой над буквой). В остальной части книги слово «скорость» будет всегда означать мгновенную скорость; в любом случае, когда мы будем иметь в виду среднюю скорость, для ясности будем всегда добавлять слово «средняя».

Поскольку в любой момент времени скорость численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой зависимости x от t, из этой зависимости можно найти скорость в произвольный момент времени. Например, на рис. 2.4 по мере движения объекта от x_1 к x_2 тангенс угла наклона кривой непрерывно увеличивается, так что возрастает скорость. Однако для времен, бóльших t_2, наклон начинает уменьшаться и при максимальном значении x (высшая точка кривой) становится нулевым (при этом $v = 0$). За этой точкой наклон отрицателен, поэтому и скорость отрицательна. Это означает, что величина x теперь уменьшается, т. е. частица движется к меньшим значениям x (влево на графике с осями x и y; рис. 2.3).

Если в течение определенного промежутка времени тело движется с постоянной скоростью, его мгновенная скорость будет равна его средней скорости. Можно ли заранее догадаться, как будет выглядеть зависимость x от t в этом случае, т. е. при постоянной скорости? Конечно, это будет прямая, тангенс угла наклона которой равен скорости. На рис. 2.4 кривая не имеет прямолинейных участков, и, следовательно, не существует промежутков времени, на которых скорость постоянна. В заключение заметим, что значение мгновенной скорости не зависит от того, определяем ли мы ее по полному пройденному пути или по перемещению, поскольку при $\Delta t \to 0$ перемещение тела стремится также к нулю и его величину невозможно отличить от бесконечно малого расстояния, пройденного телом.

Пример 2.3. Частица движется вдоль оси x, как показано на рис. 2.3. Ее положение x на этой оси как функция времени дается выражением $x = At^2 + B$, где $A = 2{,}10$ м/с^2, а $B = 2{,}80$ м. а) Определите перемещение частицы за время от $t_1 = 3{,}00$ с до $t_2 = 5{,}00$ с; б) найдите среднюю скорость на этом промежутке времени; в) определите величину мгновенной скорости при $t = 5{,}00$ с.

Решение. а) При $t_1 = 3{,}00$ с координата частицы равна

$$x_1 = At_1^2 + B = (2{,}10\ \text{м/с}^2)(3{,}00\ \text{с})^2 + 2{,}80\ \text{м} = 21{,}7\ \text{м}.$$

При $t_2 = 5{,}00$ с мы имеем

$$x_2 = (2{,}10\ \text{м/с}^2)(5{,}00\ \text{с})^2 + 2{,}80\ \text{м} = 55{,}3\ \text{м}.$$

Таким образом, перемещение равно

$$x_2 - x_1 = 55{,}3\ \text{м} - 21{,}7\ \text{м} = 33{,}6\ \text{м}.$$

б) Величина средней скорости равна

$$\bar{v} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = (33{,}6\ \text{м})/(2{,}00\ \text{с}) = 16{,}8\ \text{м/с}.$$

в) Определим мгновенную скорость в произвольный момент времени (т. е. определим v как функцию t), а затем положим $t = 5{,}00$ с. В произвольный момент времени t координата x дается выражением

$$x = At^2 + B.$$

В более поздний момент времени $t + \Delta t$ координата частицы изменится на величину Δx и станет равна $x + \Delta x$, причем

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B = At^2 + 2At(\Delta t) + A(\Delta t)^2 + B.$$

Чтобы найти Δx, вычтем из обеих частей последнего уравнения величину $x = At^2 + B$ и найдем

$$\Delta x = 2At(\Delta t) + A(\Delta t)^2.$$

Средняя скорость за время Δt равна

$$\bar{v} = \Delta x/\Delta t = 2At + A(\Delta t).$$

Чтобы найти мгновенную скорость v, следует положить $\Delta t = 0$ [см. выражение (2.2)]; тогда последний член в правой части становится равным нулю, и мы имеем

$$v = 2At = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t);$$

здесь мы подставили $A = 2{,}10$ м/с^2. Таким образом, при $t = 5{,}00$ с получим

$$v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(5{,}00\ \text{с}) = 21{,}0\ \text{м/с}.$$

Если вам уже известны формулы математического анализа

$$\frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1} \quad \text{и} \quad \frac{dC}{dt} = 0,$$

где C – любая константа, то нетрудно получить окончательный результат:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^2 + B) = 2At = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t),$$

откуда для $t = 5{,}00$ с находим $v = 21{,}0$ м/с.

2.6. Ускорение

Если скорость тела изменяется со временем, то говорят, что оно ускоряется. Автомобиль, скорость которого увеличивается от нуля до 80 км/ч, ускоряется. Если другой автомобиль может совершить такой разгон за меньшее время, чем первый, то говорят, что он испытывает большее ускорение. Вообще говоря, **среднее ускорение** $\bar{a}$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$, в течение которого скорость изменяется на $\Delta v = v_2 - v_1$, определяется как

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Мгновенное ускорение a по определению равно *предельному значению среднего ускорения при* $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \tag{2.4}$$

Этот предел dv/dt называется производной величины v по t. Ускорением мы будем называть мгновенное значение этой величины. В случае когда речь будет идти о среднем ускорении, мы всегда будем использовать слово «среднее».

Пример 2.4. На прямой дороге автомобиль ускоряется из состояния покоя до скорости 60 км/ч за 5,0 с. Какова величина его среднего ускорения?

Решение. Из выражения (2.3) имеем

$$\bar{a} = \frac{(60\ \text{км/ч}) - (0\ \text{км/ч})}{5{,}0\ \text{с}} = (12\ \text{км/ч})/\text{с}.$$

Это читается как «двенадцать километров в час за секунду» и означает, что скорость каждую секунду изменяется в среднем на 12 км/ч. Иными словами, предполагая, что ускорение постоянно, мы имеем за первую секунду увеличение скорости автомобиля от нуля до 12 км/ч, за следующую секунду еще на 12 км/ч, т. е. скорость возросла до 24 км/ч, и т. д. (Разумеется, если мгновенное ускорение непостоянно, эти числа будут различны.)

В приведенном выше примере вычисленное ускорение содержало две различные единицы времени – часы и секунды. Во многих случаях предпочитают пользоваться только секундами; для этого преобразуем (см. разд. 2.3) 60 км/ч следующим образом: (60 км/ч)[0,278 (м/с)/ /(км/ч)] = 17 м/с, и мы получаем

$$\bar{a} = \frac{(17\ \text{м/с}) - (0\ \text{м/с})}{5{,}0\ \text{с}} = 3{,}4\ \text{м/с}^2.$$

Единицу ускорения почти всегда пишут как м/с^2 (метры в секунду в квадрате), а не (м/с)/с, поскольку

$$\frac{\text{м/с}}{\text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{с}} = \text{м/с}^2.$$

Размерность ускорения – это длина, деленная на время в квадрате, что видно из определения и иллюстрируется следующим примером.

Пример 2.5. Предположим, что частица движется по прямой линии таким образом, что ее координата, как и в примере 2.3, дается выражением $x = (2{,}10\ \text{м/с}^2)\,t^2 + (2{,}80\ \text{м})$. Вычислите: а) среднее ускорение частицы за время от $t_1 = 3{,}00$ с до $t_2 = 5{,}00$ с; б) ее мгновенное ускорение как функцию времени.

Решение. а) В п. «в» примера 2.3 мы показали, что скорость в произвольный момент времени t равна $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)\,t$. Следовательно, в момент времени

$t_1 = 3{,}00$ с мы имеем $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2) \times (3{,}00\ \text{с}) = 12{,}6$ м/с, а при $t_2 = 5{,}00$ с $v_2 = 21{,}0$ м/с. Следовательно,

$$\bar{a} = \frac{21{,}0\ \text{м/с} - 12{,}6\ \text{м/с}}{5{,}00\ \text{с} - 3{,}00\ \text{с}} = 4{,}20\ \text{м/с}^2.$$

б) Используем определение

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

В произвольный момент времени t мы имеем $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t)$; в более поздний момент времени $t + \Delta t$ скорость изменится на величину Δv, так что мы получим

$$v + \Delta v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t + \Delta t).$$

Вычитая из обеих частей уравнения $v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(t)$, находим

$$\Delta v = (4{,}20\ \text{м/с}^2)(\Delta t).$$

Следовательно,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (4{,}20\ \text{м/с}^2) = 4{,}20\ \text{м/с}^2.$$

В этом случае ускорение постоянно; оно не зависит от времени.

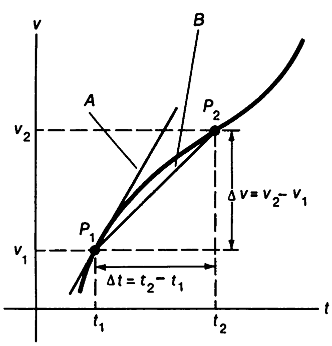


Рис. 2.6. Зависимость скорости v от времени t. Среднее ускорение в промежутке времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно тангенсу угла наклона прямой P_1P_2: $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$. Мгновенное ускорение в момент времени t_1 равно тангенсу угла наклона касательной к графику зависимости v от t в этот момент. A – тангенс угла наклона равен мгновенному ускорению в момент t_1; B – тангенс угла наклона равен среднему ускорению в промежутке $\Delta t = t_2 - t_1$.

На графике зависимости величины скорости v от времени t (рис. 2.6) величина среднего ускорения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ дается наклоном прямой, соединяющей точки[1] P_1 и P_2. Мгновенное ускорение в произвольный момент времени (скажем, в момент времени t_1) есть тангенс угла наклона касательной к кривой зависимости v от t в этот момент времени; этот наклон также показан на рис. 2.6. Используем этот факт в ситуации, представленной на рис. 2.6; при переходе от t_1 к t_2 скорость непрерывно увеличивается, однако ускорение (быстрота изменения скорости) уменьшается, поскольку уменьшается наклон кривой.

Если скорость тела постоянна, то его ускорение равно нулю, так как $\Delta v = 0$. При этом зависимость x от t является прямой линией, тангенс угла наклона которой численно равен скорости тела. График зависимости v от t в этом случае представляет собой также прямую, но с нулевым наклоном, т.е. прямая параллельна оси t (рис. 2.7).

В некоторых случаях ускорение движущейся в одном измерении частицы, вычисленное по формуле (2.3) или (2.4), имеет отрицательный знак. Это может произойти по двум причинам. Во-первых, частица может двигаться вправо по оси x (x увеличивается) с уменьшающейся скоростью (тормозиться). Например, в некоторый момент времени частица имела скорость 10 м/с, а через 2 с ее скорость стала равна 4,0 м/с; следовательно, ее среднее ускорение было (4 м/с − 10 м/с)/(2 с) = − 3 м/с^2. Во-вторых, частица будет иметь отрицательное ускорение, если она движется вдоль оси x влево (x уменьшается) с возрастающей скоростью. В этом случае перемещение Δx (или бесконечно малое dx) будет отрицательным, так как x уменьшается ($x_2 < x_1$) и $\Delta x = x_2 - x_1 < 0$. Таким образом, скорость [выражение (2.1) или (2.2)] должна быть

[1] Сравните это с графиком зависимости координаты от времени на рис. 2.4, на котором наклон дает величину средней скорости.

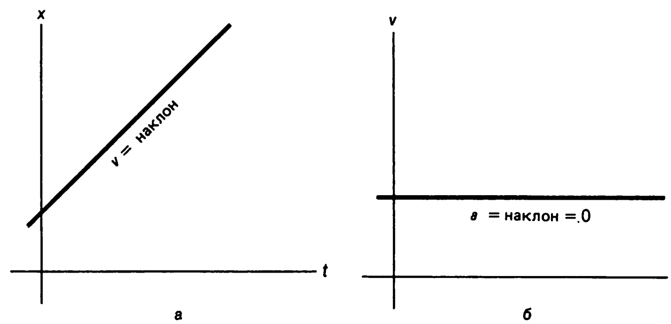


Рис. 2.7. Постоянная скорость. *а* – зависимость x от t; *б* – зависимость v от t.

отрицательной. Например, если в данный момент времени частица имеет скорость $v_1 = -6$ м/с, а через 2 с мы имеем $v_2 = -14$ м/с (движется быстрее), то $\bar{a} = (-14$ м/с $+ 6$ м/с$)/(2$ с$) = -4$ м/с^2.

Заметим, что, хотя скорость, определяемая по перемещению, может быть как положительной, так и отрицательной, скорость, определяемая по расстоянию или пути, никогда не бывает отрицательной.

Подобно скорости, ускорение также является мерой быстроты изменения. Скорость тела – это быстрота изменения его перемещения во времени; ускорение же представляет собой быстроту изменения скорости тела во времени. В известном смысле ускорение – это «скорость изменения скорости». Поскольку $a = dv/dt$ и $v = dx/dt$, ускорение можно записать следующим образом:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Здесь величину d^2x/dt^2 называют *второй производной* координаты по времени; сначала берется первая производная от x по времени (dx/dt), а затем, чтобы получить ускорение, она берется еще раз: $(d/dt)(dx/dt)$.

2.7. Равноускоренное движение

Во многих практически важных случаях ускорение постоянно. Существует также большое число случаев, когда изменение ускорения достаточно мало, и ускорение можно фактически считать постоянным. Рассмотрим теперь такой случай **равноускоренного движения**, когда величина ускорения постоянна, а движение происходит по прямой линии. При этом мгновенное и среднее ускорения равны между собой.

Чтобы упростить запись, будем всегда считать начальный момент времени равным нулю: $t_1 = 0$. Тогда время, прошедшее с момента начала движения, равно $t_2 = t$. Обозначим начальную координату x_1 и начальную скорость v_1 тела через x_0 и v_0 соответственно, а координату и скорость в момент времени t через x и v (вместо x_2 и v_2). Средняя скорость за время t дается выражением [см. (2.1)]

$$\bar{v} = (x - x_0)/t,$$

а ускорение (которое предполагается неизменным во времени), согласно (2.3), запишется в виде

$$a = (v - v_0)/t.$$

Обычно задача состоит в том, чтобы при данном ускорении найти скорость движения тела по прошествии некоторого времени. Такие задачи можно решать, используя последнее выражение для нахождения v:

$$v = v_0 + at \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.5}$$

Например, может быть известно, что ускорение какого-то мотоцикла равно 4,0 м/с^2, и нужно узнать, с какой скоростью он будет двигаться, например, через 6,0 с. Предположим, что движение мотоцикла начинается из состояния покоя ($v_0 = 0$); через 6,0 с его скорость будет равна $v = at = (4{,}0\ \text{м/с}^2)(6{,}0\ \text{с}) = 24$ м/с.

Вычислим теперь координату тела по прошествии времени t, если оно движется с постоянным ускорением. Из определения средней скорости [выражение (2.1)] $\bar{v} = (x - x_0)/t$ имеем

$$x = x_0 + \bar{v}t.$$

Поскольку скорость увеличивается равномерно, средняя скорость $\bar{v}$ будет расположена посередине между начальным и конечным значениями скорости:

$$\bar{v} = (v + v_0)/2 \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.6}$$

Заметим, что при непостоянном ускорении такое соотношение выполняется не всегда. Объединяя последние три выражения, находим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v}t = \\ &= x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t = \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + at + v_0}{2}\right)t, \end{aligned}$$

или

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2 \quad \text{[постоянное ускорение]}. \tag{2.7}$$

Выражения (2.5)–(2.7) представляют собой три уравнения из четырех наиболее часто используемых уравнений равноускоренного движения. Выведем теперь четвертое уравнение, которое полезно в случаях, когда известны, например, ускорение, координата и начальная скорость, а требуется найти конечную скорость, причем время t неизвестно. Чтобы выразить скорость v в момент времени t

через v_0, a, x и x_0, запишем, как и выше, уравнение

$$x = x_0 + \bar{v}t = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t,$$

где мы использовали выражение (2.6). Затем, выражая время t из (2.5), находим $t = (v - v_0)/a$. Подставляя время t в предыдущее уравнение, имеем

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Решим это уравнение относительно v^2 и получим искомое выражение:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad \text{[постоянное ускорение]}. \qquad (2.8)$$

Теперь у нас есть четыре уравнения, связывающие различные величины, существенные для рассмотрения равноускоренного движения (т. е. при постоянном a). С целью дальнейшего использования запишем их вместе:

$$v = v_0 + at \qquad (a = \text{const}), \qquad (2.9а)$$

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2 \qquad (a = \text{const}), \qquad (2.9б)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (a = \text{const}), \qquad (2.9в)$$

$$\bar{v} = (v + v_0)/2 \qquad (a = \text{const}). \qquad (2.9г)$$

Эти уравнения неприменимы в случае, когда ускорение непостоянно. Во многих случаях с целью упрощения выражений можно положить $x_0 = 0$. В следующих ниже примерах мы предполагаем, что $x_0 = 0$, если не утверждается обратное.

Пример 2.6. Пусть проектируется аэропорт для небольших самолетов. Один тип самолета, которому предстоит пользоваться взлетной полосой аэропорта, перед отрывом от земли должен достичь скорости 200 км/ч (55,6 м/с), причем с ускорением 12,0 м/с^2. Если длина взлетной полосы 100 м, то сможет ли такой самолет достичь скорости, необходимой для взлета?

Решение. Подставим в уравнение (2.9в) значения $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $x = 100$ м и $a = 12{,}0$ м/с^2. Таким образом,

$$v^2 = 0 + 2(12{,}0 \text{ м/с}^2)(100 \text{ м}) = 2400 \text{ м}^2/\text{с}^2;$$

$$v = \sqrt{2400 \text{ м}^2/\text{с}^2} = 49{,}0 \text{ м/с}.$$

Очевидно, взлетная полоса такой длины *недостаточна*. Решая (2.9в) относительно $x - x_0$, можно определить, какой длины взлетная полоса необходима этому самолету.

Одна из трудностей задач кинематики (равно как и других задач) состоит в выборе соответствующего уравнения для решения. Для уверенности, возможно, лучше всего провести следующую процедуру: 1) записать то, что *уже «известно»* (или «дано»), а затем то, что *необходимо* узнать; 2) найти подходящее[1)] уравнение, которое вклю-

[1)] Например, если ускорение переменное, вы не сможете воспользоваться уравнениями (2.9).– *Прим. ред.*

чает в себя только известные величины и одну искомую неизвестную, но не содержит других неизвестных; 3) если в какое-то уравнение входит искомое неизвестное [например, нужно найти a из уравнения (2.9в)], то необходимо решить это уравнение относительно искомого неизвестного. В некоторых случаях может потребоваться несколько уравнений. При решении задач важно следить за единицами измерения. Заметьте, что знак равенства предполагает совпадение единиц по обе стороны от него (точно так же, как и числовых значений). Тщательно следя за единицами и размерностями, вы избежите многих ошибок в расчетах.

Пример 2.7. Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы проехать 30 м, если он начинает движение из состояния покоя и движется с ускорением 2,0 м/с^2?

Решение. Сначала составим таблицу:

Дано	Найти
$x_0 = 0$	t
$x = 30$ м	
$a = 2{,}0$ м/с^2	
$v_0 = 0$	

Поскольку ускорение a постоянно, можно использовать уравнения (2.9а)–(2.9в). Уравнение (2.9а) в данном случае бесполезно, так как кроме искомой неизвестной величины t оно содержит неизвестную скорость v. Уравнение (2.9в) еще хуже: в него входит v, но не входит t. Уравнение (2.9б) подходит, поскольку единственная неизвестная величина в нем это t. Прежде чем решить это уравнение относительно t, упростим его, положив $v_0 = 0$. Таким образом,

$$x = (1/2)\,at^2,$$

$$t^2 = \frac{2x}{a} = \frac{2(30\text{ м})}{2{,}0\text{ м/с}^2} = 30\text{ с}^2,$$

$$t = \sqrt{30\text{ с}^2} = 5{,}5\text{ с}.$$

Пример 2.8. Рассмотрим тормозной путь автомобиля, знать который важно не только для безопасности движения, но и в целях рациональной организации движения. Эту задачу проще всего решать в два этапа: 1) сначала нужно найти время между принятием решения «включить тормоза» и их действительным включением («время реакции»); считается, что в течение этого времени $a = 0$; 2) затем необходимо определить действительное время торможения, когда автомобиль замедляется ($a \neq 0$). Тормозной путь зависит от времени реакции водителя, начальной скорости автомобиля (конечная скорость равна нулю) и от степени замедления автомобиля. На сухой дороге хорошие тормоза могут обеспечить ускорение торможения около 5–8 м/с^2. Выполним расчет для начальной скорости 100 км/ч (28 м/с) и предположим, что автомобиль замедляется с ускорением $-6{,}0$ м/с^2. Время реакции водителей обычно составляет около 0,3–1,0 с; положим его равным 0,50 с.

Решение. Для первой части задачи существенно, что автомобиль движется с постоянной скоростью 28 м/с в течение времени, необходимого для реакции водителя (0,50 с). Таким образом, составим таблицу:

Дано	Найти
$t = 0{,}50$ с	x
$v_0 = 28$ м/с	
$v = 28$ м/с	
$a = 0$	
$x_0 = 0$	

Чтобы найти x, воспользуемся уравнением (2.9б) [заметим, что (2.9в) не подходит, так как x умножается на a, которое равно нулю]:

$$x = v_0 t + 0 = (28\text{ м/с})\,(0{,}50\text{ с}) = 14\text{ м}.$$

Теперь для второй части пути (когда тор-

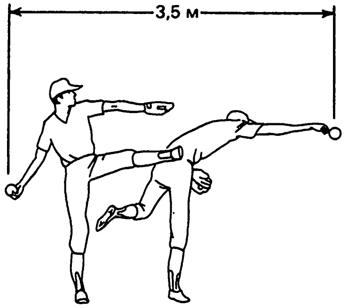


Рис. 2.8. Игрок в бейсбол ускоряет мяч на протяжении около 3,5 м.

моза включены и автомобиль останавливается):

Дано	**Найти**
$v_0 = 28$ м/с	x
$v = 0$	
$a = -6{,}0$ м/с^2	

Уравнение (2.9а) не содержит x; в уравнение (2.9б) входит x, но также и неизвестное t. Более всего подходит нам уравнение (2.9в); решим его относительно x (положив $x_0 = 0$):

$$v^2 - v_0^2 = 2ax,$$

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} =$$

$$= \frac{0 - (28\ \text{м/с})^2}{2(-6{,}0\ \text{м/с}^2)} = \frac{-784\ \text{м}^2/\text{с}^2}{-12\ \text{м/с}^2} =$$

$$= 65\ \text{м}.$$

За время реакции водителя автомобиль пройдет расстояние 14 м; и, прежде чем остановиться, он пройдет еще 65 м. Следовательно, полное расстояние равно 79 м. На мокрой дороге и при гололеде величина a может составлять лишь треть величины a на сухой дороге, поскольку при этом нельзя резко включать тормоза, не рискуя вызвать «занос» автомобиля; следовательно, тормозной путь значительно увеличится. Заметим также, что тормозной путь зависит от скорости не линейно, а растет пропорционально *квадрату* скорости!

Пример 2.9. Игрок в бейсбол бросает мяч со скоростью 30,0 м/с. Вычислите приближенно среднее ускорение мяча в ходе броска. Замечено, что при броске мяч ускоряется на общем расстоянии около 3,50 м, когда игрок проводит мяч из-за спины до точки, в которой мяч освобождается (рис. 2.8).

Решение. Требуется найти ускорение a при условии, что $x = 3{,}50$ м, $v_0 = 0$, а $v = 30{,}0$ м/с. Из уравнения (2.9в) найдем a:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} =$$

$$= \frac{(30{,}0\ \text{м/с})^2 - (0\ \text{м/с})^2}{2(3{,}50\ \text{м})} = \frac{900\ \text{м}^2/\text{с}^2}{7{,}00\ \text{м}} =$$

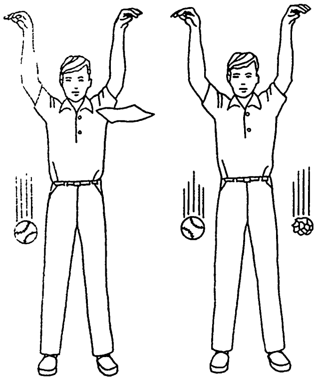
$$= 129\ \text{м/с}^2.$$

Очевидно, ускорение очень велико!

2.8. Падающие тела

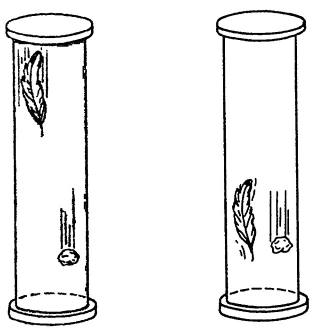
Одним из наиболее распространенных примеров равноускоренного движения является движение тела, свободно падающего по вертикали на землю. Тот факт, что падающее тело ускоряется, может и не быть на первый взгляд очевидным. Может показаться (и в этом многие были убеждены вплоть до эпохи Галилея), что более тяжелые тела падают быстрее, чем легкие, а скорость падения пропорциональна тяжести тела.

Галилей применил свой новый научный метод абстрагирования и упрощения, который состоит в попытке представить себе, что произойдет в идеализированных



а б

Рис. 2.9. *а* – мяч и листок бумаги брошены одновременно; *б* тот же опыт, но бумага скомкана.



а б

Рис. 2.10. Камень и перо брошены одновременно в воздухе (*а*) и в вакууме (*б*).

(упрощенных) ситуациях. Для случая свободного падения Галилей постулировал, что при отсутствии воздуха или другой среды с сопротивлением все тела будут падать с *одинаковым постоянным ускорением*. Он показал, что, согласно этому постулату, расстояние, проходимое телом, падающим из состояния покоя, пропорционально квадрату времени ($D \sim t^2$). Это можно видеть из уравнения (2.9б), однако впервые такую зависимость получил Галилей. Действительно, один из величайших вкладов Галилея в науку состоит в том, что он установил важные математические соотношения и показал их большое значение. Другой великий вклад Галилея в том, что он предложил теорию, имеющую конкретные экспериментальные следствия, которые можно проверить количественно ($D \sim t^2$).

В поддержку своего утверждения о том, что скорость падающих тел увеличивается при падении, Галилей привел следующий аргумент: тяжелый камень, сброшенный с высоты 2 м, загонит сваю в землю значительно глубже, чем тот же камень, упавший лишь с 10 см. Ясно, что в первом случае камень должен ускориться больше. Как мы упомянули выше, Галилей утверждал, что *любые* предметы (как тяжелые, так и легкие) падают с *одинаковым* ускорением, по крайней мере при отсутствии воздуха. Правда, здравый смысл может подсказать, что древние были ближе к истине. Действительно, если вы держите лист бумаги горизонтально в одной руке, а более тяжелое тело, скажем бейсбольный мяч, в другой и высвобождаете их одновременно (рис. 2.9, *а*), то очевидно, что более тяжелое тело достигнет земли первым. Повторите этот эксперимент, но на этот раз сомните бумагу в маленький комок (рис. 2.9, *б*). Вы увидите, что оба тела достигнут пола почти одновременно.

Галилей был уверен, что воздух действует на очень легкие тела с большой площадью поверхности как особый вид трения. В камере, из которой удален воздух, даже легкие тела, такие, как перо или удерживаемый горизонтально лист бумаги, будут падать с тем же ускорением, что и тяжелые тела (рис. 2.10). Во времена Галилея подобная демонстрация в вакууме была, разумеется, невозможна, что делает его заслуги еще более выдающимися. Галилея часто называют «отцом современной науки» не только за содержание его научных достижений (открытий в астрономии, понятия инерции, свободного падения), но также за его стиль и подход к науке (идеализация и упрощение, математическое выражение теории, предсказание экспериментально проверяемых следствий).

Вклад Галилея в наше понимание движения падающих тел можно обобщить следующим образом. *В данном месте на Земле и в отсутствие сопротивления воздуха все тела падают с одним и тем же постоянным ускорением.* Это ускорение, обусловленное силой тяжести, называется

ускорением свободного падения и обозначается символом g. Его значение приближенно равно

$$g = 9{,}80\ \text{м/с}^2.$$

В действительности g несколько меняется в зависимости от географической широты местности (что связано с вращением Земли), а также в зависимости от высоты над уровнем моря (табл. 2.1). Однако эти изменения столь малы, что в большинстве случаев мы будем ими пренебрегать. Во многих случаях сопротивление воздуха оказывает незначительное влияние, и большей частью мы также будем им пренебрегать. Однако, если расстояние, проходимое падающим телом, очень велико[1], сопротивление воздуха будет оказывать заметное влияние даже на тяжелые предметы.

Таблица 2.1. Ускорение свободного падения в различных пунктах земного шара

Пункт	Высота над уровнем моря, м	g, м/с^2
Нью-Йорк	0	9,803
Сан-Франциско	105	9,800
Денвер	1620	9,796
Пайкс-Пик	4230	9,789
Экватор	0	9,780
Северный полюс (расчетное)	0	9,832

Имея дело со свободно падающими телами, можно пользоваться уравнениями (2.9), в которых вместо a нужно подставить величину g с указанным выше числовым значением. Кроме того, поскольку тело движется по вертикали, вместо x нужно подставить y, а x_0 заменить на y_0 ($y_0 = 0$, если не оговорено другое значение). Направление y можно выбрать произвольным образом, т.е. считать его положительным при направлении вверх или вниз, но это соглашение необходимо сохранять неизменным при решении задачи.

Пример 2.10. Предположим, что с башни высотой 70,0 м бросают мяч. На какое расстояние он упадет за 1,00, 2,00 и 3,00 с? Пусть при этом ось y направлена вниз.

Решение. В данном случае нужно выбрать уравнение (2.9б), положив в нем $v_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Таким образом, через 1,00 с

[1] Скорость тела, падающего в воздухе или другой среде, не увеличивается беспредельно: если тело при падении проходит достаточно большое расстояние, то на некотором расстоянии его скорость станет максимальной; такая скорость называется *установившейся скоростью*. Максимальная скорость достигается в том случае, когда сила сопротивления воздуха (которая увеличивается со скоростью) уравновешивает силу тяжести.

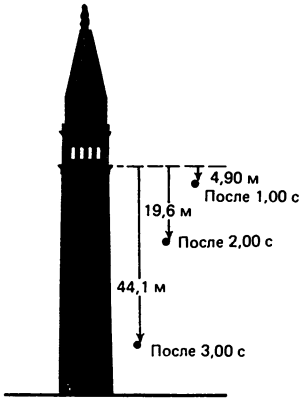


Рис. 2.11. Скорость тела, падающего с башни, постепенно нарастает, и за каждую последующую секунду тело проходит все большее расстояние.

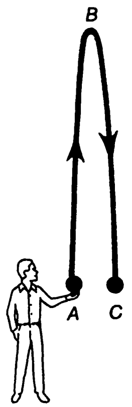


Рис. 2.12. Тело, брошенное вверх в воздух, отрывается от руки бросающего в точке A, достигает максимальной высоты в точке B и возвращается на исходную высоту в точке C. (См. пример 2.11.)

$$y = (1/2)\,at^2 = (1/2)\,(9{,}80 \text{ м/с}^2)\,(1{,}00 \text{ с}^2) = 4{,}90 \text{ м}.$$

Аналогично через 2,00 с имеем $y = 19{,}6$ м, а через 3,00 с $y = 44{,}1$ м (рис. 2.11).

Пример 2.11. Мяч бросают вверх в воздух с начальной скоростью 15,0 м/с. а) Сколь высоко взлетит мяч? б) Сколько времени мяч пробудет в воздухе, прежде чем возвратится обратно к бросившему его человеку? Мы не будем здесь рассматривать то, как происходило бросание мяча, а проанализируем его движение только после того, как он освободился из руки бросающего (рис. 2.12).

Решение. Выберем положительное направление оси y вверх, а отрицательное вниз. (Заметим, что это условие отличается от использованного в предыдущем примере.) При этом ускорение будет иметь отрицательный знак (поскольку оно изменяет скорость в направлении вниз): $a = -g = -9{,}80$ м/с^2.

а) Чтобы определить максимальную высоту, вычислим положение мяча, когда скорость его равна нулю ($v = 0$ в наивысшей точке). При $t = 0$ имеем $y_0 = 0$, $v_0 = 15{,}0$ м/с. В момент времени t (когда достигается *максимальная высота*) $v = 0$, $a = -9{,}80$ м/с^2 и нужно найти y. Используя уравнение (2.9в) (заменяя x на y), решим его относительно y:

$$v^2 = v_0^2 + 2ay,$$

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (15{,}0 \text{ м/с})^2}{2(-9{,}80 \text{ м/с}^2)} = 11{,}5 \text{ м}.$$

б) Вторую часть примера можно рассмотреть в два этапа: сначала вычислим время, которое потребуется мячу для достижения наивысшей точки, а затем вычислим время, за которое мяч упадет вниз. Однако проще рассмотреть движение от A до B и затем до C (рис. 2.12) в один этап и воспользоваться уравнением (2.9б); это можно сделать, поскольку y (или x) представляет собой не полное пройденное расстояние, а положение или перемещение. Таким образом, $y = 0$ как в A, так и в C. Полагая в уравнении (2.9б) $a = -9{,}80$ м/с^2, находим

$$y = v_0 t + (1/2)\,at^2,$$

$$0 = (15{,}0 \text{ м/с})\,t + (1/2)\,(-9{,}80 \text{ м/с}^2)\,t^2.$$

Мы имеем два решения[1]:

$$t = 0 \quad \text{и} \quad t = 2\,(15{,}0 \text{ м/с})/(9{,}80 \text{ м/с}^2) = 3{,}06 \text{ с}.$$

[1] Решения любого квадратного уравнения, например относительно неизвестной величины t, а именно $at^2 + bt + c = 0$, где a, b и c – постоянные, записываются в виде

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ускорение тел, в частности ракет и скоростных самолетов, нередко записывают как кратное величины $g = 9{,}80$ м/с^2. Например, ускорение пикирующего самолета, испытывающего перегрузку $3{,}00g$, равно $(3{,}00)\,(9{,}80$ м/с$^2) = 29{,}4$ м/с^2.

*2.9. Переменное ускорение – графическое исследование и использование математического анализа

Этот раздел является факультативным. Предполагается, что читатель знаком с производными и простым интегрированием. Если в курсе математического анализа вы еще не познакомились с этим материалом, то можете отложить изучение данного раздела до той поры, когда вы изучите математический анализ.

В разд. 2.5 мы видели, что если положение тела в зависимости от времени известно, то скорость в любой момент времени можно определить, измерив наклон кривой зависимости x от t в данный момент времени. Иными словами, можно взять производную от x по t, поскольку $v = dx/dt$. Например, как уже отмечалось в примере 2.3, если x можно записать в виде полинома относительно t, то можно использовать формулу

$$\frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1}.$$

Если, например, $x = At^3 + Bt$, где A и B – постоянные, то $v = dx/dt = 3At^2 + B$. Если мы зададим числовые значения A и B, то из этого уравнения сможем получить значение v в любой момент времени t.

В разд. 2.6 мы показали, что, если известна скорость как функция времени, можно определить ускорение в любой момент времени; это можно сделать, воспользовавшись тем, что ускорение численно равно наклону кривой зависимости v от t; тот же результат можно получить, если взять производную от v по t: $a = dv/dt$. В примере, приведенном выше,

$$v = 3At^2 + B, \quad a = dv/dt = 6At.$$

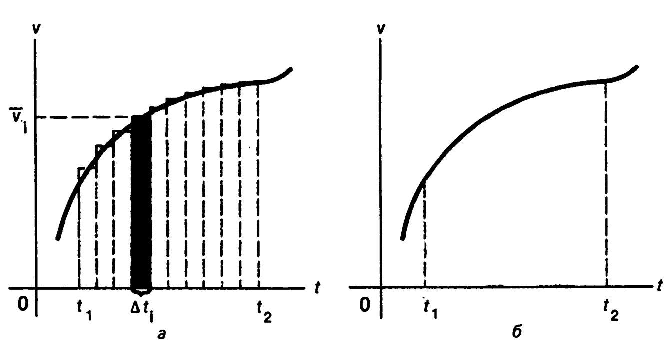


Рис. 2.13. Зависимость скорости v частицы от времени t. *а* – ось времени разбита на промежутки шириной Δt_i; средняя скорость на каждом промежутке Δt_i равна $\bar{v}_i$, а площадь всех прямоугольников $\sum \bar{v}_i \Delta t_i$ численно равна полному перемещению $x_2 - x_1$ за полное время $t_2 - t_1$; *б* – $\Delta t_i \to 0$ и площадь под кривой равна $x_2 - x_1$.

Возможна также и обратная операция. Если задать ускорение a как функцию времени, то можно найти v как функцию времени; в свою очередь, зная зависимость скорости v от времени t, можно получить перемещение x. Чтобы понять, как это делается, предположим, что скорость $v(t)$ как функция времени ведет себя так, как показано на рис. 2.13, *а*, и рассмотрим указанный на рисунке интервал времени от t_1 до t_2. Сначала разобъем ось времени на множество небольших интервалов Δt_1, Δt_2, Δt_3, ...; на рисунке их границы указаны штриховыми вертикальными линиями. Для каждого из этих интервалов горизонтальная штриховая линия будет указывать среднюю скорость за данный временной интервал. Перемещение за каждый такой интервал времени дается величиной Δx_i, где индекс i соответствует номеру конкретного интервала времени ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Согласно определению средней скорости (2.1), имеем

$$\Delta x_i = \bar{v}_i \Delta t_i .$$

Таким образом, перемещение за каждый малый интервал времени равно произведению Δv_i на Δt_i, т. е. площади прямоугольника, отмеченного для одного из интервалов на рис. 2.13, *а* темно-серым цветом. Общее перемещение за время от t_1 до t_2 равно сумме перемещений по всем рассмотренным интервалам времени:

$$x_2 - x_1 = \sum_{t_1}^{t_2} \bar{v}_i \, \Delta t_i \tag{2.10a}$$

(где x_1 – координата в момент времени t_1, а x_2 – координата в момент t_2); эта величина в точности равна общей площади всех прямоугольников, показанных на рисунке.

Пользуясь только графиком, иногда трудно точно оценить $\bar{v}_i$ для каждого малого интервала времени. Более высокую точность при расчете $x_2 - x_1$ можно получить, разбивая интервал $t_2 - t_1$ на большее число более мелких интервалов. В конечном счете мы можем положить Δt_i равным нулю, т. е. (в принципе) у нас будет бесконечное число интервалов Δt. В этом пределе площадь всех таких бесконечно тонких прямоугольников станет в точности равна площади под кривой (рис. 2.13, *б*). Таким образом, мы получили важный результат, состоящий в том, что *полное перемещение за время между любыми двумя моментами времени равно площади, заключенной между кривой скорости и осью t в интервале от t_1* до t_2. Этот предел можно записать в виде

$$x_2 - x_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \bar{v}_i \, \Delta t_i ,$$

или

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt . \tag{2.10б}$$

Мы положили $\Delta t \to 0$ и обозначили этот интервал через dt, указав, что теперь он бесконечно мал. Средняя скорость $\bar{v}$ за бесконечно малое время dt, разумеется, совпадает с мгновенной скоростью в данный момент времени (мы записываем ее в виде $v(t)$, чтобы напомнить, что v – это функция времени t). Символ $\int$ представляет собой удлиненную латинскую букву S и обозначает сумму по бесконечному числу бесконечно малых интервалов времени. В этом случае говорят, что берется *интеграл* от $v(t)$ по dt за время от t_1 до t_2, а это равно площади, заключенной между кривой $v(t)$ и осью t в интервале времени от t_1 до t_2 (рис. 2.13, *б*). Интеграл в (2.10б) называется *определенным интегралом*, поскольку в нем указаны пределы интегрирования (t_1 и t_2). Из графика следует, что интеграл численно равен площади под кривой, причем эту площадь численно можно оценить с достаточной степенью точности, взяв небольшие, но конечные промежутки Δt_i и просуммировав соответствующие им площади с помощью калькулятора или компьютера. Во многих случаях, пользуясь методами математического анализа, интегралы можно вычислять точно.

Если известна скорость как функция времени, то, пользуясь выражением (2.10б) и беря интеграл, можно получить полное перемещение. Аналогично, зная ускорение как функцию времени, с помощью интегрирования можно вычислить скорость. Чтобы показать это, вспомним определение среднего ускорения [выражение (2.3)]. Найдем из этого выражения Δv:

$$\Delta v = \bar{a}\,\Delta t.$$

Таким образом, если величина a задана как функция времени t на интервале $t_1 - t_2$, то этот интервал можно разбить на множество более мелких Δt_i (так же, как на рис. 2.13,*а*). Изменение скорости за каждый интервал Δt_i равно $\Delta v_i = \bar{a}_i\,\Delta t_i$, где индекс i относится к произвольному интервалу Δt ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Полное изменение скорости за время $t_1 - t_2$ равно

$$v_2 - v_1 = \sum_{t_1}^{t_2} \bar{a}_i\,\Delta t_i, \tag{2.11a}$$

где v_2 – скорость в момент времени t_2, а v_1 – скорость при t_1. Выражение (2.11а) можно записать в виде интеграла, положив $\Delta t \to 0$:

$$v_2 - v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \bar{a}_i\,\Delta t_i,$$

или

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt. \tag{2.11б}$$

Выражение (2.11б) позволяет нам определять скорость v_2

в некоторый момент времени t_2, если известна скорость в момент времени t_1, а ускорение a задано как функция времени.

Интегрирование представляет собой процесс, обратный взятию производной. Вычисление интегралов в конкретных случаях описывается в учебниках по математическому анализу, и здесь мы можем рассмотреть это лишь кратко. Интеграл можно всегда рассчитать численно с некоторой наперед заданной точностью (разд. 2.10). Некоторые функции с помощью математического анализа могут быть проинтегрированы аналитически; результаты расчетов некоторых интегралов приведены в приложении Б. Нетрудно найти аналитический вид интегралов от полиномов, поскольку известно, что

$$\frac{d}{dt}(Ct^n) = nCt^{n-1}.$$

Умножив обе части этого выражения на dt, получим следующее равенство:

$$nCt^{n-1}dt = d(Ct^n),$$

интегрирование обеих частей которого дает

$$\int nCt^{n-1}dt = \int d(Ct^n) = Ct^n.$$

Последний этап вычисления основан на том, что интегрирование обратно действию взятия производной. Последнюю формулу можно записать в более удобном виде, поделив обе части на n и положив $n - 1 = m$:

$$\int Ct^m dt = \frac{1}{m+1} Ct^{m+1}.$$

Пример 2.12. Тело начинает двигаться из состояния покоя ($v_1 = 0$) в момент времени $t_1 = 0$ и движется затем с ускорением $a(t) = (7{,}00\ \text{м/с}^3)\,t$. Чему будут равны а) скорость и б) перемещение тела через 2,00 с?

Решение. а) Сначала определим v как функцию времени t. Полагая в (2.11б) $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $v_1 = 0$, $v_2 = v(t)$, получаем[1]

$$v(t) = \int_0^t (7{,}00\ \text{м/с}^3)\,t\,dt = (7{,}00\ \text{м/с}^3)\frac{t^2}{2}\bigg|_0^t =$$
$$= (7{,}00\ \text{м/с}^3)\left(\frac{t^2}{2} - 0\right) = (3{,}50\ \text{м/с}^3)\,t^2.$$

При $t = 2{,}00$ с имеем $v = (3{,}50\ \text{м/с}^3) \times (2{,}00\ \text{с})^2 = 14{,}0$ м/с.

б) Чтобы получить перемещение, воспользуемся выражением (2.10б) при $v_1 = 0$, $v_2 = 14{,}0$ м/с, $t_1 = 0$, $t_2 = 2{,}00$ с и положим $x_1 = 0$:

$$x_2 = \int_0^{2{,}00\ \text{с}} (3{,}50\ \text{м/с}^3)\,t^2 dt =$$
$$= (3{,}50\ \text{м/с}^3)\frac{t^3}{3}\bigg|_0^{2{,}00\ \text{с}} = 9{,}33\ \text{м}.$$

Таким образом, при $t = 2{,}00$ с получаем $v = 140$ м/с, а $x = 9{,}33$ м.

[1] В первой строке этого выражения символ $|_0^t$ означает, что предшествующее ему выражение вычисляется на верхнем пределе, а затем из него вычитается значение на нижнем пределе интегрирования (при $t = 0$).

Пример 2.13. Используя уравнения (2.10б) и (2.11б), выведите кинематические соотношения (2.9а)–(2.9в) для постоянного ускорения.

Решение. Используем те же обозначения, что и в разд. 2.7: $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $v_1 = v_0$, $v_2 = v$. Тогда, учитывая, что $a = \text{const}$, из (2.11б) получаем

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 + at\,.$$

Это совпадает с (2.9а). Воспользуемся затем уравнением (2.10б):

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)\,dt = \\ = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2\,.$$

Это есть не что иное, как уравнение (2.9б). Чтобы получить (2.9в), применим следующее правило замены переменной при дифференцировании:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt};$$

поскольку $dx/dt = v$, мы имеем $a = v(dv/dx)$. Тогда из последнего соотношения находим

$$v\,dv = a\,dx\,,$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx\,, \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x - x_0)\,,$$

или $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, что совпадает с выражением (2.9в).

*2.10. Переменное ускорение; численное интегрирование

В этом факультативном разделе мы проиллюстрируем метод численного интегрирования. Рассмотрим сначала пример, когда интеграл можно вычислить также аналитически, что позволит сравнить результаты численного и аналитического вычисления интегралов.

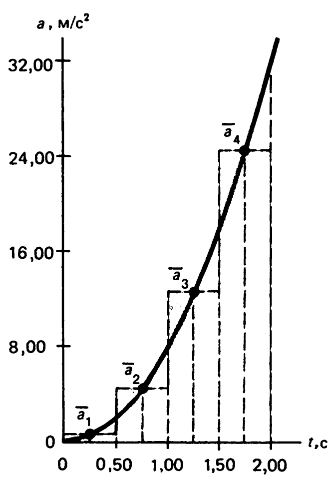


Рис. 2.14. Пример 2.14.

Пример 2.14. Тело начинает движение из состояния покоя и движется с ускорением $a(t) = (8{,}00\ \text{м/с}^4)\,t^2$. Найдите его скорость через 2,00 с с помощью численных методов.

Решение. Сначала разобъем временной интервал 0,00–2,00 с на четыре более мелких интервала $\Delta t_i = 0{,}50$ с (рис. 2.14). Положим в выражении (2.11а) $v_2 = v$, $v_1 = 0$, $t_2 = 2{,}00$ с и $t_1 = 0$. На каждом интервале Δt_i необходимо оценить $\bar{a}_i$, что можно сделать различными способами. Мы воспользуемся простым методом выбора $\bar{a}_i$, приравняв его к ускорению $a(t)$ в средней точке каждого интервала Δt_i (еще более простой, но, как правило, менее точный способ состоит в использовании значения a в начальной точке интервала Δt_i). Таким образом, мы вычисляем $a(t) = (8{,}00\ \text{м/с}^4)\,t^2$ при $t = 0{,}25$ (т. е. посередине между 0,00 и 0,50 с), 0,75, 1,25 и 1,75 с. При этом мы получим следующие результаты:

i	1	2	3	4
$\bar{a}_i$, м/с^2	0,50	4,50	12,50	24,50

Используя (2.11а) и замечая, что все Δt_i равны 0,50 с (поэтому Δt_i можно вынести за знак суммы в качестве общего множителя), получаем

$$v(t = 2{,}00\,\text{с}) = \sum_{t=0}^{t=2{,}00\,\text{с}} \bar{a}_i\,\Delta t_i =$$
$$= (0{,}50\ \text{м/с}^2 + 4{,}50\ \text{м/с}^2 +$$
$$+ 12{,}50\ \text{м/с}^2 + 24{,}50\ \text{м/с}^2)\,(0{,}50\ \text{с}) =$$
$$= 21{,}0\ \text{м/с}.$$

Это можно сравнить с результатом аналитического решения, получаемым из выражения (2.11б), поскольку в данном случае функция $a(t)$ интегрируется аналитически:

$$v = \int_0^{2{,}00\,\text{с}} (8{,}00\ \text{м/с}^4)\,t^2 dt = \frac{8{,}00\ \text{м/с}^4}{3}\,t^3\Big|_0^{2{,}00\,\text{с}} =$$
$$= \frac{8{,}00\ \text{м/с}^4}{3}[(2{,}00\ \text{с})^3 - (0)^3] =$$
$$= 21{,}33\ \text{м/с},$$

или 21,3 м/с, если правильно учесть число значащих цифр. Полученный аналитический результат, разумеется, точный; очевидно, наша численная оценка не так далека от него, хотя Δt мы получили при разбиении общего интервала только на четыре части. Однако в случаях, когда требуется высокая точность, такая близость результатов может оказаться недостаточной. Если увеличить число интервалов Δt, сделав их более узкими, то мы получим более точный результат. Например, если общий интервал разбить на десять промежутков, каждый с $\Delta t = (2{,}00\ \text{с})/10 = 0{,}20$ с, то, вычисляя $a(t)$ при $t = 0{,}10$ с, 0,30 с, ..., 1,90 с, мы получим следующие значения $\bar{a}_i$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{a}_i$, м/с^2	0,08	0,72	2,00	3,92	6,48	9,68	13,52	18,0	23,12	28,88

При этом из (2.11а) находим

$$v(t = 2{,}00\ \text{с}) = \sum \bar{a}_i \Delta t_i = (\sum \bar{a}_i)\,(0{,}200\ \text{с}) =$$
$$= (106{,}4\ \text{м/с}^2)\,(0{,}200\ \text{с}) = 21{,}28\ \text{м/с};$$

здесь мы добавили дополнительную значащую цифру, чтобы показать, что этот результат значительно ближе к аналитическому (точному), но все еще не вполне совпадает с ним. Относительная ошибка результата уменьшилась от 1,5% $[(0{,}3\ \text{м/с}^2)/(21{,}0\ \text{м/с}^2)]$ в случае, когда временной интервал разбивался на четыре промежутка, до 0,2% (0,05/21,0) при десяти промежутках; соответственно относительная точность результата возросла.

Заметим, что аналитическое решение (интегрируемое в явном виде) может дать точный результат, тогда как численное решение (за исключением очень простых случаев) является приближенным.

В приведенном выше примере нам была задана интегрируемая аналитическая функция, что позволило оценить степень точности численного расчета благодаря сравнению с известным точным результатом. (Разумеется, с такой просто интегрируемой функцией нет нужды затруднять себя численным расчетом.) Однако как следует поступить, если функция не интегрируется и нет возможности сравнить численный расчет с аналитическим результатом? Иными словами, каким образом убедиться в том, что мы сделали достаточное число разбиений интервала, так что наша оценка имеет определенную, заранее заданную погрешность, скажем 1%? Поскольку мы не имеем аналитического решения, с которым можно провести сравнение, вместо этого можно сравнить результаты двух последовательных численных расчетов:

первый из них выполнен при разбиении интервала, скажем, на n промежутков, а второй – на удвоенное число промежутков ($2n$). Если оба результата удовлетворяют заданной степени точности (например, 1%), то, как правило, можно считать, что второй результат (с большим числом промежутков) наверняка удовлетворяет заданной степени точности приближения к истинному значению. Если результаты обоих расчетов оказываются недостаточно близкими, то следует выполнить третий расчет с разбиением заданного интервала на еще большее число промежутков (в два раза, а возможно, и в десять раз большее в зависимости от качества предыдущего приближения) и его результат сравнить с предшествующим расчетом. В примере 2.14 разница между результатами расчетов с четырьмя и десятью промежутками около 0,3 м/с^2, или 1,5%. Если требуется точность 1%, то мы уже не можем быть уверенными, что второй расчет удовлетворяет этой точности, и должны были бы выполнить третий расчет, возможно, с 20 промежутками.

Такие расчеты оказываются весьма длинными и утомительными, особенно если функция имеет более сложный вид, чем в приведенном выше очень простом примере. И даже в нашем простом примере, если требуется вычислить еще и перемещение x в некоторый момент времени, нам пришлось бы предпринять второе численное интегрирование по v, т.е. пришлось бы вычислять v для многих различных моментов времени, а это потребовало бы огромной работы. Поэтому весьма полезно здесь использовать программируемые калькуляторы и компьютеры; для этого составляется программа (часто простая), которая вводится в компьютер, и вычисления повторяют с различными входными переменными с разным числом промежутков до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Численные методы применяются также в том случае, когда вместо аналитического вида функции заданы ее числовые значения. (Например, имеются значения ускорения тела, измеренные в различные моменты времени.) При этом процедура в основном сохраняется той же, что и выше, за исключением случаев, когда все промежутки, на которые разбивается интервал времени, нельзя сделать одинаковыми. Простой способ оценки среднего значения подынтегрального выражения, например $\bar{v}$, для каждого промежутка Δt состоит в том, что мы выбираем его равным полусумме значений в начале и в конце промежутка. [Например, для первого промежутка следовало бы принять $\bar{v} = (v_0 + v_1)/2$, где v_0 и v_1 – значения v в начальных точках соответственно первого и второго промежутков. Можно было бы использовать также значения в начале (или в конце) каждого промежутка, но при этом для получения точного результата нам потребовалось бы большее число промежутков.]

Мы описали простой и прямой метод численного интегрирования. Можно использовать также и более сложные методы (такие, как более точная оценка $\bar{a}_i$ для каждого промежутка, что потребует для получения точного результата еще более узких промежутков). Все эти методы можно найти в соответствующих учебниках.

Заключение

Кинематика описывает движение различных тел, в то время как *динамика* объясняет, почему тела движутся именно таким образом. Движение любого тела должно всегда рассматриваться по отношению к некоторой конкретной *системе отсчета*. Чтобы описать движение тела, которое в данной главе считается одномерным (движение происходит вдоль прямой линии), мы воспользовались понятиями перемещения, скорости и ускорения. *Перемещение* – это изменение положения тела. Скорость представляет собой быстроту изменения перемещения: *средняя скорость* тела за некоторый интервал времени определяется как перемещение Δx за интервал времени Δt: $\bar{v} = \Delta x/\Delta t$; *мгновенная скорость* (скорость в данный момент времени) равна пределу средней скорости в этот момент времени при $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

здесь dx/dt – (в математическом анализе) *производная* от x по t. На графике, изображающем зависимость положения тела от времени, мгновенная скорость равна тангенсу угла наклона кривой в данной точке. *Ускорение* – это быстрота изменения скорости: *среднее ускорение* за интервал времени Δt определяется как $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$, где Δv – изменение скорости в течение интервала времени Δt; *мгновенное ускорение* определяется как

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Если тело движется по прямой линии с постоянным ускорением (*равноускоренное движение*), то скорость v и положение x связаны с ускорением a, временем движения t, начальными положением x_0 и скоростью v_0 следующими уравнениями (2.9):

$$v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2,$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \qquad \bar{v} = (v + v_0)/2.$$

(Эти уравнения полезно запомнить, хотя совсем неплохо было бы уметь выводить их из определений скорости и ускорения.)

Вблизи поверхности Земли как свободно падающие, так и брошенные вертикально вверх или вниз тела движутся с постоянным направленным вниз *ускорением свободного падения*, равным примерно $g = 9{,}80$ м/с^2; это справедливо только в том случае, когда сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Вопросы

1. В каких случаях футбольный мяч удобно рассматривать как частицу, а в каких нет?

2. Какую скорость измеряет спидометр автомобиля - путевую или определяемую по перемещению, или и ту и другую?

3. Допустим, что точный спидометр регистрирует постоянное значение скорости в течение некоторого интервала времени. Можно ли, пользуясь только спидометром, определить среднюю скорость по перемещению за это время? Объясните.

4. Может ли средняя скорость перемещения частицы на каком-то интервале времени быть не равной нулю, если в течение более длительного времени она равна нулю? Объясните.

5. Может ли средняя скорость частицы, определяемая по перемещению, быть равной нулю на данном интервале времени, если в течение более длительного промежутка времени она не была равна нулю? Объясните.

6. Может ли тело иметь переменную скорость по перемещению, если его путевая скорость постоянна? Если может, то приведите примеры.

7. Может ли тело иметь переменную путевую скорость, если его скорость по перемещению постоянна? Если может, то приведите примеры.

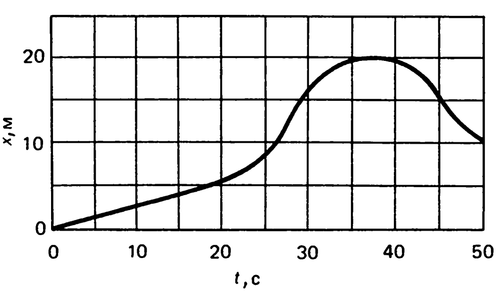


Рис. 2.15.

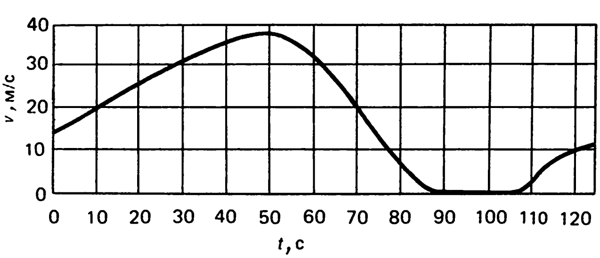


Рис. 2.16.

8. Если тело движется с постоянной скоростью, то отличается ли его средняя скорость за любой интервал времени от мгновенной скорости?

9. Опишите словами движение, график которого показан на рис. 2.15.

10. Опишите словами движение, график которого приведен на рис. 2.16.

11. Может ли тело иметь скорость, направленную на север, и ускорение, направленное на юг?

12. Может ли тело в один и тот же момент времени иметь равную нулю скорость и не равное нулю ускорение? Приведите пример.

13. Если тело имеет большую путевую скорость, то значит ли это, что у него и большое ускорение? Объясните на примерах.

14. Сравните ускорение мотоцикла, который ускоряется от 80 до 90 км/ч, с ускорением велосипеда, ускоряющегося за тот же промежуток времени из состояния покоя до скорости 10 км/ч.

15. Может ли скорость тела быть отрицательной, если его ускорение положительно? Может ли быть наоборот?

16. Приведите пример движения, когда скорость и ускорение отрицательны.

17. Человек, стоящий на краю утеса, бросает вверх камень со скоростью v. Второй камень он бросает вертикально вниз с той же скоростью. Какой камень достигнет подножья утеса с большей скоростью? Сопротивлением воздуха пренебрегите.

18. Ускорение свободного падения на Луне равно примерно одной шестой такого ускорения на Земле. Если тело бросить вертикально вверх на Луне и на Земле с одинаковыми начальными скоростями, то во сколько раз выше взлетит это тело на Луне?

19. Брошенный вертикально вверх мяч вернулся обратно к бросавшему его человеку.

Какая часть пути займет большее время, вверх или вниз? Дайте ответы для случаев а) отсутствия и б) наличия сопротивления воздуха. (*Подсказка:* ускорение, вызванное сопротивлением воздуха, всегда противоположно направлению движения тела.)

20. Если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то тело, брошенное вертикально вверх, возвращается в исходное положение с той же скоростью, что и в начале движения. Изменится ли ситуация при наличии сопротивления воздуха? Если да, то как?

Задачи

Разделы 2.1–2.5

1. (I) Допустим, что при управлении автомобилем, движущимся со скоростью 90 км/ч, вы на 2,0 с отвлеклись от дороги и посмотрели в сторону. Как далеко за это время уедет автомобиль?

2. (I) Птица летит со скоростью 28 км/ч. Сколько времени ей потребуется на преодоление 100 км?

3. (I) Человек пробегает восемь полных кругов по стадиону с беговой дорожкой длиной 400 м за 10,5 мин. Вычислите а) среднюю путевую скорость и б) среднюю скорость по перемещению.

4. (I) На рис. 2.15 приведен график движения кролика, бегущего по прямому туннелю (показана зависимость местонахождения от времени). Какова мгновенная скорость кролика в моменты времени а) $t = 10{,}0$ с; б) $t = 30{,}0$ с? Чему равна его средняя скорость по перемещению в промежутке времени в) $t = 0-5{,}0$ с; г) $t = 25{,}0-30{,}0$ с; д) $t = 40{,}0-50{,}0$ с?

5. (I) а) В течение каких интервалов времени, если таковые существуют, на рис. 2.15 скорость кролика постоянная? б) В какой момент времени его скорость наибольшая? в) Равна ли когда-нибудь его скорость нулю? Если да, то когда? г) Бежит ли кролик в течение указанного на рисунке времени в одном направлении или же он меняет направление?

6. (II) Постройте график скорости $v(t)$ для тела, перемещение которого зависит от времени так, как показано на рис. 2.15.

7. (II) Самолет пролетает 2200 км со скоростью 1000 км/ч. Затем возникает встречный ветер, вследствие чего скорость самолета уменьшается и следующие 1750 км он пролетает уже со скоростью 850 км/ч. Какова средняя путевая скорость самолета за такой перелет?

8. (II) При квалификационных заездах перед соревнованиями автогонщик должен на протяжении четырех кругов показать среднюю путевую скорость 200 км/ч. Из-за сбоев в двигателе средняя путевая скорость автомобиля на первых двух кругах оказалась равной 170 км/ч. Какую среднюю скорость нужно развить на последних двух кругах?

9. (II) Вычислите пропускную способность (число автомобилей, проходящих данную точку в течение часа) автострады с тремя полосами одностороннего движения. Используйте следующие предположения: средняя путевая скорость автомобилей равна 90 км/ч, средняя длина автомобиля равна 6,0 м, а средняя дистанция между автомобилями должна быть 70 м.

10. (II) Камень, брошенный в горизонтальном направлении и прошедший расстояние 40 м, попадает в большой колокол. Удар о колокол был услышан через 3,9 с. Какой была скорость камня, если скорость звука 330 м/с? (Действие силы тяжести не рассматривайте.)

11. (II) Собака убежала от своего хозяина на расстояние 100 м за 8,4 с, а затем за треть этого времени пробежала половину пути обратно. Вычислите а) ее среднюю путевую скорость; б) среднюю скорость по перемещению.

12. (II) Два автомобиля приближаются друг к другу по параллельным полосам дороги. Каждый имеет скорость 90 км/ч относительно земли. Через какое время автомобили пройдут мимо друг друга, если первоначальное расстояние между ними было 8,5 км?

13. (II) Положение мяча, катящегося по прямой, дается выражением $x = 2{,}0 + 6{,}6t - 1{,}1t^2$, где x измеряется в метрах, а t – в секундах. а) Определите положение мяча в моменты времени $t = 1{,}0$; 2,0; 3,0 с. б) Чему равна его средняя скорость на интервале времени 1,0–3,0 с? в) Какова его мгновенная скорость в моменты времени $t = 2{,}0$ с и $t = 3{,}0$ с?

14. (II) Автомобиль, движущийся со скоростью 90 км/ч, находится на расстоянии 100 м позади трактора, имеющего скорость 50 км/ч. Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы догнать трактор?

15. (II) Автомобиль, едущий со скоростью 90 км/ч, обгоняет поезд длиной 1,10 км, движущийся в том же направлении по параллельному пути. Путевая скорость поезда равна 70 км/ч. Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы проехать вдоль всего поезда? Как далеко автомобиль уедет за это время? Каковы будут эти величины в случае, когда автомобиль и поезд движутся навстречу друг другу?

Раздел 2.6

16. (I) На рис. 2.16 показана зависимость скорости поезда от времени. а) В какой момент времени скорость поезда наибольшая? б) Существуют ли промежутки времени (если да, то какие), в течение которых скорость постоянна? в) Существуют ли промежутки времени (если да, то какие), в течение которых ускорение постоянно? г) В какие моменты времени ускорение является наибольшим?

17. (I) За время 6,6 с автомобиль разгоняется из состояния покоя до скорости 100 км/ч. Определите его ускорение в м/с^2.

18. (I) Автомобиль, движущийся с большой скоростью, способен развить ускорение около 3,2 м/с^2. За какое время скорость автомобиля увеличится от 85 до 100 км/ч?

19. (II) Положение тела x (в метрах) дается выражением $x = At + 4Bt^3$. а) Найдите ускорение тела в зависимости от времени. б) Каковы скорость и ускорение тела через 5,0 с? в) Как выглядит зависимость скорости от времени, если $x = At + Bt^{-3}$?

20. (II) За 10 с автомобиль равномерно ускоряется из состояния покоя до скорости 15 м/с, после чего в течение 10 с его скорость 15 м/с остается постоянной. Затем в последующие 5,0 с он равномерно тормозится до скорости 5,0 м/с, после чего его скорость сохраняется постоянной в течение 5,0 с. а) Постройте график зависимости скорости от времени. б) Постройте график зависимости перемещения от времени.

21. (III) В помещенной ниже таблице представлена зависимость положения гоночного автомобиля от времени. Автомобиль стартует в момент времени $t = 0$ из состояния покоя и затем движется по прямой. Оцените а) его скорость и б) ускорение в зависимости от времени. Представьте результаты в виде таблицы и графика.

t, с	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50
x, м	0	0,11	0,46	1,06	1,94	4,62	8,55	13,79

t, с	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
x, м	20,36	28,31	37,65	48,37	60,30	73,26	87,16

Раздел 2.7

22. (I) В течение 5,0 с автомобиль разгоняется от скорости 30 км/ч до скорости 80 км/ч. Найдите его ускорение в м/с^2. Считая ускорение постоянным, определите расстояние, которое автомобиль покроет за это время.

23. (I) Автомобиль, движущийся со скоростью 25 м/с, тормозится до полной остановки, проезжая при этом расстояние 120 м. Считая его ускорение при торможении постоянным, найдите это ускорение.

24. (I) Покажите, что выражение $\bar{v} = (v + v_0)/2$ [см. выражение (2.9г)] неприменимо для случая, когда ускорение имеет вид $a = A + Bt$, где A и B - постоянные.

25. (II) В момент времени $t = 0$ космический корабль имеет скорость 55 м/с. Он ускоряется и к моменту $t = 10,0$ с приобретает скорость 162 м/с. Какое расстояние он пролетит в промежутке времени от $t = 2,0$ с до $t = 6,0$ с?

26. (II) Поезд длиной 90 м ускоряется равномерно из состояния покоя. Локомотив проезжает мимо стрелочника, находящегося на расстоянии 130 м от точки начала движения, со скоростью 25 м/с. Какова скорость последнего вагона, когда он проходит мимо стрелочника?.

27. (II) Автомобиль, движущийся со скоростью 90 км/ч, равномерно тормозит с ускорением 1,8 м/с^2. Вычислите: а) расстояние, которое он пройдет до полной остановки; б) время, затрачиваемое на торможение до полной остановки; в) расстояние, которое автомобиль проходит при торможении за первую и третью секунды.

28. (II) Участник игры в гольф рассчитывает силу удара таким образом, чтобы в том случае, если в лунку мяч не попал, он все же остановился в пределах некоторого (небольшого) расстояния от лунки (например, с «перелетом» или «недолетом» 1 м). Сделать это при ударе с горы (мяч при этом катится вниз под уклон) труднее, чем при ударе в гору. Чтобы понять, почему это происходит, предположите, что на данном поле мяч при движении под гору равномерно тормозится с ускорением 3,0 м/с^2, а при движении в гору тормозится с постоянным ускорением 4,0 м/с^2. Считайте, что подъем начинается на расстоянии 7,0 м от лунки. Вычислите допустимый диапазон скоростей, которые нужно сообщать мячу, чтобы он останавливался в пределах от 1 м перед лункой и до

1 м за лункой. Выполните тот же расчет для случая движения мяча под гору (спуск начинается за 7,0 м от лунки). Что именно в расчетах дает основание считать удары под гору более сложными?

29. (II) Автомобиль, движущийся со скоростью 50 км/ч, врезается в дерево; передняя часть автомобиля деформируется, а тело водителя перемещается на 0,7 м и останавливается. Определите среднее ускорение водителя во время этого столкновения. Выразите ответ в единицах, кратных ускорению свободного падения g ($1{,}00g = 9{,}80$ м/с^2).

30. (II) Человек, плотно пристегнутый ремнем безопасности, имеет все шансы уцелеть в автомобильной аварии, если тормозящее ускорение по величине не превышает $30g$ ($1{,}00g = 9{,}80$ м/с^2). Предполагая, что автомобиль тормозится с постоянным ускорением $30g$, определите, на какую деформацию (в целях обеспечения безопасности) должна быть рассчитана передняя часть автомобиля, если авария происходит при скорости 100 км/ч.

31. (II) Составьте таблицу значений тормозного пути автомобиля, имеющего начальную скорость 60 км/ч. Время реакции водителя равно 0,80 с. Выполните расчеты а) для ускорения $a = -4{,}0$ м/с^2; б) для $a = -7{,}0$ м/с^2.

32. (III) Покажите, что тормозной путь d_s автомобиля дается выражением $d_s = v_0 t_R - v_0^2/(2a)$, где v_0 – начальная скорость автомобиля; t_R – время реакции водителя; a – тормозящее ускорение (оно отрицательно).

33. (III). В конструкции светофоров необходимо предусмотреть, чтобы желтый сигнал светился достаточно долго, так чтобы водитель успел остановиться или проехать перекресток. Например, если водитель находится от перекрестка на расстоянии, меньшем тормозного пути d_s (вычисленный выше в задаче 32), то желтый сигнал должен гореть в течние времени, достаточного для проезда водителем этого расстояния и самого перекрестка (шириной d_i). а) Покажите, что желтый сигнал должен гореть в течение времени $t = t_R - v_0/2a + d_i/v_0$, где v_0 – предполагаемая средняя скорость приближающегося к перекрестку автомобиля, а величины a и t_R определены в задаче 32. б) Специалист по организации уличного движения предполагает, что автомобили подъезжают к перекрестку длиной 14,4 м со скоростями от 30 до 50 км/ч. Для обеспечения безопасности движения он вычисляет время включения желтого сигнала светофора, считая $t_R = 0{,}500$ с и $a = -4{,}00$ м/с^2, и для полной безопасности выбирает время, наибольшее из двух получившихся. Какой он получит результат?

34. (III) При конструировании высокоскоростного транспорта необходимо выдерживать некоторую пропорцию между средней путевой скоростью поезда и расстоянием между остановками. Чем больше остановок на линии, тем меньше средняя скорость поезда. Чтобы понять существо этой задачи, вычислите время, требующееся поезду для преодоления перегона длиной 30 км в двух случаях: а) остановочные пункты отстоят друг от друга на 1,00 км; б) остановки происходят через 3,00 км. Считайте, что после каждой остановки поезд движется с ускорением 1,5 м/с^2, пока не достигнет скорости 80 км/ч. Затем поезд движется с той же скоростью до тех пор, пока при подходе к следующей станции машинист не включит тормоза, создающие тормозящее ускорение $-3{,}0$ м/с^2. Считайте, что на каждой станции поезд стоит 20 с.

35. (III) В рамках рассмотренной выше задачи по конструированию скоростной транспортной системы выведите общую формулу для средней скорости поезда. Определите символы, используемые для обозначения всех входящих в формулу величин, таких, как ускорение, тормозящее ускорение, максимальная скорость, расстояние между станциями и время стоянки на каждой станции.

36. (III) Замаскированный полицейский автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 80 км/ч, обогнал «лихач», движущийся со скоростью 100 км/ч. Ровно через 1,00 с после обгона полисмен нажал на акселератор. Если ускорение полицейского автомобиля 3,00 м/с^2, то сколько времени понадобится полицейским, чтобы догнать «лихача» (будем считать, что он движется с постоянной скоростью)?

37. (II) Предположите, что в предыдущей задаче скорость «лихача» неизвестна. Если полицейский автомобиль, ускоряясь равномерно, догнал его через 6,0 с, то какой была скорость «лихача»?

Раздел 2.8

38. (I) Камень, брошенный с вершины утеса, ударился о землю через 4,2 с. Чему равна высота утеса?

39. (I) а) Сколько времени потребуется кирпичу, чтобы достичь земли, если его бросили с высоты 65 м?) б) Какова будет его скорость перед ударом о землю?

40. (I) Бейсбольный мяч брошен вертикально вверх со скоростью 18,0 м/с. а) На какую высоту он взлетит? б) Сколько времени потребуется мячу для возвращения на землю?

41. (I) С какой минимальной скоростью лосось должен выпрыгнуть из воды, чтобы попасть на вершину водопада высотой 2,1 м?

42. (II) С крыши высокого здания бросили сначала один камень, а через 1,00 с другой. На каком расстоянии друг от друга будут находиться камни, когда скорость второго камня станет равной 23,0 м/с?

43. (II) Вертолет взлетает вертикально со скоростью 8,0 м/с; на высоте 120 м над землей из окна вертолета выбрасывают груз. Через какое время груз упадет на землю?

44. (II) Прыжок блохи можно анализировать при помощи замедленной фотосъемки. Движение можно разделить на два этапа. Первый этап - отталкивание - продолжается около 10^{-3} с. В течение этого времени ноги блохи, отталкиваясь от земли, ускоряют блоху до скорости около 1,0 м/с. На втором этапе полет блохи в воздухе происходит только под действием силы тяжести (считается, что прыжок вертикальный). Вычислите: а) ускорение блохи во время отталкивания, выраженное в величинах, кратных g (ускорение свободного падения); б) высоту подъема над землей во время отталкивания; в) высоту, которой достигнет блоха после взлета с земли, когда ее ускорение равно g. Фотосъемка показывает, что блоха прыгает на высоту, составляющую лишь 2/3 вычисленного значения; дайте этому объяснение.

45. (II) Если блоха, упомянутая в предыдущей задаче, достигла высоты 3,5 см, то чему равно ее реальное среднее ускорение во время полета вверх («второй этап» из задачи 44).

46. (II) Тело, брошенное вертикально вверх на Земле, взлетает на высоту 23,0 м. Как высоко взлетит такое же тело на Луне, где ускорение свободного падения в шесть раз меньше, чем на Земле? Считайте, что начальная скорость одна и та же.

47. (II) Покажите, что если пренебречь сопротивлением воздуха, то мяч, брошенный вертикально вверх со скоростью v_0, при возвращении в точку старта будет иметь ту же скорость v_0.

48. (II) Камень пролетает мимо окна высотой 2,1 м за 0,30 с. С какой высоты падает камень?

49. (II) С вершины утеса высотой 65 м брошен вертикально вверх камень со скоростью 10,0 м/с. а) Через какое время камень достигнет основания утеса? б) Какова его скорость перед ударом о землю?

50. (II) Мяч брошен вертикально вверх со скоростью 16,0 м/с. Изобразите три параллельных графика - для перемещения, скорости и ускорения в зависимости от времени.

51. (II) Камень брошен вертикально вверх со скоростью 17,5 м/с. а) С какой скоростью он будет двигаться на высоте 12,0 м? б) Сколько времени потребуется ему для достижения этой высоты? в) Почему на вопрос б) имеются два ответа?

52. (III) Игрушечная ракета пролетает мимо окна высотой 2,0 м за 0,15 с. Подоконник окна находится на высоте 10,0 м над землей. Какова стартовая скорость ракеты и как высоко она взлетит?

53. (III) Камень брошен с приморского утеса. Звук от его падения в море слышен через 3,5 с. Если скорость звука 330 м/с, то чему равна высота утеса?

54. (III) Когда пеликаны ныряют за рыбой, они складывают свои крылья и совершают свободное падение в воду. Предположим, что пеликан начинает нырять с высоты 25 м и, падая, не в состоянии изменить траекторию. Если у рыбы есть в запасе 0,15 с, то она может сманеврировать и уклониться от пеликана. Какова высота, на которой рыба должна заметить пеликана, чтобы спастись? Считайте, что рыба находится у поверхности воды.

55. (III) Допустим, что вы включаете воду и пускаете через наконечник садового шланга сильную струю. Вы направляете шланг вертикально, и струя бьет на высоту 1,5 м над землей. Если быстро направить шланг в другую сторону или выключить воду, то звук падающей воды будет слышен еще 2,0 с. С какой скоростью вода выпускается из шланга?

* Раздел 2.9

***56.** (II) Оцените расстояние, пройденное телом, график движения которого приведен на рис. 2.16: а) в течение первой минуты; б) в течение второй минуты.

***57.** (II) Постройте зависимость x от t для тела, скорость которого меняется со временем так, как показано на рис. 2.16.

***58.** (II) Постройте зависимость $v(t) = 25 + 18t$, где v измеряется в м/с, а t - в с, на интервале времени от $t_1 = 1,5$ с до $t_2 = 3,5$ с. Разделите этот интервал времени на десять малых промежутков и для каждого из них оцените $\bar{v}$; вычисляя площадь под кривой, найдите полное перемещение.

***59.** (II) Рассмотрите снова задачу 58, но теперь для определения полного перемещения используйте математический анализ.

***60.** (II) Ускорение частицы дается выражением $a(t) = kt^{3/2}$, где k - постоянная. Найдите зависимость положения частицы от времени t, если $x = 0$ и $v = 0$ при $t = 0$.

* **61.** (II) Ускорение протона с течением времени растет экспоненциально в соответствии с формулой $a = 6{,}4e^{2t}$, где a измеряется в единицах м/с^2, а t – в секундах. Найдите зависимость от времени а) скорости протона и б) его координаты, если движение начинается из положения покоя в начале системы координат при $t = 0$. в) Каково соотношение между $a(t)$ и $v(t)$? г) Каковы координата и скорость протона в момент времени $t = 3{,}6$ с?

* **62.** (III) а) Предположим, что ускорение частицы задано как функция от x. Покажите, что

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\int_{x_1}^{x_2} a(x)\,dx.$$

б) Пусть $a = (2{,}0\ \text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-2})x^2$ и $v_1 = 0$; найдите v_2, после того как частица переместилась из точки $x_1 = 0{,}50$ м в точку с координатой $x_2 = 2{,}20$ м.

* **63.** (III) Сопротивление воздуха, действующее на падающее тело, можно учесть с помощью приближенного выражения для ускорения:

$$a = dv/dt = g - kv,$$

где k – постоянная. а) Выведите формулу для скорости тела в зависимости от времени, предполагая, что движение начинается из состояния покоя ($v = 0$ при $t = 0$). (Указание: замените переменные, положив $u = g - kv$.) б) Найдите выражение для установившейся скорости, которая является максимально достижимой.

* Раздел 2.10

(Задачи для вычислений на программируемом микрокалькуляторе.)

* **64.** (II) В приведенной ниже таблице представлены значения скорости гонщика в зависимости от времени. Оцените а) среднее ускорение (м/с^2) в течение каждого промежутка времени и б) полное пройденное расстояние (м) в зависимости от времени. [*Подсказка:* для определения v на каждом промежутке времени просуммируйте скорости в начале и в конце промежутка и разделите сумму пополам; например, на втором промежутке используйте $\bar{v} = (6{,}0 + 13{,}2)/2 = 9{,}6$.] в) Изобразите эти зависимости.

t, с	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
v, км/ч	0,0	6,0	13,2	22,3	32,2	43,0	53,5	62,6	70,6	78,4	85,1

* **65.** (III) (Для решения этой задачи предпочтительнее воспользоваться программируемым микрокалькулятором.) Ускорение тела (м/с^2), измеренное с интервалом 1,00 с начиная с $t = 0$, имеет следующие значения: 1,25; 1,58; 1,96; 2,40; 2,66; 2,70; 2,74; 2,72; 2,60; 2,30; 2,04; 1,76; 1,41; 1,09; 0,86; 0,51; 0,28; 0,10. Используйте численные методы для оценки а) скорости (считайте, что $v = 0$ при $t = 0$) и б) перемещения при $t = 8{,}00$ с с точностью до 1%. Каковы в) скорость и г) перемещение при $t = 17{,}0$ с?

* **66.** (III) Тело начинает движение из состояния покоя и ускоряется с ускорением (м/с^2), определяемым выражением $a = \sqrt{2 + t^2}$. Проинтегрируйте его численно и определите скорость и ускорение при $t = 3{,}00$ с. Убедитесь, что результат получен с точностью по крайней мере 2%.