# Кинематика в двух и трех измерениях

В гл. 2 мы рассматривали движение частицы вдоль прямой линии; изучим теперь ее движение в двух и трех измерениях. Для этого нам понадобится ввести понятие вектора. После того как мы изучим свойства векторов, рассмотрим движение в общем случае, а затем проанализируем ряд интересных видов движения, в том числе баллистическое и вращательное движение.

## 3.1. Векторы и скаляры

В разд. 2.4 мы отмечали, что понятие *скорости* включает в себя не только быстроту движения тела, но также и направление этого движения. Величины, подобные скорости, которые характеризуются как *направлением*, так и *абсолютным значением*, называются **векторными** величинами. Примерами других векторных величин являются перемещение, сила и импульс. Однако многие величины, такие, как время, температура и энергия, не имеют направления: они характеризуются только абсолютным значением, т. е. полностью определяются своими числовыми значениями (с указанием единиц измерения, если таковые имеются). Такие величины называются **скалярами**.

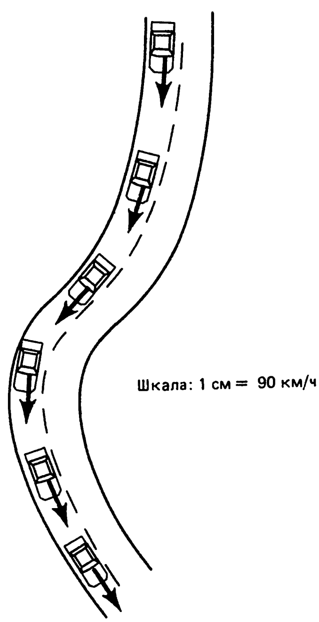



Рис. 3.1. Автомобиль, движущийся по дороге. Стрелки указывают векторы скорости в каждый момент времени.

В физике для изучения конкретной физической ситуации весьма полезно научиться строить соответствующие диаграммы, особенно в тех случаях, когда мы имеем дело с векторными величинами. На диаграмме вектор представляется в виде стрелки. Заостренный конец стрелки указывает направление этого вектора, а ее длина строится пропорциональной абсолютному значению (величине) вектора. Например, на рис. 3.1 изображены стрелки, показывающие скорость автомобиля в различных местах искривленной дороги. Измеряя на этой диаграмме длину соответствующей стрелки и учитывая указанный масштаб (1 см = 90 км/ч), можно определить абсолютное значение скорости автомобиля в любом месте дороги.

Для обозначения векторов мы будем использовать полужирный шрифт[1]. Так, скорость записывается как **v**.

[1] В рукописях вектор обозначается, как правило, буквой со стрелкой наверху, например $\vec{v}$ для скорости.

Если же нас интересует только абсолютное значение (величина), то можно писать либо $|\mathbf{v}|$, либо (что встречается чаще) просто $v$.

## 3.2. Сложение векторов; графические методы

Поскольку векторы характеризуются как направлением, так и величиной, складывать их нужно особым образом. В этой главе мы будем иметь дело в основном с векторами перемещения (которые будем здесь обозначать через $\mathbf{D}$) и с векторами скорости $\mathbf{v}$. Полученные результаты можно применять и для других векторов, которые встретятся нам позже.

Для сложения скалярных величин, таких, как время, пользуются простой арифметикой. Простую арифметику можно применить и для сложения векторов, но только в том случае, если они имеют одинаковые направления. Например, если человек прошел в первый день 8 км на восток, а на следующий день 6 км тоже на восток, то он окажется на расстоянии 8 км + 6 км = 14 км от исходной точки. При этом мы говорим, что суммарное, или результирующее, перемещение равно 14 км. Однако если человек в первый день прошел 8 км на восток, а на второй день 6 км на запад (т.е. в обратном направлении), то через 2 дня он будет находиться на расстоянии 2 км от исходной точки, поэтому его результирующее перемещение равно 2 км на восток. В этом случае результирующее перемещение получается вычитанием: 8 км − 6 км = 2 км.

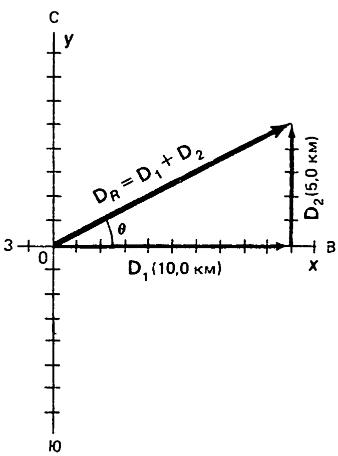



Рис. 3.2. Человек проходит 10,0 км на восток, а затем 5,0 км на север. Эти перемещения представлены соответственно векторами $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, которые показаны стрелками. Показан также результирующий вектор перемещения $\mathbf{D}_R$, равный сумме $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$. Проводя измерения на графике с помощью линейки и транспортира, получаем, что вектор $\mathbf{D}_R$ имеет длину 11,2 км и направлен под углом $\theta = 27°$ к северу от направления на восток.

В случае, когда два вектора не направлены вдоль одной прямой, простой арифметикой уже не обойтись. Пусть, например, человек прошел 10,0 км на восток, а затем 5,0 км на север. Такое движение можно изобразить с помощью графика (рис. 3.2), на котором положительное направление оси $y$ указывает на север, а положительное направление оси $x$ – на восток. На этом графике нарисуем стрелку $\mathbf{D}_1$, которая представляет вектор перемещения на расстояние 10,0 км на восток. Вторая стрелка ($\mathbf{D}_2$) соответствует вектору перемещения на 5 км на север. Оба вектора изображаются в масштабе.

После совершения такой прогулки человек находится на 10,0 км восточнее и на 5,0 км севернее исходной точки. На рисунке результирующее перемещение представлено стрелкой, помеченной $\mathbf{D}_R$. Если воспользоваться масштабной линейкой и транспортиром, то на этой диаграмме можно измерить, что человек будет находиться на расстоянии 11,2 км от исходной точки, причем в северо-восточном направлении, составляющем угол 27° относительно направления на восток. Иными словами, результирующий вектор перемещения имеет величину 11,2 км и составляет с осью $x$ угол ($\theta$), равный 27°. Величину (длину) вектора $\mathbf{D}_R$ можно получить также с помощью теоремы

Пифагора, поскольку $D_1$, $D_2$ и $D_R$ образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой $D_R$. Таким образом, $D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10{,}0\text{ км})^2 + (5{,}0\text{ км})^2} = \sqrt{125\text{ км}^2} = 11{,}2$ км. Разумеется, эту теорему можно применять только в том случае, когда векторы *перпендикулярны* друг другу.

Результирующий вектор перемещения $\mathbf{D}_R$ является суммой векторов $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$. Таким образом, $\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$. Это *векторное* равенство. Важное свойство сложения векторов, не направленных вдоль одной и той же прямой, состоит в том, что величина результирующего вектора не равна сумме величин двух отдельных векторов ($D_R \neq D_1 + D_2$).

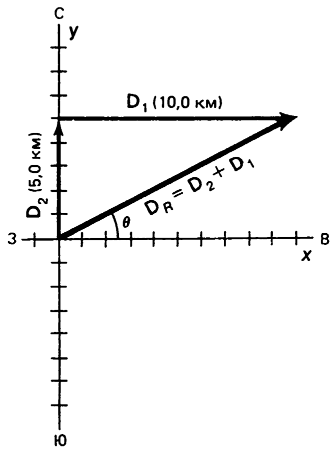



Рис. 3.3. При изменении порядка сложения векторов результирующий вектор не меняется; см. рис. 3.2.

Рис. 3.2 иллюстрирует общие правила сложения двух векторов, т. е. получения их суммы независимо от величины углов между ними. Правила эти следующие: 1) на диаграмме изображается в масштабе один из векторов (назовем его $\mathbf{V}_1$); 2) затем изображается в масштабе второй вектор $\mathbf{V}_2$, причем его начало помещается в конец первого вектора (необходимо убедиться в том, что его направление выбрано правильно); 3) стрелка, проведенная из начала первого вектора в конец второго, представляет *сумму*, или **результирующую**, двух векторов. Длина результирующего вектора может быть измерена и соотнесена с масштабом. Углы можно измерить транспортиром. Этот метод известен как *метод сложения векторов «голова к хвосту»*[1]. По существу, этот метод представляет собой определение того, как складывать векторы.

Заметим, что совсем не важно, в каком порядке складывать векторы. Например, при сложении перемещения на 5,0 км на север с перемещением на 10,0 км на восток получается результирующий вектор длиной 11,2 км, направленный под углом $\theta = 27°$ (рис. 3.3). Такой же результат получился и при сложении в обратном порядке (рис. 3.2). Это означает, что

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \quad [\text{коммутативный закон}]. \qquad (3.1\text{а})$$

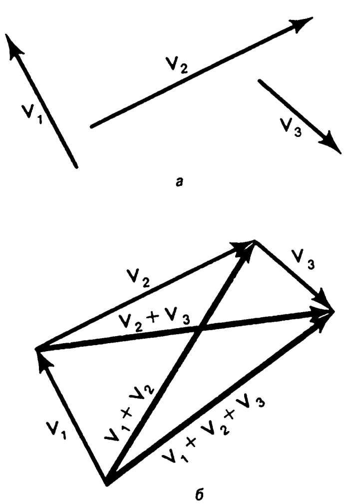



Рис. 3.4. Сложение трех векторов (*а*) в любом порядке даст один и тот же результат $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$. Ясно (*б*), что $\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3$. Проще это можно записать как $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

Метод сложения векторов «голова к хвосту» можно обобщить на случай трех и более векторов (рис. 3.4). Как показано на рисунке,

$$\mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 \quad [\text{ассоциативный закон}]. \qquad (3.1\text{б})$$

В левой части этого уравнения мы сначала складываем $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_3$, а затем прибавляем к этой сумме $\mathbf{V}_1$, что и дает общую сумму. В правой части $\mathbf{V}_1$ прибавляется к $\mathbf{V}_2$ и к этой сумме прибавляют $\mathbf{V}_3$. Видно, что порядок сложения векторов не влияет на результат.

Второй способ сложения двух векторов – *метод парал-*

[1] В отечественной литературе этот метод называют правилом ломаной или правилом многоугольника.– *Прим. ред.*

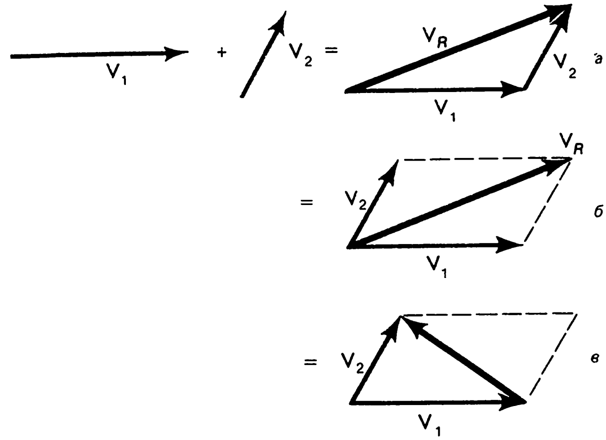



Рис. 3.5. Сложение векторов двумя различными методами. *а* – метод «голова к хвосту»; *б* – метод параллелограма; *в* – неправильное сложение.

*лелограмма.* Он эквивалентен методу «голова к хвосту». При сложении этим методом два вектора изображаются исходящими из одной точки и на них как на смежных сторонах строится параллелограмм. Результирующим вектором является диагональ, проведенная из общей исходной точки. Пример такого метода сложения показан на рис. 3.5, *б*. Из сопоставления с рис. 3.5, *а* ясно, что метод «голова к хвосту» и метод параллелограмма дают один и тот же результат. Самая распространенная ошибка при сложении заключается в том, что суммарный вектор изображается в виде диагонали, соединяющей концы обоих векторов, как показано на рис. 3.5, *в*; это неправильно: такая диагональ не будет суммой векторов (в действительности она представляет собой их разность; см. следующий раздел).

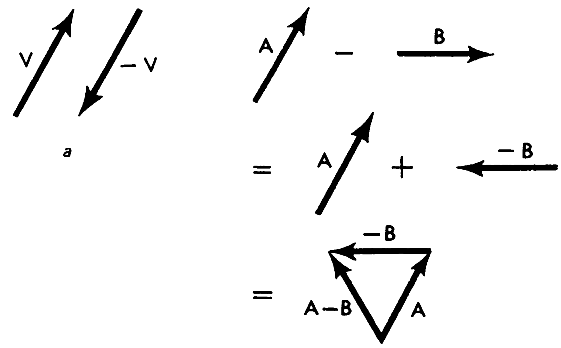
Если рассматривать векторы как математические величины, то их можно сдвигать параллельно самим себе, не меняя их направления и величины. Мы уже воспользовались этим выше при сложении векторов. (В физическом смысле положение вектора может быть очень существенно; например, если нас интересует результирующее движение тела, то вектор, представляющий силу, действующую на тело, должен быть помещен в точку приложения силы.)

Отсюда вытекает следующее определение: два вектора равны между собой, если они имеют одинаковые величины и направления.

## 3.3. Вычитание векторов и умножение вектора на скаляр

Задав вектор **V**, определим *отрицательный вектор* –**V** как вектор, который имеет ту же величину, но направлен противоположно **V** (рис. 3.6, *а*). Используем это для определения операции вычитания одного вектора из другого:

Рис. 3.6. *а* – вектор, отрицательный по отношению к данному, представляет собой вектор той же длины, но противоположного направления; *б* – вычитание векторов: **A** – **B**.




б

разность двух векторов **A** — **B** определяется как

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}),$$

т. е. разность двух векторов равна сумме первого вектора с вектором, отрицательным второму. Таким образом, мы можем теперь применить сложение векторов по методу «голова к хвосту», как показано на рис. 3.6, *б*.

Вектор **V** может быть умножен на скалярную величину $c$. Произведение $c\mathbf{V}$ определяется как такой вектор, который по направлению совпадает с исходным вектором **V**, а его величина равна $cV$. Иными словами, умножение вектора на положительную скалярную величину $c$ меняет его величину в $c$ раз, но не меняет направления. Если же $c$ – отрицательная величина, то абсолютное значение произведения $c\mathbf{V}$ по-прежнему равно $cV$, а направлен этот вектор противоположно вектору **V**.

## 3.4. Аналитический метод сложения векторов; составляющие и проекции

Графический метод сложения векторов с использованием линейки и транспортира не вполне точен и не может быть применен для сложения векторов в трех измерениях. Рассмотрим теперь куда более мощный и точный метод сложения векторов, основанный на разложении векторов на составляющие вдоль произвольно выбранных осей координат.

Рассмотрим вначале вектор **V**, лежащий в плоскости. Его можно представить в виде суммы двух других векторов, называемых **составляющими** (или компонентами) исходного вектора. Обычно выбирают составляющие, направленные перпендикулярно друг другу. Процесс нахождения составляющих называется *разложением вектора на его составляющие*. Пример такого процесса показан на рис. 3.7. Вектор **V** может быть вектором перемещения, направленным под углом $\theta = 30°$ к северу от направления на восток (рис. 3.7, *а*). Здесь мы выбрали ось $x$ направ-

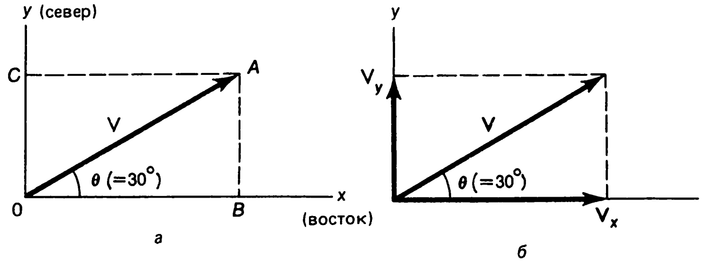



Рис. 3.7. Разложение вектора **V** на составляющие вдоль произвольно выбранных осей координат $x$ и $y$.

ленной на восток, а $y$ – на север. Этот вектор может быть разложен на $x$- и $y$-составляющие, если опустить из конца вектора ($A$) перпендикуляры на оси $x$ и $y$ (прямые $AB$ и $AC$) (рис. 3.7, *б*). Тогда направленные отрезки $OB$ и $OC$ представляют собой соответственно $x$- и *$y$-составляющие вектора* **V**; это *векторные составляющие* $\mathbf{V}_x$ и $\mathbf{V}_y$. Величины векторов $\mathbf{V}_x$ и $\mathbf{V}_y$, а именно $V_x$ и $V_y$, называются *проекциями* вектора **V** на оси координат и выражаются в виде чисел (с соответствующими единицами измерения), положительных или отрицательных в зависимости от того, идут ли они вдоль положительного или отрицательного направления осей $x$ или $y$. Как видно из рис. 3.7, согласно методу параллелограмма мы имеем $\mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y = \mathbf{V}$. Хотя начало вектора на рис. 3.7 находится в начале системы координат, для нахождения составляющих это вовсе не обязательно. При помещении вектора в какое-либо место координатного пространства его составляющие остаются неизменными, до тех пор пока сохраняются неизменными его длина и углы, образуемые с осями координат.

В трех измерениях вектор будет иметь три составляющие. В прямоугольной декартовой системе координат составляющими вектора **V** являются $\mathbf{V}_x$, $\mathbf{V}_y$ и $\mathbf{V}_z$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z.$$

Разложение вектора на составляющие в трех измерениях является всего лишь обобщением рассмотренного выше метода для двух измерений. Ради удобства изучим главным образом случаи, когда векторы лежат в плоскости и имеются только две составляющие.

При различном выборе осей координат составляющие вектора будут разными. Поэтому, задавая составляющие вектора, существенно указать и соответствующую систему координат.

Используя определение тригонометрических функций, из рис. 3.7 можно видеть, что

$$V_x = V\cos\theta, \tag{3.2а}$$
$$V_y = V\sin\theta. \tag{3.2б}$$

Угол θ выбирается (по соглашению) равным углу, который составляет вектор **V** с осью $x$. Из рисунка мы

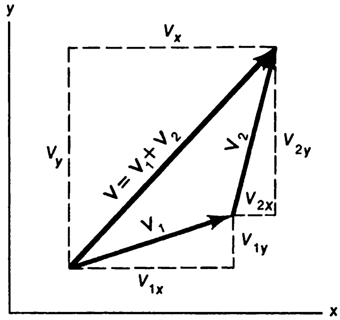



Рис. 3.8. Проекциями вектора $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ являются $V_x = V_{1x} + V_{2x}$ и $V_y = V_{1y} + V_{2y}$.

видим также, что

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \tag{3.3а}$$

$$\operatorname{tg}\theta = V_y/V_x. \tag{3.3б}$$

Таким образом, в любой системе координат вектор можно задать двумя способами. Мы можем задать его величину $V$ и угол $\theta$, который он составляет с осью $x$, или же можно задать его проекции $V_x$ и $V_y$. Используя выражения (3.2) или (3.3), можно перейти от одного способа задания к другому. Заметим, что в двух измерениях для задания вектора необходимо иметь два числа, а в трех измерениях – три числа: либо $V_x$, $V_y$ и $V_z$, либо абсолютное значение $V$ и два угла.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как складывать векторы аналитически с помощью составляющих. Сначала каждый вектор нужно разложить на его проекции. Затем можно показать (рис. 3.8), что сложение двух векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, дающее результирующий вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, означает выполнение следующих операций:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{1x} + V_{2x}, \\ V_y &= V_{1y} + V_{2y}, \\ V_z &= V_{1z} + V_{2z}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Внимательное изучение рис. 3.8 подтвердит правильность этих выражений для $x$- и $y$-проекций; результат для $z$-проекции получается аналогичным образом. Если нас интересуют как величина, так и направление результирующего вектора, то их можно получить с помощью выражений (3.3):

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = V_y/V_x.$$

Разумеется, оси координат мы можем выбирать произвольным образом. Однако удачный выбор осей координат позволяет во многих случаях упростить операцию аналитического сложения векторов. Выбирая, скажем, направление одного из векторов так, чтобы оно совпадало с направлением одной из осей, мы придем к тому, что этот вектор будет иметь только одну составляющую.

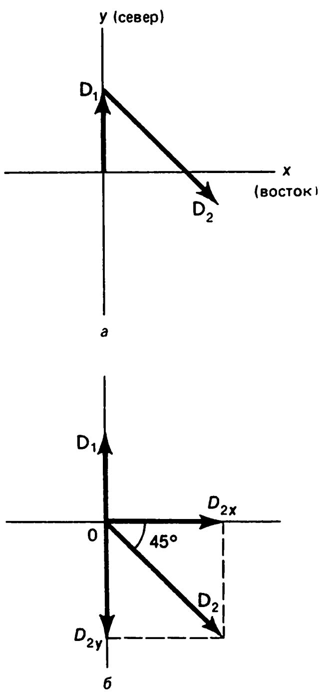



Рис. 3.9. Пример 3.1.

**Пример 3.1.** Исследователь прошел в северном направлении расстояние 22,0 км, а затем на юго-восток (45° к югу от направления на восток) еще 47,0 км (рис. 3.9, *а*). Чему равно его результирующее перемещение из начальной точки?

**Решение.** Выберем положительное направление оси $x$ на восток, а оси $y$ на север. Разложим каждый вектор перемещения на его составляющие (рис. 3.9, *б*). Поскольку величина $\mathbf{D}_1$ равна 22,0 км, а сам вектор направлен на север, у него есть только проекция на ось $y$:

$$D_{1x} = 0, \quad D_{1y} = 22{,}0 \text{ км},$$

в то время как $\mathbf{D}_2$ имеет проекции на оси $x$ и $y$:

$$D_{2x} = (47{,}0 \text{ км}) (\cos 45°) = 33{,}2 \text{ км},$$

$$D_{2y} = -(47{,}0 \text{ км}) (\sin 45°) = -33{,}2 \text{ км};$$

здесь мы учли, что $\sin 45° = \cos 45° = 0{,}707$. Заметим, что $D_{2y}$ является отрицательной, поскольку эта векторная составляющая направлена вдоль отрицательного направления оси $y$. Результирующий вектор $\mathbf{D}$ имеет следующие проекции:

$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0 + 33{,}2 \text{ км} = 33{,}2 \text{ км},$$

$$D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22{,}0 \text{ км} - 33{,}2 \text{ км} = -11{,}2 \text{ км}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{D}$ определен полностью: $D_x = 33{,}2$ км, $D_y = -11{,}2$ км. Этот вектор можно также определить, задав его величину и угол $\theta$:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(33{,}2 \text{ км})^2 + (-11{,}2 \text{ км})^2} = 35{,}0 \text{ км},$$

$$\operatorname{tg} \theta = D_y/D_x = -(11{,}2 \text{ км})/(33{,}2 \text{ км}) = -0{,}337;$$

следовательно, $\theta = 18{,}6°$ к югу от направления на восток.

## 3.5. Единичные векторы

Удобной записью векторных величин является их запись с помощью **единичных векторов** (это векторы, у которых абсолютное значение равно единице, а направления соответствуют направлениям осей выбранной системы координат). В прямоугольной системе координат эти единичные векторы обозначаются $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Они направлены вдоль положительных осей $x$, $y$ и $z$ соответственно, как показано на рис. 3.10. (Как и остальные векторы, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ не обязательно должны помещаться в начало координат, а могут располагаться в любом месте, лишь бы их направления не изменялись.)

В соответствии с определением операции умножения вектора на скаляр (разд. 3.3) составляющие вектора $\mathbf{V}$ можно записать следующим образом: $\mathbf{V}_x = V_x\mathbf{i}$, $\mathbf{V}_y = V_y\mathbf{j}$ и $\mathbf{V}_z = V_z\mathbf{k}$. Следовательно, любой вектор $\mathbf{V}$ можно записать через его составляющие в виде

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}. \tag{3.5}$$

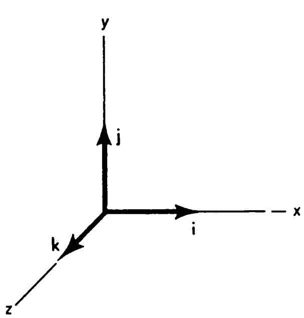



Рис. 3.10. Единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, направленные вдоль осей соответственно $x$, $y$ и $z$.

Единичные векторы очень полезны в процессе аналитического сложения векторов по проекциям. Например, можно убедиться в справедливости выражений (3.4), используя понятие единичного вектора для каждого из входящих в него векторов (мы запишем их для случая двух измерений, однако обобщение на три измерения совершенно очевидно):

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (V_x)\mathbf{i} + (V_y)\mathbf{j} = \\ &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \\ &= (V_{1x}\mathbf{i} + V_{1y}\mathbf{j}) + (V_{2x}\mathbf{i} + V_{2y}\mathbf{j}) = \\ &= (V_{1x} + V_{2x})\mathbf{i} + (V_{1y} + V_{2y})\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Сравнивая первую строку с четвертой, мы получаем соотношения (3.4).

**Пример 3.2.** Представьте векторы из примера 3.1 в записи через единичные векторы и выполните сложение.

**Решение.** В примере 3.1 мы разложили $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ на проекции и нашли, что $D_{1x} = 0$, $D_{1y} = 22{,}0$ (временно мы опускаем единицы измерения) и $D_{2x} = 33{,}2$, $D_{2y} = -33{,}2$. Таким образом,

$$\mathbf{D}_1 = 0\mathbf{i} + 22{,}0\mathbf{j}, \quad \mathbf{D}_2 = 33{,}2\mathbf{i} - 33{,}2\mathbf{j}.$$

Тогда

$$\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = (0 + 33{,}2)\mathbf{i} + (22{,}0 - 33{,}2)\mathbf{j} = 33{,}2\mathbf{i} - 11{,}2\mathbf{j}.$$

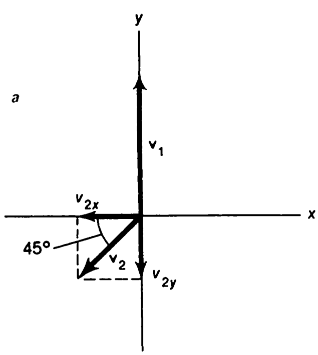
Проекции результирующего вектора перемещения $\mathbf{D}$ равны $D_x = 33{,}2$ км и $D_y = -11{,}2$ км.

## 3.6. Относительная скорость

Если два поезда приближаются навстречу друг другу каждый со скоростью 80 км/ч относительно земли, то скорость одного поезда относительно другого равна 160 км/ч. Иными словами, для наблюдателя в одном из поездов другой поезд будет казаться приближающимся со скоростью 160 км/ч. Аналогично, когда один автомобиль, движущийся со скоростью 90 км/ч, обгоняет другой, у которого скорость равна 75 км/ч, скорость первого автомобиля относительно второго будет равна 90 км/ч − − 75 км/ч = 15 км/ч. Таким образом, мы имеем дело с тем, что называется **относительной скоростью**.

В случае когда скорости направлены вдоль одной прямой, для получения относительной скорости достаточно простого сложения или вычитания. Однако если они не направлены вдоль одной прямой, то приходится прибегать к векторному сложению, что можно показать на следующих примерах. Как уже отмечалось в разд. 2.2, при определении скорости важно знать, какая используется система отсчета.

а




б

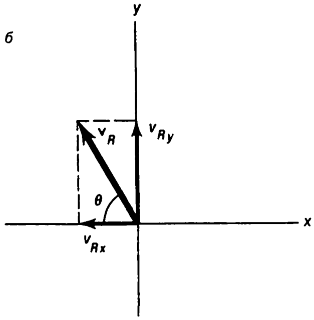



Рис. 3.11. Пример 3.3.

**Пример 3.3.** Самолет, скорость которого относительно воздуха равна 200 км/ч, летит на север. Внезапно начинает дуть северо-восточный ветер со скоростью 100 км/ч относительно земли. Какова будет результирующая скорость самолета относительно земли?

**Решение.** На рис. 3.11, *а* показаны два вектора скорости, разложенные на составляющие (для удобства они изображены исходящими из одной точки); $\mathbf{v}_1$ – это скорость самолета относительно воздуха, а $\mathbf{v}_2$ – скорость ветра относительно земли. Результирующая скорость $\mathbf{v}_R$ есть скорость самолета относительно земли. Поскольку $\mathbf{v}_1$ направлена вдоль оси $y$, она имеет только $y$-составляющую:

$$v_{1x} = 0 \text{ км/ч},$$
$$v_{1y} = v_1 = 200 \text{ км/ч}.$$

Вычислим проекции вектора $\mathbf{v}_2$:

$$v_{2x} = -v_2 \cos 45^\circ = -(100 \text{ км/ч})(0{,}707) = -70{,}7 \text{ км/ч},$$

$$v_{2y} = -v_2 \sin 45^\circ = -(100 \text{ км/ч})(0{,}707) = -70{,}7 \text{ км/ч}.$$

Мы видим, что обе проекции $v_{2x}$ и $v_{2y}$ отрицательны, поскольку их направления соответствуют отрицательным направлениям осей $x$ и $y$. Проекции результирующей скорости равны.

$$v_{Rx} = 0 \text{ км/ч} - 70{,}7 \text{ км/ч} = -70{,}7 \text{ км/ч},$$

$$v_{Ry} = 200 \text{ км/ч} - 70{,}7 \text{ км/ч} = 129{,}3 \text{ км/ч}.$$

Величину результирующей скорости находим с помощью теоремы Пифагора:

$$v_R = \sqrt{v_{Rx}^2 + v_{Ry}^2} = 147 \text{ км/ч}.$$

Чтобы найти угол $\theta$, который $\mathbf{v}_R$ образует с осью $x$ (рис. 3.11, *б*), воспользуемся соотношением

$$\operatorname{tg}\theta = v_{Ry}/v_{Rx} = (129{,}3 \text{ км/ч})/(-70{,}7 \text{ км/ч}) = -1{,}82.$$

(Отрицательный знак указывает лишь на то, что угол $\theta$ отсчитывается от отрицательного направления оси $x$, как показано на рисунке.) Используя тригонометрические таблицы, находим, что $\operatorname{tg} 61^\circ = 1{,}804$, а $\operatorname{tg} 62^\circ = 1{,}881$. Следовательно, искомый угол $\theta$ приблизительно равен $61^\circ$. Микрокалькулятор (с использованием кнопки “arctg”) дает $\theta = -61{,}2^\circ$.

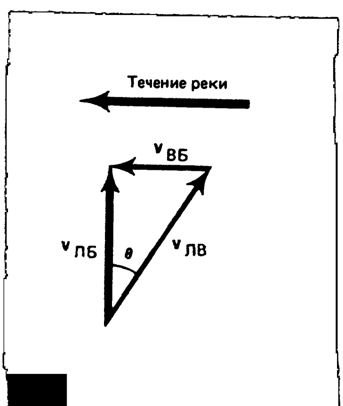



Рис. 3.12. Чтобы двигаться строго поперек реки, лодку необходимо направлять против течения под углом $\theta$.

При определении относительной скорости легко совершить ошибку, прибавляя или вычитая не те скорости, которые требуются. Поэтому полезно применять тщательно согласованные обозначения, что прояснит ситуацию. Каждую скорость помечают двумя индексами: первый относится к движущемуся телу, а второй – к системе отсчета, в которой этот объект имеет данную скорость. Предположим, например, что лодка должна пересечь реку перпендикулярно ее течению, как показано на рис. 3.12. Пусть $\mathbf{v}_{ЛВ}$ – скорость лодки относительно воды. Аналогично пусть $\mathbf{v}_{ЛБ}$ – скорость лодки относительно берега, а $\mathbf{v}_{ВБ}$ – скорость воды относительно берега (т.е. скорость течения реки). Заметим, что $\mathbf{v}_{ЛВ}$ это та скорость, которую создает мотор лодки (относительно воды), в то время как $\mathbf{v}_{ЛБ}$ представляет собой сумму $\mathbf{v}_{ЛВ}$ и скорости течения $\mathbf{v}_{ВБ}$. Следовательно, скорость лодки относительно берега равна

$$\mathbf{v}_{ЛБ} = \mathbf{v}_{ЛВ} + \mathbf{v}_{ВБ}. \tag{3.6а}$$

Записывая нижние индексы в соответствии с приведенным выше соглашением, мы обнаружим, что внутренние индексы в правой части выражения (3.6а) одинаковы (оба «В»), а внешние индексы («Л» и «Б») те же, что и два индекса у вектора суммы слева, $\mathbf{v}_{ЛБ}$. Используя это соглашение, можно получить правильное соотношение, связывающее скорости в различных системах отсчета[1]. Метод, которым было получено соотношение (3.6а), распространяется и на более общий случай. Его можно обобщить на случай трех и более скоростей. Например, если рыбак в

[1] Таким образом, благодаря проверке мы бы узнали (например), что соотношение $\mathbf{v}_{ЛВ} = \mathbf{v}_{ЛБ} + \mathbf{v}_{ВБ}$ ошибочно.

лодке перемещается со скоростью $\mathbf{v}_{\text{РЛ}}$ относительно лодки, то его скорость относительно берега равна $\mathbf{v}_{\text{РБ}} = \mathbf{v}_{\text{РЛ}} + \mathbf{v}_{\text{ЛВ}} + \mathbf{v}_{\text{ВБ}}$. Соотношения, содержащие относительные скорости, будут записаны правильно, если соседние внутренние индексы совпадают, а внешние точно соответствуют двум индексам переменной, находящейся в левой части равенства. Однако такое правило справедливо только для положительных знаков (сложение) в правой части и не действует при отрицательных знаках (в случае вычитания векторов).

Во многих случаях полезно помнить, что для любых двух тел или двух систем отсчета $A$ и $B$ скорость $A$ относительно $B$ имеет ту же величину, что и скорость $B$ относительно $A$; знаки же этих скоростей противоположны:

$$\mathbf{v}_{\text{BA}} = -\mathbf{v}_{\text{AB}}. \tag{3.6б}$$

Например, во время движения поезда в некотором направлении со скоростью 100 км/ч относительно земли предметы на земле (например, деревья) наблюдателю, находящемуся в поезде, кажутся движущимися со скоростью 100 км/ч в противоположном направлении.

**Пример 3.4.** Скорость лодки в спокойной воде $\mathbf{v}_{\text{ЛВ}} = 20{,}0$ км/ч. Если необходимо, чтобы лодка плыла поперек реки, течение которой имеет скорость $\mathbf{v}_{\text{ВБ}} = 12{,}0$ км/ч, то под каким углом упреждения должна двигаться лодка (рис. 3.12)?

**Решение.** Заметим, что на рис. 3.12 скорость $\mathbf{v}_{\text{ЛБ}}$ направлена строго поперек реки, поскольку по условию задачи лодка должна двигаться в этом направлении. Чтобы достичь этого, лодку направляют против течения, так что скорость $\mathbf{v}_{\text{ЛВ}}$ направлена с углом упреждения $\theta$. Из рисунка имеем

$$\sin\theta = \frac{v_{\text{ВБ}}}{v_{\text{ЛВ}}} = \frac{12{,}0\ \text{км/ч}}{20{,}0\ \text{км/ч}} = 0{,}600.$$

Следовательно, $\theta = 36{,}9°$.

**Пример 3.5.** Два автомобиля приближаются к перекрестку под прямым углом друг к другу с одинаковой скоростью 40,0 км/ч (11,1 м/с); см. рис. 3.13, *а*. Чему равна скорость одного автомобиля относительно другого? (Иными словами, найдите скорость автомобиля 1 с точки зрения водителя автомобиля 2.)

**Решение.** На рис. 3.13, *а* эта ситуация изображена в системе отсчета, жестко свя-

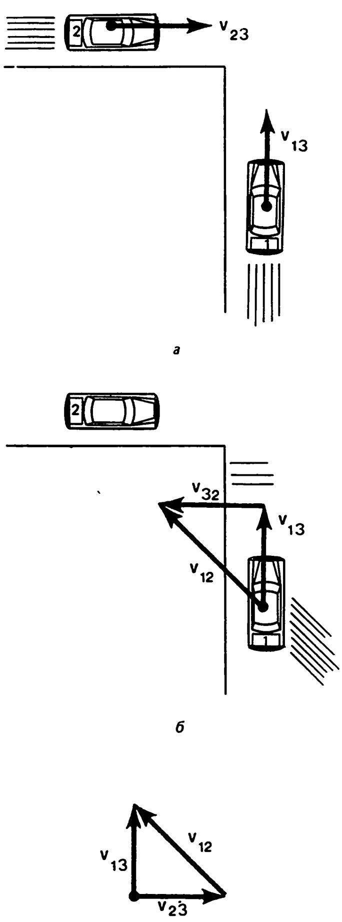



Рис. 3.13. Пример 3.5.

занной с землей. Мы хотим рассмотреть задачу в системе отсчета, в которой автомобиль 2 покоится (рис. 3.13, *б*). В этой системе отсчета (с точки зрения водителя автомобиля 2) земля движется навстречу автомобилю 2 со скоростью $\mathbf{v}_{32}$ (скорость равна 40,0 км/ч), которая равна и противоположна по направлению $\mathbf{v}_{23}$ (скорости автомобиля 2 относительно земли):

$$\mathbf{v}_{23} = -\mathbf{v}_{32}.$$

Таким образом, скорость автомобиля 1 с точки зрения водителя автомобиля 2 будет равна

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{13} + \mathbf{v}_{32},$$

или (поскольку $\mathbf{v}_{32} = -\mathbf{v}_{23}$)

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{23}.$$

Следовательно, скорость автомобиля 1 с точки зрения водителя автомобиля 2 равна разности их скоростей $\mathbf{v}_{13} - \mathbf{v}_{23}$, каждая из которых измеряется относительно земли (рис. 3.13, *в*). Поскольку $|\mathbf{v}_{13}| = |\mathbf{v}_{23}| = |\mathbf{v}_{32}|$, мы видим (рис. 3.13, *б*), что $\mathbf{v}_{12}$ направлена под углом 45° к скорости автомобиля 2. Величина скорости равна

$$v_{12} = \sqrt{(11{,}1\ \text{м/с})^2 + (11{,}1\ \text{м/с})^2} = 15{,}7\ \text{м/с}$$

(56,5 км/ч).

## 3.7. Векторная кинематика

После того как мы ввели векторы, наши определения скорости и ускорения можно формально обобщить на случай движения в двух и трех измерениях.

Предположим, что на плоскости $xy$ частица описывает траекторию, изображенную на рис. 3.14. В момент времени $t_1$ частица находится в точке $P_1$, а в момент времени $t_2$ – в точке $P_2$. Вектор $\mathbf{r}_1$ представляет собой вектор положения (радиус-вектор) частицы в момент времени $t_1$ (он соответствует перемещению частицы из начала системы координат), а $\mathbf{r}_2$ – радиус-вектор частицы в момент времени $t_2$.

В случае одномерного движения мы определили перемещение частицы как *изменение ее положения*. В более общем случае двух или трех измерений используется **вектор перемещения**, который определяется как вектор, описывающий изменение положения частицы. Обозначим его через $\Delta\mathbf{r}$[1], причем

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Это и есть перемещение за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. В записи через единичные векторы мы имеем

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}; \tag{3.7a}$$

здесь $x_1$, $y_1$ и $z_1$ – координаты точки $P_1$ (рис. 3.14). Аналогично

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

---

[1] В начале этой главы для простых случаев в качестве вектора перемещения использовался вектор $\mathbf{D}$. Введение здесь нового обозначения указывает на то, что этот вектор соответствует разности двух радиус-векторов частицы, что позволит более легко рассматривать как малые, так и значительные перемещения.

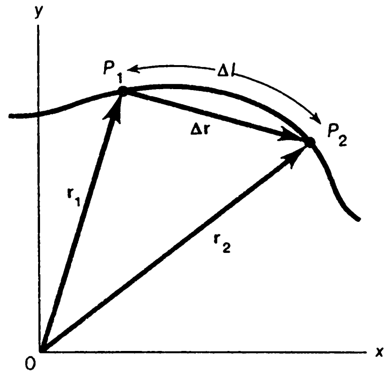



Рис. 3.14. Траектория движения частицы в плоскости $xy$. В момент времени $t_1$ частица находится в точке $P_1$ (ее положение дается вектором $\mathbf{r}_1$), а в момент времени $t_2$ – в точке $P_2$ (ее положение здесь дается вектором $\mathbf{r}_2$). Вектор перемещения за интервал времени $t_2 - t_1$ равен $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Следовательно,

$$\Delta\mathbf{r} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}. \qquad (3.7б)$$

Если движение происходит только вдоль оси $x$, то $y_2 - y_1 = 0$ и $z_2 - z_1 = 0$, а величина перемещения равна $\Delta r = x_2 - x_1$, что совпадает с приведенным выше одномерным соотношением (разд. 2.4). Даже в одном измерении перемещение является вектором, так же как скорость и ускорение.

**Вектор средней скорости** $\bar{\mathbf{v}}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется как

$$\bar{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t. \qquad (3.8)$$

Поскольку $\mathbf{v}$ является произведением вектора $\Delta\mathbf{r}$ на скаляр $1/\Delta t$, направление вектора $\mathbf{v}$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$, а величина скорости равна $\Delta r/\Delta t$.

Будем теперь рассматривать все более короткие интервалы времени, т.е. устремим $\Delta t$ к нулю, так чтобы расстояние между точками $P_2$ и $P_1$ тоже устремилось к нулю. Мы определяем **вектор мгновенной скорости** как предел средней скорости при стремлении $\Delta t$ к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (3.9)$$

В любой момент времени (скажем, в точке $P_1$ на рис. 3.14) скорость $\mathbf{v}$ направлена вдоль касательной к траектории в данной точке (рис. 3.15).

Следует заметить, что средняя скорость на рис. 3.14, определяемая по перемещению $\Delta\mathbf{r}$, не равна средней путевой скорости (т.е. пройденному телом пути $\Delta l$, деленному на $\Delta t$). В некоторых случаях эти средние скорости совпадают (например, при движении по прямой в одном направлении), но в общем случае они различны. Однако в пределе $\Delta t \to 0$ величина $\Delta r$ всегда стремится к $\Delta l$, так что мгновенные скорости для обоих определений скорости в любой момент времени совпадают.

Мгновенная скорость [выражение (3.9)] равна произ-

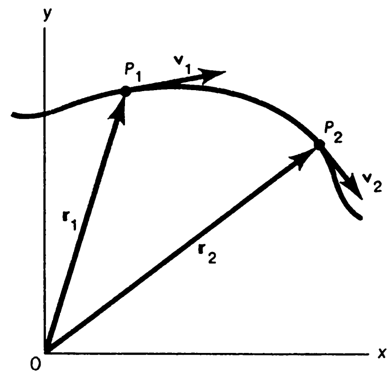



Рис. 3.15. Векторы скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в моменты времени соответственно $t_1$ и $t_2$ для частицы на рис. 3.14.

водной от радиус-вектора по времени. Выражение (3.9) можно записать через проекции вектора[1] [см. также выражение (3.7а)] в виде

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} =$$

$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \qquad (3.10)$$

где $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$ и $v_z = dz/dt$ являются проекциями скорости на оси $x$, $y$ и $z$.

Ускорение в двух или трех измерениях рассматривается аналогичным образом. **Вектор среднего ускорения** $\bar{\mathbf{a}}$ за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется как

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}, \qquad (3.11)$$

где $\Delta\mathbf{v}$ – изменение вектора мгновенной скорости за этот промежуток времени: $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Заметим, что во многих случаях (например, в изображенном на рис. 3.15) $\mathbf{v}_2$ может не совпадать по направлению с $\mathbf{v}_1$; следовательно, $\bar{\mathbf{a}}$ может иметь направление, отличное как от $\mathbf{v}_1$, так и от $\mathbf{v}_2$. Кроме того, скорости $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$ могут иметь одинаковые абсолютные значения и различные направления, и разность двух таких векторов не будет равна нулю. Следовательно, ускорение может возникнуть как за счет изменения величины скорости, так и за счет изменения ее направления (или за счет изменения того и другого).

**Вектор мгновенного ускорения** по определению равен пределу вектора среднего ускорения при стремлении промежутка времени к нулю

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \qquad (3.12)$$

т. е. равен производной от $\mathbf{v}$ по $t$. Используя проекции, мы

---

[1] Заметим, что $d\mathbf{i}/dt = d\mathbf{j}/dt = d\mathbf{k}/dt = 0$, поскольку эти единичные векторы имеют постоянные величины и направления.

имеем

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = $$
$$= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \qquad (3.13)$$

Мгновенное ускорение отлично от нуля не только при изменении величины скорости, но и при изменении ее направления. Например, человек в автомобиле, движущемся с постоянной скоростью по криволинейному пути, будет испытывать ускорение из-за изменения направления скорости, несмотря на то что величина скорости оставалась постоянной (подробнее об этом см. в следующих разделах).

Как правило, мы будем пользоваться терминами «скорость» и «ускорение», имея в виду мгновенные значения. Если нам потребуются средние значения, мы будем явно это указывать.

В гл. 2 мы изучили важный случай одномерного движения с постоянным ускорением. Рассмотрим теперь движение в двух или трех измерениях, при котором как величина, так и направление вектора ускорения **a** не меняются; иными словами, $a_x = \text{const}$, $a_y = \text{const}$, $a_z = \text{const}$. В этом случае среднее ускорение равно мгновенному ускорению в любой момент времени. Полученные в гл. 2 выражения для одномерного движения (2.9) по отдельности применимы для каждой составляющей двух- или трехмерного движения. В двумерном случае запишем начальную скорость в виде $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j}$ и воспользуемся выражениями (3.7а), (3.10) и (3.13) соответственно для радиус-вектора **r**, скорости **v** и ускорения **a**. Тогда для случая двух измерений можно записать следующие формулы:

Движение с постоянным ускорением

| $x$-проекция | $y$-проекция | |
|---|---|---|
| $v_x = v_{x0} + a_x t$ | $v_y = v_{y0} + a_y t$ | (3.14а) |
| $x = x_0 + v_{x0}t + (1/2)a_x t^2$ | $y = y_0 + v_{y0}t + (1/2)a_y t^2$ | (3.14б) |
| $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ | $v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$ | (3.14в) |

Первые две строки из этой таблицы [формулы (3.14а) и (3.14б)] можно записать с помощью векторных обозначений [см. выражения (3.7а), (3.10) и (3.13)]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, \qquad (3.15а)$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + (1/2)\mathbf{a}t^2. \qquad (3.15б)$$

Здесь вектор **r** указывает положение тела в произвольный момент времени, а $\mathbf{r}_0$ – вектор положения при $t = 0$. На практике обычно пользуются записью соотношений для проекций (3.14). В некотором смысле соотношения для проекций являются независимыми, однако они все же взаимосвязаны, так как выражения и для $x$, и для $y$

содержат одну и ту же переменную, а именно время $t$.

Эти выражения и особенности их применения станут понятнее в процессе их использования. В следующем разделе мы рассмотрим некоторые виды движения на плоскости, встречающиеся в повседневной жизни: баллистическое движение и вращательное движение.

## 3.8. Баллистическое движение

**Баллистическое движение** – это движение тела, брошенного под углом к горизонту. Для простоты будем рассматривать движение тел вблизи земной поверхности. Примерами этого являются движение брошенного бейсбольного мяча, полет пули и прыжок спортсмена в высоту. Хотя сопротивление воздуха нередко оказывается существенным, во многих случаях его действием можно пренебречь, что мы и сделаем при последующем анализе. Мы здесь не будем интересоваться самим процессом броска или выстрела, а изучим движение тела после броска, когда оно движется в воздухе свободно под действием силы тяжести. Таким образом, единственное ускорение, которое будет испытывать тело[1],– это ускорение свободного падения $\mathbf{g}$, направленное вниз и имеющее величину $g = 9{,}80$ м/с$^2$.

Первым, кто правильно описал баллистическое движение, был Галилей; он показал, что это движение можно полностью описать, анализируя горизонтальную и вертикальную составляющие движения по отдельности. Это был совсем новый метод; до Галилея никто ничего подобного не делал. (Следует заметить, что это рассмотрение было также идеализированным, поскольку оно не учитывало сопротивления воздуха.)

Предположим, что тело, запущенное в воздух (рис. 3.16) под углом $\theta_0$ к горизонтали, имеет начальную скорость $\mathbf{v}_0$. (Если тело выстреливают в пространство над

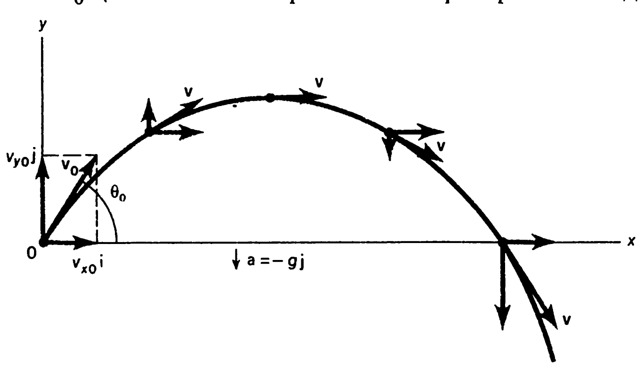



Рис. 3.16. Движение снаряда, вылетевшего из пушки с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ под углом $\theta_0$ к горизонту.

[1] Мы рассмотрим движение тел при броске только на высоту, небольшую по сравнению с радиусом Земли ($R_З \approx 6{,}4 \times 10^6$ м), так что $\mathbf{g}$ можно считать постоянным.

линией горизонта, то угол $\theta_0$ является положительным, а если вниз от линии горизонта, то $\theta_0$ отрицателен.) Выберем систему прямоугольных координат таким образом, чтобы движение происходило в плоскости $xy$, причем ось $y$ выбирается направленной вертикально, так что тело будет испытывать ускорение только вдоль оси $y$. Таким образом,

$$a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

Кроме того, выберем начало системы координат в точке, из которой тело начинает свое движение (например, когда бейсбольный мяч покидает руку бросающего), т.е. мы имеем $x_0 = y_0 = 0$, и положим начальный момент времени $t_0 = 0$. Начальная скорость $\mathbf{v}_0$ имеет следующие проекции:

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 \cos\theta_0, \\ v_{y0} &= v_0 \sin\theta_0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Поскольку $a_x = 0$, горизонтальное движение происходит с постоянной скоростью, и, следовательно, из выражений (3.14а) и (3.14б) имеем

$$v_x = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{[баллистическое движение]}, \tag{3.17}$$

$$x = v_{x0} t \quad \text{[баллистическое движение]}. \tag{3.18}$$

Движение по вертикали будет происходить с ускорением $a_y = -g$, и поэтому из выражений (3.14) следуют

$$v_y = v_{y0} - gt \quad \text{[баллистическое движение]}, \tag{3.19}$$

$$y = v_{y0} t - (1/2) g t^2 \quad \text{[баллистическое движение]}, \tag{3.20}$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gy \quad \text{[баллистическое движение]}. \tag{3.21}$$

Если снаряд вылетел под некоторым углом вверх (рис. 3.16), то ясно, что скорость $v_y$ с течением времени уменьшается и становится равной нулю в наивысшей точке полета; из (3.19) мы видим, что это произойдет в момент времени $t = v_{y0}/g$. В моменты времени, следующие за этим, $v_y$ становится отрицательной и, оставаясь отрицательной, возрастает по величине с течением времени, как видно из рис. 3.16. Заметим, что тело в баллистическом движении может пересечь ось $x$, если исходная точка броска ($x_0 = y_0 = 0$) находилась выше, чем точка приземления.

Интересный частный случай имеет место, когда начальная скорость тела направлена горизонтально, т.е. $\theta_0 = 0$. Примерами этого являются мяч, скатившийся с края стола, и пуля, вылетевшая из ружья, которое держали горизонтально. В этом случае $v_{y0} = 0$, и мы имеем $v_y = -gt$ и $y = -(1/2)gt^2$. Следовательно, движение по вертикали здесь является движением свободно падающего тела. Таким образом, мы видим (и сам Галилей предсказал это на основе своего рассмотрения), что тело, брошенное горизонтально, упадет на землю одновременно с телом, падающим вертикально без начальной скорости.

**Пример 3.6.** Камень бросают в горизонтальном направлении со скалы высотой 115 м. Он падает на землю на расстоянии 92,5 м от ее подножия. С какой скоростью был брошен камень?

**Решение.** Сначала вычислим время, через которое камень упал на землю. Начальная скорость направлена горизонтально, так что вертикальная проекция скорости ($v_{y0}$) равна нулю. В этом случае выражение (3.20) запишется в виде $y = -(1/2)gt^2$, а поскольку $y = -115$ м, из этого выражения получаем

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{230 \text{ м}}{9{,}80 \text{ м/с}^2}} = 4{,}84 \text{ с}.$$

Чтобы вычислить начальную скорость $v_{x0}$, воспользуемся выражением (3.18):

$$v_{x0} = \frac{x}{t} = \frac{92{,}5 \text{ м}}{4{,}84 \text{ с}} = 19{,}1 \text{ м/с}.$$

**Пример 3.7.** По футбольному мячу ударяют таким образом, что он взлетает под углом $\theta_0 = 37°$ со скоростью 20,0 м/с, как показано на рис. 3.16. Вычислите: а) максимальную высоту полета мяча; б) время в полете до падения мяча на землю; в) расстояние от исходной точки до точки падения на землю. Для простоты предположим, что мяч отделяется от ноги футболиста на уровне земли.

**Решение.** Запишем проекции начальной скорости:

$$v_{x0} = v_0 \cos 37{,}0° = (20{,}0 \text{ м/с})(0{,}799) = 16{,}0 \text{ м/с},$$

$$v_{y0} = v_0 \sin 37{,}0° = (20{,}0 \text{ м/с})(0{,}602) = 12{,}0 \text{ м/с}.$$

а) Максимальной высоты мяч достигнет, когда $v_y$ становится равной нулю, а в соответствии с выражением (3.19) это имеет место в момент времени $t = v_{y0}/g = (12{,}0 \text{ м/с})/(9{,}80 \text{ м/с}^2) = 1{,}22$ с. Из выражения (3.20) находим

$$y = v_{y0}t - (1/2)gt^2 = (12{,}0 \text{ м/с})(1{,}22 \text{ с}) - (1/2)(9{,}80 \text{ м/с}^2)(1{,}22 \text{ с})^2 = 7{,}35 \text{ м}.$$

Высоту $y$ можно вычислить также, используя уравнение (3.21):

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12{,}0 \text{ м/с})^2 - (0 \text{ м/с})^2}{2(9{,}80 \text{ м/с}^2)} = 7{,}35 \text{ м}.$$

б) Чтобы найти время, необходимое мячу для возвращения на землю, воспользуемся уравнением (3.20) и положим $y = 0$ (уровень земли):

$$y = v_{y0}t - (1/2)gt^2,$$

$$0 = (12{,}0 \text{ м/с})t - (1/2)(9{,}80 \text{ м/с}^2)t^2,$$

откуда

$$t = \frac{2(12{,}0 \text{ м/с})}{(9{,}80 \text{ м/с}^2)} = 2{,}45 \text{ с}$$

(решение $t = 0$ также удовлетворяет уравнению, однако оно соответствует начальной точке, координата $y$ которой также равна нулю).

в) Полное пройденное расстояние в направлении оси $x$ находим из уравнения (3.18):

$$x = v_{x0}t = (16{,}0 \text{ м/с})(2{,}45 \text{ с}) = 39{,}2 \text{ м}.$$

Траектория брошенного тела, описываемая им в пространстве (при отсутствии сопротивления воздуха), представляет собой параболу. Чтобы показать это, найдем $y$ в зависимости от $x$, исключив время из уравнений (3.18) и (3.20). Из (3.18) имеем $t = x/v_{x0}$, что после подстановки в (3.20) дает

$$y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^2}\right)x^2. \qquad (3.22)$$

Используя здесь выражения (3.16), получаем

$$y = (\mathrm{tg}\,\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2. \qquad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) следует, что $y$ как функция $x$ имеет вид хорошо известного уравнения параболы:

$$y = ax - bx^2,$$

где $a$ и $b$ – постоянные, соответствующие конкретному баллистическому движению.

**Пример 3.8.** а) Вычислите дальность полета снаряда $R$, которая определяется как расстояние, которое снаряд пролетает по горизонтали до возвращения на исходную высоту $y = 0$ (как правило, на поверхность земли). б) Предположим, что одна из пушек времен Наполеона имела дульную скорость $v_0 = 60{,}0$ м/с. Под каким углом нужно было нацелить эту пушку, чтобы поразить мишень на расстоянии 320 м (без учета сопротивления воздуха)?

**Решение.** а) Чтобы найти общее выражение для $R$, положим в уравнении (3.20) $y = 0$ и решим его относительно $t$. Это даст нам два решения: $t = 0$ и $t = 2v_{y0}/g$. Первое соответствует начальному моменту времени снаряда, а второе $(t = 2v_{y0}/g)$ – моменту времени, когда снаряд вернется на высоту $y = 0$. Подставляя полученное значение $t$ в уравнение (3.18), получаем дальность

$$R = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}.$$

Здесь мы воспользовались тригонометрическим тождеством $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$. Видно, что при данной начальной скорости наибольшая дальность стрельбы достигается, когда синус принимает свое максимальное значение, а именно 1,0; это имеет место при $2\theta_0 = 90°$. Следовательно, наибольшая дальность стрельбы реализуется при $\theta_0 = 45°$. (Если учитывать сопротивление воздуха, то при том же значении $v_0$ дальность стрельбы окажется меньше, а наибольшая дальность достигается при угле, меньшем 45°.) Заметим, что максимальная дальность увеличивается пропорционально квадрату скорости $v_0$; следовательно, увеличивая дульную скорость пушки, скажем, в два раза, мы получим в четыре раза большую максимальную дальность.

б) Из полученного в п. «а» выражения следует, что

$$\sin 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{(320\ \text{м})\,(9{,}80\ \text{м/с}^2)}{(60{,}0\ \text{м/с})^2} = 0{,}871.$$

Таким образом, $2\theta_0 = 60{,}6°$ или $180° - 60{,}6° = 119{,}4°$, откуда

$$\theta_0 = 30{,}3° \text{ или } 59{,}7°.$$

При выстреле под любым из этих углов мы получим одну и ту же дальность стрельбы.

Во многих случаях интерес представляет расстояние, пролетаемое телом по горизонтали, когда полет не кончается на высоте $y = 0$. В некоторых случаях $y$ может быть больше нуля (например, при стрельбе из лука по цели, находящейся на дереве). Иногда $y$ может быть и меньше нуля, например когда с самолета сбрасывают продовольствие жертвам наводнения. (Заметим, что угол $\theta_0$ является отрицательным, если тело бросают в направлении ниже линии горизонта.) В этом случае выражения, полученные в примере (3.8), применять нельзя, а необходимо вернуться к исходным уравнениям и использовать соответствующие значения $y$ и других переменных.

## 3.9. Равномерное вращательное движение

При движении тела по окружности с постоянной по величине скоростью $v$ говорят, что оно совершает **равномерное вращательное движение**. Примерами этого являются движение шарика, раскручиваемого на веревке вокруг головы, и почти равномерное вращение Луны вокруг Земли. Хотя при таком движении величина скорости остается постоянной, направление ее непрерывно изменяется (рис. 3.17). Поскольку ускорение определяется как быстрота изменения скорости, изменение направления скорости дает вклад в ускорение точно так же, как и изменение величины скорости. Таким образом, тело, совершающее равномерное вращательное движение, ускоряется. Теперь изучим это ускорение количественно.

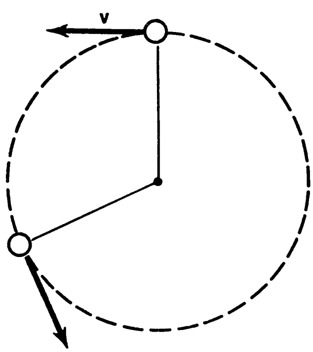



Рис. 3.17. Изменение скорости частицы, движущейся по окружности. Заметьте, что в любой момент времени мгновенная скорость направлена по касательной к круговой траектории.

Ускорение определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

где $\Delta\mathbf{v}$ – изменение скорости за малый промежуток времени $\Delta t$. Нас интересует в конечном счете ситуация, когда $\Delta t$ стремится к нулю, т. е. когда мы имеем дело с мгновенным ускорением. Но для ясности рисунка рассмотрим промежуток времени, отличный от нуля (рис. 3.18). За время $\Delta t$ тело на рис. 3.18, *а* переместится из точки $A$ в точку $B$, пройдя небольшое расстояние $\Delta l$, которое стягивается малым углом $\Delta\theta$. Изменение вектора скорости равно $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \Delta\mathbf{v}$. Если перенести $\mathbf{v}_0$ в правую часть этого равенства, то мы получим $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}$. Таким образом, $\Delta\mathbf{v}$ складывается с $\mathbf{v}_0$, что в сумме дает $\mathbf{v}$. Поэтому на рис. 3.18, *б* $\Delta\mathbf{v}$ – это вектор, показанный штриховой линией. Из этой диаграммы видно, что если $\Delta t$ очень мало (стремится к нулю) и, следовательно, $\Delta l$ и $\Delta\theta$ также очень малы, то вектор $\mathbf{v}$ будет почти параллелен $\mathbf{v}_0$, а $\Delta\mathbf{v}$ почти перпендикулярен им, т. е. вектор $\Delta\mathbf{v}$ направлен к центру окружности. Поскольку по определению ускорение $\mathbf{a}$ сов-

Рис. 3.18. Определение изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$ частицы, движущейся по окружности.

падает по направлению с $\Delta \mathbf{v}$, оно тоже направлено к центру окружности. Поэтому это ускорение называют **центростремительным ускорением**; мы будем его обозначать как $\mathbf{a}_c$.

Теперь, когда мы определили направление ускорения, найдем величину центростремительного ускорения $a_c$. На рис. 3.18, *б* векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ и $\Delta \mathbf{v}$ образуют треугольник, который подобен треугольнику $ABC$ на рис. 3.18, *а*. Это следует из того факта, что угол между $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}$ равен $\Delta\theta$ ($\Delta\theta$ – угол, образуемый прямыми $CA$ и $CB$), поскольку $CB$ перпендикулярна $\mathbf{v}$, а $CA$ перпендикулярна $\mathbf{v}_0$. Таким образом, мы можем записать

$$\Delta v/v \approx \Delta l/r,$$

или

$$\Delta v \approx (v/r)\,\Delta l.$$

Если $\Delta t$ стремится к нулю, то последние равенства выполняются точно, поскольку при этом длина дуги $\Delta l$ равна длине хорды $AB$. Чтобы найти величину центростремительного ускорения $a_c$, воспользуемся последним выражением для $\Delta v$. Таким образом, мы имеем

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\,\Delta l}{r\,\Delta t},$$

а поскольку

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

представляет собой скорость тела $v$, получаем

$$a_c = v^2/r. \tag{3.24}$$

Подведем итоги. Мы нашли, что тело, движущееся по окружности радиусом $r$ с постоянной скоростью $v$, обладает ускорением, направленным к центру окружности, величина которого равна $a_c = v^2/r$. Неудивительно, что это ускорение зависит от $v$ и $r$. Чем больше скорость $v$, тем быстрее она меняет свое направление, а чем больше радиус, тем медленнее изменяется направление скорости. Впервые это соотношение было получено во второй половине 17 в. независимо Ньютоном и Гюйгенсом.

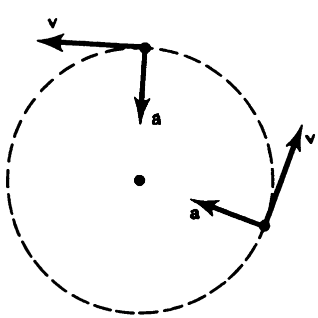


Рис. 3.19. При равномерном вращательном движении вектор ускорения $\mathbf{a}$ всегда перпендикулярен скорости $\mathbf{v}$.

Следует заметить, что для описания различных видов движения не существует какого-либо общего соотношения между направлениями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$. В случае прямолинейного движения (например, когда тела падают по вертикали) $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ направлены параллельно друг другу. В случае же равномерного вращательного движения они перпендикулярны друг другу (рис. 3.19), поскольку скорость $\mathbf{v}$ направлена по касательной к окружности, а ускорение $\mathbf{a}$ направлено к ее центру; при этом направления как $\mathbf{v}$, так и $\mathbf{a}$ непрерывно изменяются. В общем случае баллистического движения (имеющего как вертикальную, так и горизонтальную составляющую) **a** постоянно и по величине, и по направлению (направлено вниз, а величина его равна ускорению свободного падения $g$) и образует со скоростью **v** различные углы по мере прохождения баллистической траектории (рис. 3.16).

При рассмотрении свободного падения и баллистического движения, поскольку в этих случаях **a** постоянно как по величине, так и по направлению, можно пользоваться кинематическими уравнениями для случая движения с постоянным ускорением [уравнения (2.9) или (3.14)]. Однако в случае равномерного вращательного движения их применять *нельзя*, поскольку направление ускорения изменяется.

**Пример 3.9.** Спутник вывели на круговую орбиту на высоте 200 км от поверхности Земли. Ускорение свободного падения на этой высоте составляет всего лишь 9,20 м/с$^2$. Вычислите скорость спутника и период его обращения (время совершения одного оборота).

**Решение.** Радиус Земли равен приблизительно 6400 км. Следовательно, радиус орбиты спутника равен (6400 км + + 200 км) = 6600 км = $6{,}6 \cdot 10^6$ м. Спутник имеет центростремительное (в направлении к центру Земли) ускорение $a_c = 9{,}20$ м/с$^2$. (Если бы у спутника не было этого ускорения, то он улетел бы по прямой, касательной к траектории движения.) Следовательно, из выражения (3.24) при $a_c = 9{,}20$ м/с$^2$ получаем

$$v = \sqrt{ra_c} = \sqrt{(6{,}6 \cdot 10^6\ \text{м})\,(9{,}20\ \text{м/с}^2)} = 7{,}8 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Поскольку скорость $v$ равна расстоянию, деленному на время, то время $T$, за которое спутник совершает один оборот (расстояние равно $2\pi r$), равно

$$T = 2\pi r/v = (6{,}28)\,(6{,}6 \cdot 10^6\ \text{м})/(7{,}8 \cdot 10^3\ \text{м/с}) = 5{,}3 \cdot 10^3\ \text{с},$$

или 88 мин.

**Пример 3.10.** Луна обращается вокруг Земли почти по круговой орбите. Радиус орбиты приблизительно равен 385 000 км, а период обращения 27,3 сут. Найдите величину ускорения $a_c$ Луны при движении вокруг Земли.

**Решение.** Скорость движения Луны по орбите вокруг Земли

$$v = 2\pi r/T = \frac{(6{,}28)\,(3{,}85 \cdot 10^8\ \text{м})}{(27{,}3\ \text{сут})\,(24{,}0\ \text{ч/сут})\,(3600\ \text{с/ч})} = 1{,}02 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Следовательно,

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}02 \cdot 10^3\ \text{м/с})^2}{(3{,}85 \cdot 10^8\ \text{м})} = 2{,}73 \cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2$$

или $a_c \approx 2{,}78 \cdot 10^{-4} g$, где $g = 9{,}80$ м/с$^2$ – ускорение свободного падения на поверхности Земли[1].

[1] Заметим, что ускорение $a \approx 2{,}78 \cdot 10^{-4} g$ *не* является ускорением свободного падения тел на Луне, обусловленным силой тяжести Луны. На самом деле это ускорение вызвано действием силы тяжести Земли на любое тело (в том числе и такое, как Луна), находящееся на расстоянии 385 000 км от Земли.

## 3.10. Неравномерное вращательное движение

Если скорость частицы, вращающейся по окружности, изменяется по величине, то наряду с центростремительным ускорением $\mathbf{a}_c$ будет иметь место и тангенциальное ускорение $\mathbf{a}_t$. Тангенциальное ускорение возникает из-за изменения величины вектора скорости:

$$a_t = dv/dt. \tag{3.25}$$

Центростремительное же ускорение обусловлено изменением направления скорости (что мы уже показали), и его величина равна

$$a_c = v^2/r.$$

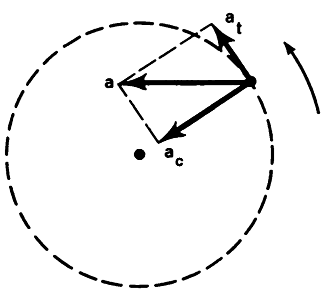



Рис. 3.20. При неравномерном вращательном движении ускорение имеет как тангенциальную ($\mathbf{a}_t$), так и центростремительную ($\mathbf{a}_c$) составляющую.

Тангенциальное ускорение всегда направлено по касательной к окружности, и, если скорость увеличивается, его направление совпадает с направлением движения (параллельно $\mathbf{v}$), как показано на рис. 3.20 для тела, движущегося против часовой стрелки. Если же скорость уменьшается, то направление $\mathbf{a}_t$ противоположно вектору скорости $\mathbf{v}$. В любом случае $\mathbf{a}_t$ и $\mathbf{a}_c$ всегда перпендикулярны друг другу, а их направления непрерывно меняются по мере движения тела по круговой траектории. Вектор полного ускорения $\mathbf{a}$ является суммой этих двух ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c. \tag{3.26}$$

Поскольку $\mathbf{a}_c$ и $\mathbf{a}_t$ всегда перпендикулярны друг другу, величина ускорения $\mathbf{a}$ в любой момент времени равна

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}.$$

Во многих случаях при описании вращательного движения удобно использовать полярные координаты $r$ и $\theta$; краткое рассмотрение этого дается в приложении В.

### Заключение

Величина, характеризующаяся числовым значением и направлением, называется *вектором*. Величина, которая имеет лишь числовое значение, называется *скаляром*.

Векторы можно складывать графически, помещая начало каждого последующего вектора (графически изображается стрелкой) в конец предыдущего. Суммарный (или результирующий) вектор изображается стрелкой, проведенной из начала первого вектора суммы в конец последнего. Два вектора можно также складывать, пользуясь методом параллелограмма. Более точное сложение векторов осуществляется с помощью аналитических методов сложения их *составляющих* вдоль выбранных осей координат с использованием тригонометрических функций. Во многих случаях полезно представлять вектор через его составляющие вдоль выбранных осей, используя *единичные векторы.* Они представляют собой векторы единичной длины, направленные вдоль выбранных осей координат. В прямоугольной декартовой системе координат единичные векторы по осям $x$, $y$ и $z$ обозначаются соответственно $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Скорость тела относительно некоторой системы отсчета можно определить путем векторного сложения его скорости в другой системе отсчета со скоростью этой второй системы отсчета относительно первой.

Мгновенная *скорость* $\mathbf{v}$ и мгновенное *ускорение* $\mathbf{a}$ частицы (в одном, двух и трех измерениях) определяются следующими общими выражениями:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ и } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы. Уравнения кинематики для равноускоренного движения можно записать для каждой из $x$-, $y$- и $z$-составляющих этого движения. Они имеют тот же вид, что и в случае одномерного движения [уравнения (2.9) заменяются уравнениями (3.14)]. Кроме того, их можно записать в более общей векторной форме [уравнения (3.15)].

*Баллистическое движение* (движение тела над поверхностью Земли), если пренебречь сопротивлением воздуха, можно рассматривать как два отдельных движения: движение по горизонтали с постоянной скоростью и движение по вертикали с постоянным ускорением $g$ (т.е. движение тела, падающего вертикально вниз), но только в том случае, когда движение происходит не очень высоко над поверхностью Земли.

Движение тела по окружности радиусом $r$ с постоянной скоростью $v$ называется *равномерным вращательным движением*. Это движение характеризуется *центростремительным ускорением* $a_c$, направленным к центру окружности и имеющим величину

$$a_c = v^2/r.$$

Если величина скорости такого движения изменяется, то в этом случае мы имеем как центростремительное, так и тангенциальное ускорение.

## Вопросы

1. Один автомобиль едет на восток со скоростью 40 км/ч, а другой – на север со скоростью 40 км/ч. Одинаковы ли их скорости? Объясните.
2. Можно ли сделать вывод о том, что автомобиль не ускоряется, если его спидометр постоянно показывает 60 км/ч?
3. Можете ли вы привести несколько примеров движения тела, при котором оно проходит большое расстояние, а перемещение его равно нулю?
4. Может ли вектор перемещения частицы, движущейся в двух измерениях, быть длиннее, чем путь, пройденный частицей за тот же промежуток времени? Может ли он быть короче? Объясните.
5. На тренировке игрок в бейсбол бросает мяч очень высоко, а затем бежит по прямой и ловит его. Чье перемещение больше, игрока или мяча?
6. Если $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, будет ли $V$ обязательно больше, чем $V_1$ и $V_2$? Объясните.
7. Один из двух векторов имеет длину $V_1 = 3{,}5$ км, а другой – длину $V_2 = 4{,}0$ км. Опре-

делите максимальную и минимальную величины их векторной суммы.

8. Могут ли два вектора с неодинаковыми длинами при сложении дать нулевой вектор? Может ли это произойти в случае *трех* неодинаковых по длине векторов?

9. Может ли величина вектора а) быть равна или б) быть меньше, чем одна из его составляющих?

10. Может ли частица, движущаяся с постоянной скоростью, вычисляемой по пути, ускоряться? А будет ли она ускоряться при движении с постоянной скоростью, но определяемой по перемещению?

11. Может ли вектор с равной нулю величиной иметь составляющую, не равную нулю?

12. Каковы единицы измерения единичных векторов?

13. Что измеряет одометр (путемер) автомобиля – скалярную или векторную величину? Что измеряет спидометр?

14. Два автомобиля с одинаковыми скоростями приближаются к перекрестку под прямым углом друг к другу. Обязательно ли они столкнутся? Покажите, что если относительная скорость сближения автомобилей и относительное перемещение совпадают по направлению (т. е. коллинеарны), то мы получим подтверждение морской поговорки: «Постоянный пеленг ведет к столкновению».

15. Человек, сидящий в закрытом вагоне поезда, идущего с постоянной скоростью, подбрасывает мяч прямо вверх (в своей системе отсчета). а) В каком месте упадет мяч? Дайте ответ в случае, когда б) вагон ускоряется; в) тормозится; г) выполняет поворот; д) движется с постоянной скоростью, но испытывает сопротивление воздуха.

16. Два гребца, которые могут грести с одинаковой скоростью, начали движение через реку одновременно. Один направился прямо к противоположному берегу и был снесен течением на некоторое расстояние. Другой направился через реку вверх по течению под некоторым углом и оказался на противоположном берегу точно напротив места старта. Какой из гребцов достиг противоположного берега первым?

17. Ребенок хочет узнать, с какой скоростью из его рогатки вылетает камень. Как это сделать, пользуясь только метровой линейкой?

18. Всегда ли необходимо рассматривать баллистическое движение в трех измерениях, если сопротивлением воздуха можно пренебречь? А если сопротивлением воздуха пренебречь нельзя? Обсудите.

19. Какие факторы должен учитывать спортсмен при выполнении прыжка в длину? А прыгун в высоту?

20. В какой точке своей траектории снаряд имеет наименьшую скорость?

21. Автомобиль выполняет поворот с постоянной скоростью 50 км/ч. Будет ли отличаться его ускорение, если тот же поворот будет выполняться с постоянной скоростью 70 км/ч? Объясните.

22. Изменится ли ускорение автомобиля, если он выполняет крутой поворот со скоростью 60 км/ч, по сравнению с его ускорением на плавном повороте, который он выполняет с той же скоростью? Объясните.

## Задачи

### Разделы 3.1–3.5

1. (I) Определите графически результирующий вектор трех перемещений, первое из которых имеет величину 10 м и направлено под углом 30° к северу от направления на восток, второе – величину 6 м и угол 37° к востоку от направления на север и третье – длину 12 м и угол 30° к западу от направления на юг.

2. (I) Три вектора, показанные на рис. 3.4, можно сложить шестью различными способами. Покажите графически, что независимо от способа сложения получается один и тот же результирующий вектор.

3. (I) Покажите, что вектор, представленный на рис. 3.5, *в* как «ошибочный», в действительности является разностью двух векторов. Будет ли это разность $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ или $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$?

4. (I) При сложении двух векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ мы имеем результирующий вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$. Каковы векторы $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, если а) $V = V_1 + V_2$; б) $V^2 = V_1^2 + V_2^2$; в) $V_1 + V_2 = V_1 - V_2$?

5. (I) Если $\mathbf{V} = 3{,}0\mathbf{i} - 4{,}0\mathbf{j}$, то какова должна быть скалярная величина $c$, на которую нужно умножить $\mathbf{V}$, чтобы получить $|c\mathbf{V}| = 7{,}5$?

6. (I) Если $\mathbf{V} = -2{,}5\mathbf{i} + 6{,}0\mathbf{j}$, то чему будет равна величина вектора $c\mathbf{V}$ для $c = 3{,}0$?

7. (I) Самолет летит со скоростью 1000 км/ч под углом 32,5° к западу от направления на север. а) Найдите составляющие вектора скорости в направлениях на север и запад. б) На какое расстояние на север и как далеко на запад переместится самолет за 3,00 ч?

8. (II) а) Вычислите величину и направление суммы трех следующих векторов: $\mathbf{V}_1 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{V}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{V}_3 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. б) Найдите $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$.

9. (II) Составляющие любого вектора $\mathbf{V}$ часто записывают как $(V_x, V_y, V_z)$. Найдите составляющие и длину вектора, который представляет

собой сумму векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ с составляющими (6, 0, 2) и (1, 4, 3).

**10.** (II) Мы имеем два вектора $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, определенные в задаче 9. Найдите третий вектор $\mathbf{V}_3$, такой, что а) $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$; б) $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = 0$.

**11.** (II) Посыльный проходит 30 м на север, 25 м на восток, 12 м на юг, а затем в здании поднимается на лифте на высоту 36 м. Чему равно его окончательное перемещение из точки старта?

**12.** (II) Определите $y$-составляющую вектора в плоскости $xy$, величина которого равна 36,5, а $x$-составляющая равна 25,4. Каково направление вектора?

**13.** (II) Пусть $\mathbf{V}_1 = 6{,}0\mathbf{i} + 3{,}0\mathbf{j}$ и $\mathbf{V}_2 = -2{,}5\mathbf{i} + 4{,}0\mathbf{j}$. Найдите величину и направление векторов а) $\mathbf{V}_1$; б) $\mathbf{V}_2$; в) $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$; г) $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$.

**14.** (II) Согласно карте, вершина горы высотой 2150 м находится на расстоянии 4750 м от лагеря в направлении 28,2° к западу от направления на север. Запишите выражение для вектора перемещения от лагеря к вершине через единичные векторы. Какова его длина? Пусть ось $x$ направлена на восток, ось $y$ – на север и ось $z$ – вверх.

Раздел 3.6

**15.** (I) Путешественник, прогуливаясь со скоростью 4,20 км/ч по палубе корабля, скорость которого относительно берега равна 9,60 км/ч, пересекает палубу поперек. Чему равна скорость путешественника относительно берега?

**16.** (I) Самолет движется на север со скоростью 425 км/ч. С юго-запада начинает дуть ветер со (средней) скоростью 55 км/ч. Вычислите а) скорость (величину и направление) самолета; б) расстояние, на которое он отклонится от курса через 15 мин.

**17.** (II) При взгляде из окна движущегося поезда капли дождя кажутся падающими косо под углом $\theta$ к вертикали. Если скорость поезда $v_{\text{T}}$, то чему равна скорость дождевых капель в системе отсчета, связанной с землей (в ней они считаются падающими вертикально).

**18.** (II). Скорость лодки в стоячей воде равна 2,60 м/с. а) Лодка движется перпендикулярно потоку, имеющему скорость 0,90 м/с; вычислите величину и направление скорости лодки относительно берега. б) Найдите координаты лодки относительно точки старта через 4,0 с после начала движения.

**19.** (II) В примере 3.4 определите скорость лодки относительно берега.

**20.** (II) Чтобы пересекать поток перпендикулярно течению, моторная лодка, имеющая в стоячей воде скорость 8,6 км/ч, должна направляться под углом 65° против течения. а) Какова скорость течения? б) Чему равна результирующая скорость лодки относительно берега?

**21.** (II) В стоячей воде пловчиха может развивать скорость 1,65 м/с. а) Если она переплывает поперек реку шириной 180 м, скорость течения которой 0,85 м/с, то на каком расстоянии вниз по течению (от точки, противоположной точке старта) она окажется? б) Сколько времени уйдет у нее на то, чтобы достичь противоположного берега?

**22.** (II) С каким углом упреждения должна плыть пловчиха из предыдущей задачи, если ей нужно приплыть в точку, расположенную прямо напротив места старта?

**23.** (II) Вертолет, имеющий скорость относительно воздуха 45 км/ч, летит на юг. Однако пилот заметил, что за предыдущие 50 мин вертолет пролетел 25 км на юго-запад. Какова величина скорости ветра и ее направление?

**24.** (II) Два автомобиля приближаются к перекрестку под прямым углом друг к другу. Автомобиль 1 движется со скоростью 35 км/ч, а автомобиль 2 – со скоростью 55 км/ч. Чему равна относительная скорость автомобиля 1 относительно автомобиля 2? А скорость автомобиля 2 относительно автомобиля 1?

**25.** (III) Предполагается, что самолет, имеющий скорость 550 км/ч, должен лететь по прямой под углом 33,0° к северу от направления на восток. Однако с севера дует постоянный ветер со скоростью 120 км/ч. В каком направлении должен лететь самолет?

**26.** (III) Скорость лодки в стоячей воде равна $v$. Лодка должна проплыть туда и обратно по реке со скоростью течения $u$. Получите выражение для времени, за которое лодка совершает такое плавание общей длиной $D$, если лодка плывет а) сначала против течения, а затем по течению; б) сначала поперек реки, а затем назад. Необходимо предположить, что $u < v$; почему?

**27.** (III) В разгаре погони сыщик должен пересечь реку шириной 2,0 км за минимальное время. Скорость течения реки равна 2,5 км/ч. Сыщик может грести на лодке со скоростью 4,0 км/ч, а бежать он может со скоростью 7,0 км/ч. Опишите путь, который ему лучше избрать (гребля плюс бег вдоль берега), чтобы время переправы через реку было минимальным, и вычислите это минимальное время.

Раздел 3.7

**28.** (I) Положение данной частицы как функция времени задается выражением $\mathbf{r} = 3{,}10t\mathbf{i} + 6{,}05\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$. Найдите, как будут зависеть от времени скорость и ускорение частицы.

29. (II) Какую форму имеет траектория частицы из задачи 28?

30. (II) Найдите среднюю скорость частицы из задачи 28 в промежутке времени 1,00–3,00 с. Какова ее мгновенная скорость при $t = 2{,}00$ с?

31. (II) В некоторый момент времени автомобиль имел скорость 20,0 м/с в направлении на север, а спустя 9,00 с его скорость оказалась равной 34,6 м/с и направленной на восток. Найдите на этом интервале времени а) среднюю по перемещению скорость автомобиля; б) среднее его ускорение по перемещению (величину и направление скорости и ускорения); в) среднюю его скорость, определяемую по пути. (*Подсказка:* можно ли определить все эти величины на основании данной информации?)

32. (II) а) Лыжник движется по склону холма, имеющего уклон 30°, с ускорением 2,30 м/с$^2$. Найдите вертикальную составляющую его ускорения. б) За какое время лыжник достигнет основания холма, если перепад высот равен 180 м (считайте, что он начинает движение из состояния покоя и ускоряется равномерно)?

33. (III) Положение частицы изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = 6{,}0 \cos 3{,}0t\mathbf{i} + 6{,}0 \sin 3{,}0t\mathbf{j}$, причем $r$ измеряется в метрах. Найдите а) вектор скорости $\mathbf{v}$; б) вектор ускорения $\mathbf{a}$. в) Какую траекторию имеет эта частица? (*Подсказка:* вычислите $r = |\mathbf{r}|$.) г) Каково соотношение между величинами $r$ и $a$ (напишите формулу) и между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ (определите угол)? д) Покажите, что $a = v^2/r$.

Раздел 3.8 (Сопротивлением воздуха в следующих задачах пренебрегайте, если не утверждается обратное.)

34. (I) Прыгун в воду, разбегающийся со скоростью 3,2 м/с, прыгает с вершины утеса и достигает поверхности воды через 2,0 с. Какова высота утеса и на каком расстоянии от его подножья прыгун погрузится в воду?

35. (I) Тигр прыгает горизонтально со скоростью 7,0 м/с со скалы высотой 16 м. На каком расстоянии от основания скалы он приземлится?

36. (I) Брандспойт, расположенный на поверхности земли, выбрасывает воду со скоростью 15,0 м/с. Под каким углом нужно направить наконечник брандспойта, чтобы вода падала на землю на расстоянии 18 м? Почему имеются два различных угла?

37. (I) Спортсмен, совершающий прыжок в длину, отрывается от земли под углом 30° и пролетает 8,90 м. Чему равна скорость отрыва?

38. (I) Определите, на сколько длиннее может быть прыжок человека на Луне по сравнению с Землей, если скорость и угол отрыва одинаковы. Ускорение свободного падения на Луне составляет одну шестую земного.

39. (II) Мяч, брошенный горизонтально со скоростью 22,2 м/с с крыши дома, падает на расстоянии 36 м от основания дома. Вычислите высоту этого дома.

40. (II) Покажите, что скорость снаряда, с которой он выстреливается в начальной точке своего пути, равна его скорости в конце пути, при условии что высота начальной и конечной точек одинакова.

41. (II) Из самолета, движущегося со скоростью 150 км/ч, пытаются сбросить продовольствие жертвам наводнения, находящимся на островке на 250 м ниже самолета. За сколько секунд до момента пролета над головами пострадавших должно быть сброшено продовольствие?

42. (II) Охотник целится в мишень, находящуюся на одном с ним уровне и на расстоянии 250 м от него. а) Если пуля вылетает из ружья горизонтально со скоростью 550 м/с, то на каком расстоянии от мишени она пройдет? б) Под каким углом к горизонту должно быть направлено ружье для точного попадания в мишень?

43. (II) Спортсмен толкает ядро (масса ядра 7,3 кг) с начальной скоростью 14,0 м/с под углом 41° к горизонту. Вычислите расстояние, пройденное ядром по горизонтали. Ядро отрывается от руки спортсмена на высоте 2,2 м над землей.

44. (II) Мяч брошен горизонтально с вершины утеса с начальной скоростью $v_0$. В произвольный момент времени направление его движения составляет угол $\theta$ с горизонтом. Выведите формулу зависимости $\theta$ от $t$ до того, как мяч упадет на землю.

45. (II) Покажите, что время, необходимое снаряду для достижения наивысшей точки траектории, равно времени, затрачиваемому на возвращение его на исходную высоту.

46. (II) Прыгун в длину мирового класса способен прыгнуть на 8,0 м. Предположим, что его горизонтальная скорость при отрыве от земли равна 9,0 м/с (скорость спринтера мирового класса несколько выше 10 м/с). Сколько времени прыгун будет находиться в воздухе и на какую высоту он поднимется? Считайте, что он приземляется стоя вертикально, т. е. таким же образом, как он отрывается от земли.

47. (II) Выведите формулу для дальности полета $R$ снаряда, если он падает на высоте $h$ над исходной точкой. (При $h < 0$ он падает на расстоянии $-h$ ниже исходной точки.) Счи-

тайте, что снаряд вылетает под углом $\theta_0$ с начальной скоростью $v_0$.

**48.** (II) При каком угле стрельбы дальность снаряда равна максимальной высоте его полета?

**49.** (II) Замечено, что через 3,0 с после выстрела с земли пуля имеет скорость $\mathbf{v} = (8{,}9\mathbf{i} + 3{,}6\mathbf{j})$ м/с, причем ось $x$ горизонтальна, а ось $y$ направлена вверх. Определите а) дальность полета пули; б) максимальную высоту взлета над землей; в) скорость и направление ее движения перед падением на землю.

**50.** (II) Начальная скорость пули при выстреле в воздух равна 40,0 м/с. Изобразите ее траекторию на миллиметровой бумаге для случаев, когда угол стрельбы $\theta$ равен 15, 30, 45, 60, 75 и 90°. Постройте каждую кривую по крайней мере по 10 точкам.

**51.** (III) Прыгун в воду отрывается от прыжкового трамплина высотой 5,0 м и погружается в воду спустя 1,3 с на расстоянии 3,0 м от края трамплина за ним. Рассматривая прыгуна как частицу, определите а) его начальную скорость $\mathbf{v}_0$; б) максимальную высоту, которую он достигает; в) скорость $\mathbf{v}_f$, с которой он погружается в воду.

**52.** (III) Охотник нацеливает свой лук и стреляет прямо в обезьяну, свешивающуюся с ветки высокого дерева на некотором расстоянии от охотника. В момент, когда начинается полет стрелы, обезьяна падает с ветки, надеясь ускользнуть от стрелы. Покажите аналитически, что обезьяна совершает ошибочный маневр. Сопротивлением воздуха пренебрегите.

**53.** (III) Человек стоит у основания холма, склон которого образует угол $\phi$ с горизонтом. При данной начальной скорости $v_0$ под каким углом $\theta$ (к горизонту) следует бросать предметы, чтобы при падении на склон холма они достигали максимального расстояния?

**54.** (III) Баскетбольный мяч отрывается от руки игрока на высоте 2,1 м над полом. Корзина расположена на высоте 2,6 м над полом. Игрок предпочитает бросать мяч под углом 35°. Если бросок совершается с расстояния по горизонтали 12,0 м и имеет точность $\pm$ 0,22 м (по горизонтали), то каким должен быть разброс начальных скоростей, позволяющий попасть в корзину?

**55.** (III) В момент времени $t = 0$ игрок бросает бейсбольный мяч со скоростью 35 м/с под углом 55° к горизонту. Игрок, принимающий мяч, в момент времени $t = 0$ находится на расстоянии 85 м от бросающего, и, как видно с исходной позиции, линия зрения на игрока, принимающего мяч, составляет с плоскостью, в которой движется мяч, горизонтальный угол 22° (рис. 3.21). Какие скорость и направление движения должен избрать игрок, принимающий мяч, чтобы поймать его на той же высоте, с которой он был брошен? Определите угол относительно линии зрения принимающего мяч игрока на исходную позицию.

**56.** (III) С самолета, летящего со скоростью 180 км/ч на малой высоте 80,0 м, агенты полиции пытаются бросить гранату в автомобиль главаря преступников, движущийся по автостраде со скоростью 135 км/ч. Под каким углом (к горизонту) должен быть виден автомобиль из кабины самолета при сбрасывании гранаты?

Раздел 3.9

**57.** (I) Чему равно центростремительное ускорение ребенка на аттракционе «колесо смеха», если он находится в кабине на расстоянии 8,2 м от центра колеса? Скорость ребенка равна 2,1 м/с.

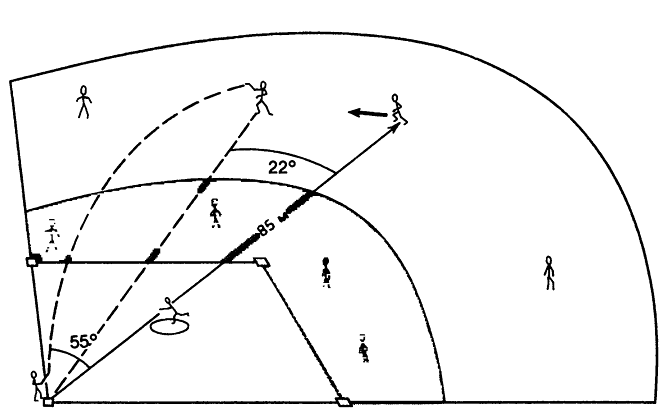



Рис. 3.21.

**58.** (I) Реактивный самолет, движущийся со скоростью 1800 км/ч (500 м/с), выполняет маневр и летит по дуге радиусом 3,0 км. Чему равно ускорение самолета, выраженное через $g$?

**59.** (I) Вычислите центростремительное ускорение Земли при движении ее по орбите вокруг Солнца. Считайте, что орбита Земли – это окружность радиусом $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

**60.** (II) а) Выведите формулу для зависимости радиуса кривизны траектории полета снаряда в наивысшей точке (рис. 3.16) от $\theta_0$ и $v_0$ (т. е. считайте, что вершина дуги полета составляет малую часть окружности). б) Чему равно «центростремительное» ускорение в этой точке?

**61.** (II) Из-за вращения Земли с суточным периодом ускорение свободного падения на экваторе несколько меньше, чем оно было бы, если бы Земля не вращалась. Оцените величину этого эффекта. Какую долю он составляет от величины $g$?

**62.** (II) Чему равна величина ускорения частицы пыли на краю грампластинки диаметром 30 см, вращающейся с частотой $33^1/_3$ об/мин?

Раздел 3.10

**63.** (II) Частица вращается по окружности радиусом 3,60 м. В некоторый момент времени ее ускорение, равное $0{,}210g$, направлено под углом 28,0° к направлению движения. Найдите скорость частицы а) в этот момент; б) спустя 2,00 с, считая, что тангенциальное ускорение постоянно.

**64.** (II) Частица, начинающая движение из состояния покоя, вращается в плоскости $xy$ по часовой стрелке с равномерно увеличивающейся скоростью. Центр окружности находится в начале системы координат $xy$. При $t = 0$ частица имеет координаты $x = 0{,}0$, $y = 2{,}0$ м. При $t = 2{,}0$ с частица находится в точке с координатами $x = 2{,}0$ м, $y = 0{,}0$, а скорость ее равна 14,0 м/с. Вычислите а) вектор средней скорости и б) вектор среднего ускорения за этот промежуток времени.

**65.** (II) В задаче 64 предположите, что тангенциальное ускорение постоянно, и определите составляющие мгновенного ускорения при а) $t = 0{,}0$; б) $t = 1{,}0$ с; в) $t = 2{,}0$ с.