5 Динамика вращательного движения; гравитация и обобщение Ньютона

В разд. 3.9 и 3.10 рассматривалась кинематика движения частицы по окружности. В этой главе с помощью законов Ньютона мы изучим динамику такого движения. Мы обсудим также вопрос о том, как Ньютон пришел к открытию еще одного великого закона, предположив, что Луна и планеты совершают круговое движение. Этот новый закон, называемый законом всемирного тяготения, стал кульминацией ньютоновского рассмотрения физического мира. Действительно, вплоть до начала 20 в. считалось, что физика Вселенной полностью описывается ньютоновскими тремя законами движения и законом всемирного тяготения.

5.1. Динамика движения по окружности

В разд. 3.9 мы показали, что частица, обращающаяся по окружности радиусом r с постоянной скоростью v, испытывает ускорение

$$a_c = v^2/r\,.$$

Ускорение a_c называется центростремительным, так как оно направлено к центру окружности. Таким образом, хотя величина ускорения при равномерном движении по окружности остается постоянной, направление вектора ускорения постоянно меняется. Следовательно, вектор ускорения $\mathbf{a}_c$ должен рассматриваться как переменный. Направление вектора ускорения $\mathbf{a}_c$ при равномерном движении по окружности всегда перпендикулярно направлению скорости $\mathbf{v}$.

Движущееся равномерно по окружности тело, например мячик на конце веревки, испытывает действие силы, удерживающей его на окружности; иными словами, для сообщения телу центростремительного ускорения к телу необходимо приложить силу. Величина этой силы может быть рассчитана с помощью второго закона Ньютона: $F = ma$, в который вместо a нужно подставить центростремительное ускорение $a_c = v^2/r$; при этом полная (или результирующая) сила F запишется в виде

$$F = ma_c = mv^2/r\,.$$

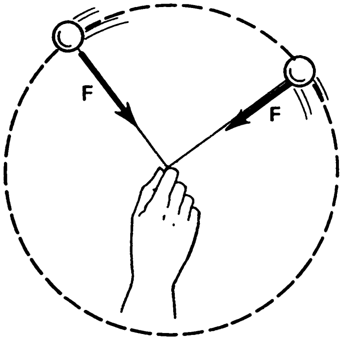


Рис. 5.1. Сила, необходимая для удерживания движущегося тела на окружности. Если скорость движения постоянна, то сила направлена к центру окружности.

Поскольку в любой момент времени ускорение a_c направлено к центру окружности, сила должна быть направлена тоже к центру окружности. Необходимость действия силы интуитивно вполне понятна: если бы на тело не действовала никакая сила, то оно двигалось бы не по окружности, а по прямой – в соответствии с первым законом Ньютона. Для того чтобы отклонить тело от его «естественного» прямолинейного движения «по инерции», необходима сила, действующая под углом к направлению движения. При движении по окружности эта сила должна быть направлена к центру окружности (рис. 5.1). Такую силу иногда называют центростремительной, но следует подчеркнуть, что это название не означает новой разновидности силы. Оно указывает лишь на то, что сила направлена к центру окружности. Сила должна быть приложена со стороны какого-либо тела. Например, когда человек вращает шарик на веревке по окружности, он (через веревку) прикладывает к шарику силу.

Существует неправильное представление о том, что тело, движущееся по окружности, испытывает действие так называемой центробежной силы, которая направлена наружу. Рассмотрим, например, случай, когда человек вращает вокруг своей головы шарик, привязанный к концу нити (рис. 5.2). Если вы проделывали это когда-ни-

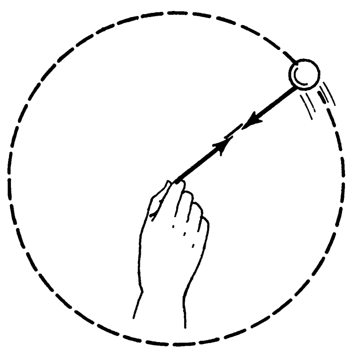


Рис. 5.2. Вращение шарика на конце нити. Рука действует на шарик, а шарик по третьему закону Ньютона – на руку.

будь сами, то должны помнить, что ощущали силу, приложенную к вашей руке и тянущую ее наружу. Возникает неправильное представление, когда эту силу интерпретируют как направленную наружу «центробежную» силу, удаляющую шарик от центра и передающуюся через нить руке. В действительности все происходит совсем иначе. Для удерживания шарика на окружности человек (посредством нити) тянет его внутрь. Следовательно, по третьему закону Ньютона шарик (опять-таки посредством нити) действует на руку с равной и противоположно направленной силой, и *это* та сила, которую ощущает

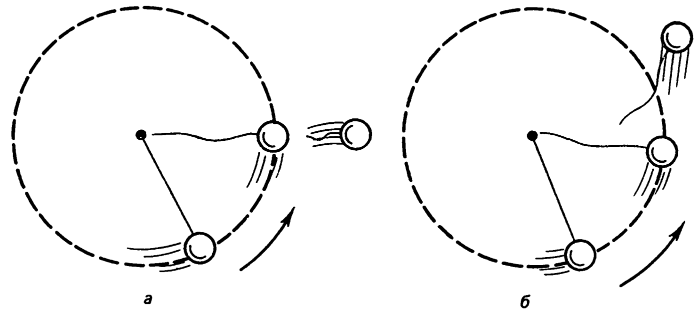


Рис. 5.3. Если бы существовала центробежная сила, то при обрыве нити мячик улетал бы так, как показано на рис. *а*. В действительности он улетает так, как показано на рис. *б*.

ваша рука. Сила, *действующая на шарик*,– это направленная внутрь сила натяжения нити. Для более убедительного доказательства того, что на шарик действует не «центробежная» сила, посмотрим, что произойдет, если нить убрать. Если бы на шарик действовала центробежная сила, то он улетел бы по радиусу в сторону от центра, как показано на рис. 5.3,*а*. Однако этого не происходит; шарик начинает двигаться по касательной (тангенциально) (рис. 5.3,*б*) в направлении скорости, которую он имел в момент времени, когда исчезла нить. Это происходит потому, что в этот момент времени прекращается действие силы, направленной внутрь.

Возникновение центростремительного ускорения можно проследить на примере автомобиля, движущегося с большой скоростью по кривой дороге. При этом, находясь в салоне автомобиля, вы можете ощутить действие силы, которая относит вас в сторону. Однако никакой мистической центробежной силы, действующей на вас, не существует. При повороте происходит только следующее: вы «стремитесь» двигаться по прямой, в то время как автомобиль, образно говоря, отклоняется «перед вами». Для того чтобы заставить вас двигаться по искривленной

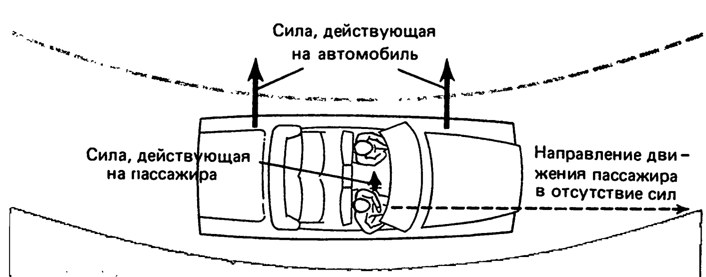


Рис. 5.4. Дорога создает силу, заставляющую автомобиль двигаться по окружности и направленную к ее центру. Аналогично автомобиль создает силу, действующую на пассажиров и также направленную к центру окружности.

траектории, спинка кресла или дверца машины действует на вас с некоторой силой (рис. 5.4). Автомобиль, если он должен двигаться по кривой, в свою очередь, испытывает направленную внутрь этой кривой силу. При движении по ровной дороге это сила трения между шинами и мостовой. Если сила трения недостаточно велика (как, например, при движении по льду), т. е. к автомобилю не может быть приложена достаточная по величине сила, то автомобиль испытает занос и «соскользнет» с круговой траектории.

Пример 5.1. Автомобиль массой 1000 кг равномерно движется по ровной дороге в форме окружности радиусом $R = 50$ м. Скорость движения автомобиля 50 км/ч (14 м/с). Сможет ли автомобиль выполнить поворот, если а) мостовая сухая и коэффициент трения скольжения равен 0,60; б) мостовая обледенела и коэффициент трения скольжения равен $\mu_s = 0{,}20$?

Решение. Вычислим сначала силу F, необходимую для сообщения автомобилю ускорения при его движении по окружности:

$$F = m\frac{v^2}{R} = \frac{(1000\ \text{кг})\,(14\ \text{м/с})^2}{(50\ \text{м})} = 3900\ \text{Н}.$$

Поскольку дорога ровная, то сила нормального давления F_N, действующая на автомобиль, равна силе тяжести: $F_N = mg = (1000\ \text{кг})\ (9{,}8\ \text{м/с}^2) = 9800$ Н. Для случая «а» $\mu_s = 0{,}60$ и максимальная сила трения покоя равна

$$F_{\text{тр}} = \mu_s F_N = (0{,}60)\cdot(9800\ \text{Н}) \approx 5900\ \text{Н}.$$

Поскольку для движения по окружности достаточно силы 3900 Н и именно эта сила трения покоя будет приложена к автомобилю, то автомобиль сможет выполнить поворот. В случае «б» максимальная возможная сила трения покоя равна

$$F_{\text{тр}} = \mu_s F_N = (0{,}20)\,(9800\ \text{Н}) = 1960\ \text{Н}.$$

Следовательно, автомобиль занесет и он «не впишется» в поворот.

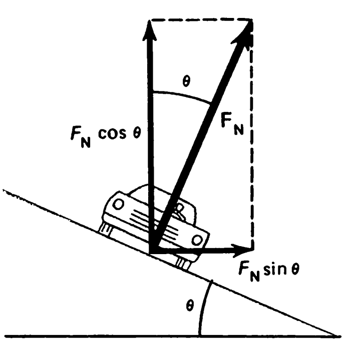


Рис. 5.5. Разложение на горизонтальную и вертикальную составляющие силы, направленной нормально наклонному полотну дороги и действующей на автомобиль, движущийся по окружности.

Ситуация ухудшается, если под действием тормозов колеса автомобиля окажутся заблокированными. При обычном вращении нижняя часть колес, касающаяся дороги, в каждый данный момент времени неподвижна относительно нее; при этом возникает сила трения покоя. При торможении шины скользят относительно дороги и сила трения (она называется теперь силой трения скольжения) становится меньше. Поэтому, когда дорога мокрая или покрыта льдом, т. е. сила трения между колесами и дорогой стала меньше, блокировка колес достигается при нажатии тормозной педали с меньшей силой.

При наклоне дорожного полотна (дорога профилирована) вероятность заноса при движении по кривой может уменьшиться, поскольку у силы нормальной реакции дороги возникнет составляющая в направлении к центру окружности (рис. 5.5), так что необходимая величина силы трения уменьшится. Для данного угла наклона будет существовать некоторое значение скорости, когда сила трения вообще не требуется. Это имеет место, когда горизонтальная составляющая силы нормальной реакции дороги $F_N \sin\theta$ в точности совпадает с силой, необходимой для сообщения автомобилю центростремительного ускорения, т. е. будет выполняться условие

$$F_N \sin\theta = mv^2/r.$$

Угол наклона дороги θ выбирается таким, чтобы это условие выполнялось при определенном значении скорости, называемой проектной скоростью.

Пример 5.2. а) Найдите угол наклона профилированной дороги, при котором автомобиль может двигаться со скоростью v по окружности радиусом r в условиях отсутствия трения. б) Чему равен этот угол для окружности радиусом 50 м при проектной скорости 50 км/ч?

Решение. а) Из формулы, написанной выше, следует, что $F_N \sin\theta = mv^2/r$. В вертикальном направлении действуют две силы: сила $F_N \cos\theta$, направленная вверх (рис. 5.5), и сила тяжести mg, направленная вниз. Так как в вертикальном направлении автомобиль не движется, вертикальная составляющая ускорения равна нулю, и из второго закона Ньютона следует, что

$$F_N \cos\theta - mg = 0,$$

откуда

$$F_N = mg/\cos\theta.$$

Подставляя это значение F_N в формулу, полученную выше для горизонтальной составляющей нормальной силы реакции, находим

$$\frac{mv^2}{r} = F_N \sin\theta = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg \operatorname{tg}\theta,$$

или

$$\operatorname{tg}\theta = v^2/rg.$$

б) В случае $r = 50$ м и $v = 50$ км/ч (или 14 м/с) имеем $\operatorname{tg}\theta = (14\ \text{м/с})^2/(50\ \text{м} \times 9{,}8\ \text{м/с}^2) = 0{,}40$, т. е. $\theta = 22°$.

Особенности динамики движения по окружности можно весьма наглядно продемонстрировать на примере устройства, широко применяемого на практике, которое называется центрифугой или ультрацентрифугой. Центрифуги используются для быстрого осаждения или сепарации веществ с незначительно различающимися физическими свойствами. Пробирки или другие сосуды, содержащие пробы вещества, помещаются в ротор центрифуги, вращающийся с очень высокой скоростью. На рис. 5.6 одна и та же пробирка изображена в двух различных положениях при вращении ротора центрифуги. Маленьким кружком обозначена частица (например, макромолекула) в наполненной жидкостью пробирке. Когда пробирка находится в положении A и ротор поворачивается, частица стремится сместиться по прямой в направлении, указанном штриховой линией со стрелкой. Жидкость противодействует[1] такому движению частиц, вследствие чего возникает центростремительная сила, удерживающая частицу при ее движении по окружности. Поскольку сила сопротивления жидкости или газа, содержащихся в пробирке, как правило, не равна необходимой центростремительной силе, частица в конечном счете достигает дна, дно пробирки действует на частицу с силой, необходимой для удержания частицы на окружности. В действительности дно пробирки должно действовать на всю пробирку, заставляя ее

[1] Это одна из сил трения, аналогичная силе сопротивления воздуха.

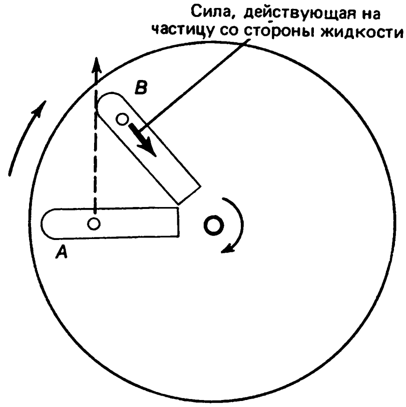


Рис. 5.6. Вращение пробирки в центрифуге.

двигаться по окружности. Если пробирка недостаточно прочна для того, чтобы сообщить эту силу, то под воздействием частицы она может разрушиться.

В центрифугу помещают вещества, которые нельзя быстро осадить или разделить под действием силы тяжести. Преимущество центрифуги и в том, что благодаря высоким скоростям вращения она создает «эффективную силу тяжести», значительно превышающую обычную силу тяжести. Под действием этой силы частицы движутся ко дну пробирки быстрее, чем в обычных условиях.

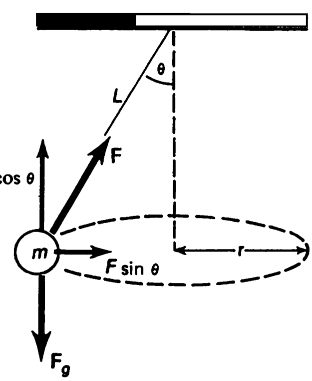


Рис. 5.7. Конический маятник (пример 5.4).

Пример 5.3. Ротор ультрацентрифуги вращается с частотой 50 000 об/мин (оборотов в минуту). Длина пробирки (перпендикулярной оси вращения) равна 6,00 см, и дно пробирки отстоит от оси вращения на 10,0 см. а) Вычислите центростремительное ускорение (в единицах ускорения свободного падения g). б) Если полная масса содержимого пробирки равна 12,0 г, то какую силу должно выдерживать дно пробирки?

Решение. а) Находясь в верхней части пробирки, частица вращается по окружности длиной $2\pi r = (2)(3{,}14)(0{,}0600\ \text{м}) = 0{,}377$ м. Поскольку частица в минуту совершает $5{,}00 \cdot 10^4$ оборотов, ее скорость равна

$$v = \frac{(0{,}377\ \text{м/об})(5{,}00 \cdot 10^4\ \text{об/мин})}{60{,}0\ \text{с/мин}} = 3{,}14 \cdot 10^2\ \text{м/с}.$$

При этом центростремительное ускорение равно

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(3{,}14 \cdot 10^2\ \text{м/с})^2}{(0{,}0600\ \text{м})} = 1{,}64 \cdot 10^6\ \text{м/с}^2.$$

Разделив это значение на $g = 9{,}8$ м/с^2, получим ускорение $1{,}67 \cdot 10^5$ в единицах g. Частица вблизи дна пробирки ($r = 0{,}100$ м) вращается со скоростью $v = (2\pi r)(5{,}00 \times 10^4)/(60{,}0\ \text{с}) = (0{,}628) \cdot (5{,}00 \cdot 10^4)/(60{,}0\ \text{с}) = 5{,}24 \cdot 10^2$ м/с и $a_c = v^2/r = 2{,}74 \cdot 10^6$ м/с^2, или $2{,}79 \cdot 10^5$ в единицах g.

б) Так как ускорение частицы зависит от расстояния до оси вращения, рассчитаем силу, обеспечивающую среднее ускорение, равное $(1{,}64 \cdot 10^6$ м/с$^2 + 2{,}74 \cdot 10^6$ м/с$^2)/2 = 2{,}19 \cdot 10^6$ м/с^2. Таким образом, $F = ma = (0{,}0120$ кг$)$ $(2{,}19 \cdot 10^6$ м/с$^2) = 2{,}63 \times \times 10^4$ Н. Эта сила эквивалентна силе тяжести, действующей на массу 2680 кг $(m = F/g = (2{,}63 \cdot 10^4$ Н$)/(9{,}80$ м/с$^2) = 2{,}68 \cdot 10^3$ кг, т. е. примерно 3 тонны).

Рассмотрим пример другого типа.

Пример 5.4. Частица массой m подвешена на нити длиной L и вращается по окружности радиусом $r = L\sin\theta$, где θ – угол, который нить составляет с вертикалью (рис. 5.7). Вычислите скорость и период (время, необходимое для совершения одного оборота) такого *конического маятника* в зависимости от L, θ и m.

Решение. На частицу массой m действуют сила тяжести $\mathbf{F}_g$ (величиной $F_g = mg$) и сила натяжения нити $\mathbf{F}$, которая имеет вертикальную и горизонтальную составляющие, равные по величине $F\sin\theta$ и $F\cos\theta$ соответственно. В вертикальном направлении частица не перемещается, поэтому ускорение равно нулю, и, следовательно,

$$F\cos\theta - mg = 0.$$

В горизонтальном направлении действует только одна сила, равная по величине $F\sin\theta$, направленная к центру окружности и сообщающая частице ускорение, равное v^2/r:

$$F\sin\theta = mv^2/r.$$

Решим эти уравнения относительно скорости v, исключая из них силу F (воспользуемся также соотношением $r = L\sin\theta$):

$$v = \sqrt{\frac{rF\sin\theta}{m}} = \sqrt{\frac{r}{m}\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\ \theta} = $$

$$= \sqrt{\frac{Lg\sin^2\theta}{\cos\theta}}.$$

Периодом T называется время, необходимое для одного оборота частицы, которая при этом проходит расстояние $2\pi r = = 2\pi L\sin\theta$. Тогда скорость v можно записать в виде

$$v = \frac{2\pi L\sin\theta}{T},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi L\sin\theta}{v} = \frac{2\pi L\sin\theta}{\sqrt{\dfrac{Lg\sin^2\theta}{\cos\theta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}};$$

здесь мы вновь воспользовались соотношением $r = L\sin\theta$.

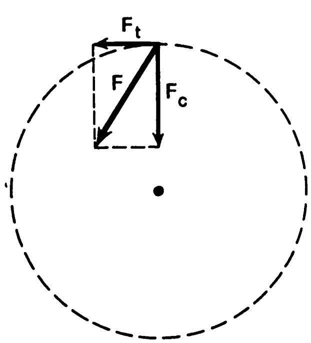


Рис. 5.8. Скорость частицы, вращающейся по окружности, изменяется по величине, если сила, действующая на нее, имеет касательную (тангенциальную) составляющую.

Движение по окружности с постоянной скоростью имеет место в том случае, когда сила, действующая на тело, направлена строго к центру окружности. Если она направлена не к центру, а под углом к радиусу, как это изображено на рис. 5.8, то ее можно разложить на две составляющие: в направлении к центру окружности и в направлении, касательном к окружности. Составляющая $\mathbf{F}_c$, направленная к центру окружности, сообщает телу центростремительное ускорение $\mathbf{a}_c$ и удерживает его на окружности. Составляющая $\mathbf{F}_t$ – касательная (тангенциальная) к окружности вызывает возрастание или убывание величины скорости, т. е. приводит к возникновению тангенциального ускорения, которое мы уже рассматривали в разд. 3.10 (рис. 3.20).

Начиная вращать вокруг головы шарик на нити, вы сообщаете ему тангенциальное ускорение. Для этого вы натягиваете нить рукой, перемещая руку из центра окружности. Аналогично поступает в спорте метатель молота, который сообщает тангенциальное ускорение молоту для того, чтобы он приобрел к моменту бросания высокую скорость.

5.2. Закон всемирного тяготения Ньютона

Исаак Ньютон не только открыл три закона динамики, но изучил также движение небесных тел – планет и Луны. В частности, он интересовался природой силы, которая должна действовать на Луну, чтобы при движении вокруг Земли она удерживалась на почти круговой орбите.

Ньютон также задумывался над не связанной, казалось бы, с этим проблемой гравитации. Поскольку падающие тела ускоряются, Ньютон заключил, что на них действует сила, которую мы называем теперь силой тяготения или гравитации. Но что *вызывает* эту силу тяготения? Мы видели ранее, что если *на* тело действует сила, то она вызывается *со стороны* какого-либо другого тела. Любое тело на поверхности Земли испытывает действие этой силы тяготения, и, где бы тело ни находилось, сила, действующая на него, направлена к центру Земли. Ньютон заключил, что сама Земля создает силу тяготения, действующую на тела, находящиеся на ее поверхности.

Согласно легенде, Ньютон сидел в своем саду и обратил внимание на падающее с дерева яблоко. У него неожиданно возникла догадка о том, что если сила тяготения действует на вершине дерева и даже на вершинах гор, то возможно, что она действует и на любом расстоянии от Земли вплоть до самой Луны! Правдива ли эта история и послужило ли яблоко причиной догадки, мы в действительности не знаем[1]. Но мысль о том, что именно притяжение Земли удерживает Луну на ее орбите, послужила Ньютону основой, с которой он начал построение своей великой теории гравитации [ощутимую помощь и поддержку оказал ему в этом Роберт Гук (1635–1703)].

Ньютон начал с определения величины гравитационного взаимодействия, с которым Земля действует на Луну, путем сравнения ее с величиной силы, действующей на тела на поверхности Земли. На поверхности Земли сила

---

[1] Многие историки науки в настоящее время считают, что Ньютон выдумал эту историю для того, чтобы отодвинуть дату открытия к 60-м годам 17 в., тогда как его переписка и дневники указывают на то, что по-настоящему он пришел к закону всемирного тяготения лишь около 1685 г. Идея о том, что могла существовать связь между силой тяжести на Земле и силой, действующей на Луну, а также закон вида $1/r^2$, уже высказывалась другими учеными, в том числе Гуком. Тем не менее открытие закона всемирного тяготения мы приписываем Ньютону, поскольку именно он дал его наиболее полную формулировку и привел наиболее убедительные аргументы в его поддержку.

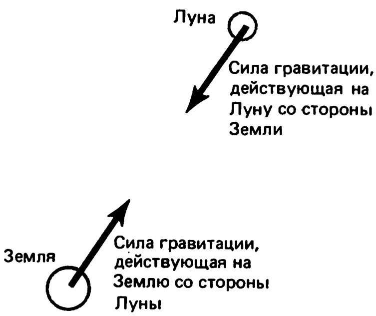


Рис. 5.9. Сила гравитационного притяжения, которая действует со стороны первого тела на второе, направлена к первому телу. Она равна и противоположно направлена силе, с которой второе тело действует на первое.

тяготения придает телам ускорение $g = 9{,}80$ м/с^2. Но чему равно центростремительное ускорение Луны? Так как Луна движется по окружности почти равномерно, ее ускорение может быть рассчитано по формуле $a_c = v^2/r$; мы уже проводили такой расчет в примере 3.10 и нашли, что $a_c = 2{,}73 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Если выразить это ускорение через ускорение свободного падения g вблизи поверхности Земли, то получим

$$a_c \approx \frac{1}{3600} g.$$

Таким образом, ускорение Луны, направленное к Земле, составляет 1/3600 ускорения тел вблизи поверхности Земли. Луна удалена от Земли на 385 000 км, что превышает примерно в 60 раз радиус Земли, равный 6380 км. Это означает, что Луна в 60 раз дальше от центра Земли, чем тела, находящиеся на поверхности Земли. Но $60 \cdot 60 = 3600$, и мы вновь получили число 3600! Ньютон сделал вывод, что сила тяготения, действующая со стороны Земли на любые тела, уменьшается обратно пропорционально квадрату их расстояния r от центра Земли:

$$\text{Сила тяготения} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Луна, удаленная на 60 земных радиусов, испытывает силу гравитационного притяжения, составляющую всего лишь $1/60^2 = 1/3600$ той силы, которую она испытывала бы, если бы находилась на поверхности Земли. Любое тело, помещенное на расстоянии 385 000 км от Земли, благодаря притяжению Земли приобретает то же ускорение, что и Луна, а именно $2{,}73 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

Ньютон понимал, что сила тяготения зависит не только от расстояния до притягиваемого тела, но и от его массы. Действительно, как мы видели, сила тяготения прямо пропорциональна массе притягиваемого тела. Согласно третьему закону Ньютона, когда Земля действует силой тяготения на другое тело (например, Луну), это тело в свою очередь действует на Землю с равной по величине и противоположно направленной силой (рис. 5.9). Благодаря этой симметрии Ньютон предположил, что величина силы тяготения пропорциональна *обеим* массам. Таким образом,

$$F \sim \frac{m_з m_т}{r^2},$$

где $m_з$ – масса Земли, $m_т$ – масса другого тела, r – расстояние от центра Земли до центра тела.

Продолжая изучение гравитации, Ньютон продвинулся еще на шаг вперед. Он определил, что сила, необходимая для удержания различных планет на их орбитах вокруг Солнца, убывает обратно пропорционально квадрату их расстояний от Солнца. Это привело его к мысли о том, что сила, действующая между Солнцем и каждой из планет и удерживающая их на орбитах, также является силой гравитационного взаимодействия. И если гравитационное взаимодействие существует между этими телами, то почему бы ему не существовать между всеми телами? Таким образом Ньютон пришел к своему знаменитому **закону всемирного тяготения**, который можно сформулировать так:

> **Каждая частица во Вселенной притягивает любую другую частицу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Эта сила действует вдоль линии, соединяющей эти две частицы.**

Величина этой силы может быть записана в виде

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.1}$$

где m_1 и m_2 – массы двух частиц, r – расстояние между ними, а G – гравитационная постоянная, которая может быть измерена экспериментально и для всех тел имеет одно и то же численное значение.

Строго говоря, выражение (5.1) определяет величину силы тяготения, с которой одна частица действует на другую, находящуюся от нее на расстоянии r. Для протяженных (не точечных) тел мы должны определить способ измерения расстояния r. Можно было бы подумать, что r – это расстояние между центрами тел, но это не обязательно так. Для корректного расчета любое протяженное тело следует рассматривать как совокупность крошечных частиц, и результирующая сила является геометрической суммой сил от всех частиц. Суммирование по всем этим частицам чаще всего удобно проводить с помощью интегрального исчисления, которое было изобретено самим Ньютоном. В частности, Ньютон показал, что для двух однородных сфер выражение (5.1) правильно описывает силу взаимодействия, если r – расстояние между центрами сфер. (Доказательству этого посвящена задача 23 в конце главы.) Кроме того, если протяженные тела малы по сравнению с расстояниями между ними (как это имеет место для системы Земля – Солнце), то, рассматривая тела как точечные частицы, мы вносим лишь небольшую ошибку.

Если нужно рассмотреть силу гравитационного притяжения, действующую на данную частицу со стороны двух или нескольких других частиц, например силу, действующую на Луну со стороны Земли и Солнца (или суммарную силу от частиц, на которые разбит протяженный объект), то необходимо для каждой пары взаимодействующих частиц воспользоваться формулой (5.1), после чего векторно сложить силы, действующие на частицу.

Величина постоянной G в формуле (5.1) должна быть очень мала, так как мы не замечаем никакой силы, действующей между телами обычных размеров (напри-

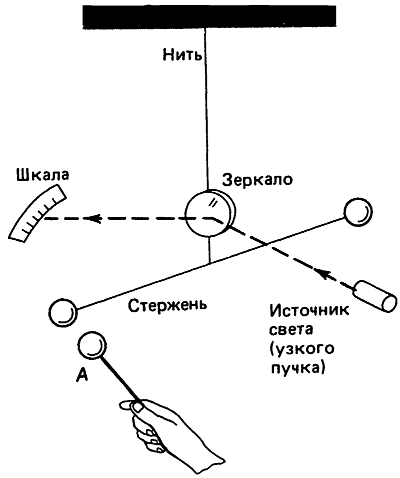


Рис. 5.10. Схематическое изображение установки Кавендиша. Два шарика закреплены на концах легкого горизонтального стержня, подвешенного за середину к тонкой нити. Когда шар, обозначенный буквой A, подносят близко к одному из подвешенных шаров, сила гравитационного притяжения заставляет закрепленный на стержне шар сдвинуться, что приводит к небольшому закручиванию нити. Это незначительное смещение измеряется с помощью узкого пучка света, направленного на зеркало, укрепленное на нити так, что отраженный пучок света падает на шкалу. Проделанные ранее измерения закручивания нити под действием известных сил позволяют определить величину силы гравитационного взаимодействия, действующей между двумя телами.

мер, между двумя тяжелыми шарами для игры в кегли). Сила, действующая между двумя телами обычных размеров, впервые была измерена в 1798 г. Генри Кавендишем – через 100 лет после того, как Ньютон опубликовал свой закон. Для обнаружения и измерения столь невероятно малой силы он использовал установку, показанную на рис. 5.10. Кавендиш не только подтвердил гипотезу Ньютона о том, что тела притягивают друг друга и формула (5.1) правильно описывает эту силу. Поскольку Кавендиш мог с хорошей точностью измерить величины F, m_1, m_2 и r, ему удалось также рассчитать величину постоянной G. В настоящее время принято считать, что эта постоянная равна

$$G = (6{,}6720 \pm 0{,}0041) \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2,$$

или

$$G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Это очень малая величина, которую можно измерить лишь весьма чувствительными приборами.

Пример 5.5. Два сферических свинцовых шара массой 8,00 кг каждый расположены так, что расстояние между их центрами составляет 50,0 см. С какой гравитационной силой действуют шары друг на друга?

Решение. Предположим, что шары однородны. Тогда из формулы (5.1) получим

$$F = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2)(8{,}00\ \text{кг})(8{,}00\ \text{кг})}{(0{,}500\ \text{м})^2} = 1{,}71 \cdot 10^{-8}\ \text{Н}.$$

Пример 5.6. Чему равна сила гравитационного притяжения, действующая на космический корабль, движущийся по круговой орбите, удаленной от центра Земли на расстояние, равное двум радиусам Земли (т.е. движущийся на высоте 6400 км от поверхности Земли)?

Решение. Корабль удален от центра Земли на расстояние, в два раза превышающее расстояние от центра Земли до поверхности; следовательно, поскольку

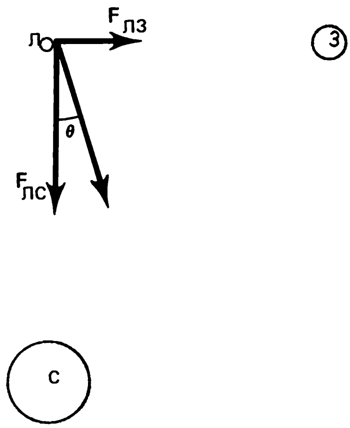


Рис. 5.11. Относительное расположение Солнца (С), Земли (З) и Луны (Л) в примере 5.7 (масштаб не соблюден).

сила гравитационного взаимодействия уменьшается как квадрат расстояния (и $1/2^2 = 1/4$), сила будет в четыре раза меньше.

Пример 5.7. Определим силу, действующую на Луну ($m_Л = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг) благодаря гравитационному притяжению как Земли ($m_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг), так и Солнца ($m_С = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг), считая, что эти силы направлены перпендикулярно друг другу (рис. 5.11).

Решение. Земля удалена от Луны на расстояние $3{,}85 \cdot 10^5$ км, поэтому сила $F_{ЛЗ}$, действующая на Луну со стороны Земли, равна

$$F_{ЛЗ} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2)(7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{кг})(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{кг})}{(3{,}85 \cdot 10^8\ \text{м})^2} = 1{,}98 \cdot 10^{20}\ \text{Н}.$$

Солнце находится на расстоянии $1{,}50 \times 10^8$ км от Земли, поэтому сила $F_{ЛС}$, действующая на Луну со стороны Солнца, равна

$$F_{ЛС} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2)(7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{кг})(1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{кг})}{(1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{м})^2} = 4{,}35 \cdot 10^{20}\ \text{Н}.$$

Так как эти две силы в рассматриваемом случае направлены друг к другу под углом 90° (рис. 5.11), суммарная сила

$$F = \sqrt{(1{,}98)^2 + (4{,}35)^2} \cdot 10^{20}\ \text{Н} = 4{,}79 \cdot 10^{20}\ \text{Н}$$

направлена под углом $\theta = \operatorname{arctg}(1{,}98/4{,}35) = 24{,}5°$ относительно линии Луна – Солнце.

Закон всемирного тяготения[1)] не следует путать со вторым законом Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Если закон всемирного тяготения имеет дело с конкретной силой гравитационного взаимодействия и описывает зависимость ее величины от расстояния между взаимодействующими телами и их масс, то второй закон Ньютона устанавливает связь между силой, действующей на тело (это может быть любая сила), массой и ускорением этого тела.

5.3. Векторная форма записи закона всемирного тяготения Ньютона

Закон всемирного тяготения Ньютона можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}, \tag{5.2}$$

[1)] Его иногда называют четвертым законом Ньютона.– *Прим. ред.*

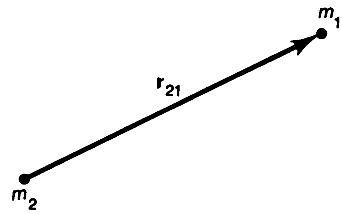


Рис. 5.12. Вектор $\mathbf{r}_{21}$, направленный от частицы массой m_2 к частице массой m_1.

где $\mathbf{F}_{12}$ – вектор силы, действующей на частицу 1 (массой m_1) со стороны частицы 2 (массой m_2), находящейся на расстоянии r_{21} от частицы 1; $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ – единичный вектор, направленный от частицы 2 к частице 1 вдоль прямой, соединяющей эти частицы, так что $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{r}_{21}/r_{21}$, где $\mathbf{r}_{21}$ – вектор, показанный на рис. 5.12. Знак минус в формуле (5.2) обусловлен тем, что сила, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2, направлена противоположно вектору $\hat{\mathbf{r}}_{21}$. Вектор $\mathbf{r}_{12}$ равен по величине вектору $\mathbf{r}_{21}$, но направлен в противоположную сторону, т.е. $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$.

Согласно третьему закону Ньютона, сила $\mathbf{F}_{21}$, действующая на тело массой m_2 и создаваемая телом массой

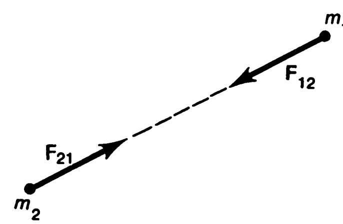


Рис. 5.13. Согласно третьему закону Ньютона сила гравитационного притяжения, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2, $\mathbf{F}_{12}$ равна и противоположно направлена силе $\mathbf{F}_{21}$, с которой частица 1 действует на частицу 2; иными словами, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

m_1, должна иметь ту же величину, что и сила $\mathbf{F}_{12}$, но направлена противоположно ей (рис. 5.13). Таким образом,

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}.$$

5.4. Сила тяготения вблизи поверхности Земли

Применим формулу (5.1) для описания силы тяготения между Землей и телом, находящимся на ее поверхности. Тогда m_1 заменится на массу Земли m_3, а r – на расстояние до центра Земли[1], т.е. на радиус Земли r_3. Эта сила гравитационного притяжения Земли называется силой тяжести; эту силу мы записывали как mg, где g – ускорение свободного падения. Таким образом,

$$mg = Gmm_3/r_3^2.$$

[1] То, что расстояние измеряется от центра Земли, не означает, что сила притяжения в каком-то смысле «исходит» из этой точки. В действительности все частицы Земли притягивают тело, но суммарное их действие таково, что результирующая сила притяжения направлена к центру Земли (см. задачу 23).

Из этого равенства следует, что

$$g = Gm_3/r_3^2. \tag{5.3}$$

Иными словами, ускорение свободного падения на поверхности Земли g определяется величинами m_3 и r_3. [Не следует путать G с g; это совершенно разные величины, хотя и связанные друг с другом соотношением (5.3).]

В гл. 2 было отмечено, что значения ускорения свободного падения g в разных точках Земли несколько различаются. Из формулы (5.3) можно видеть, что величина g должна быть меньше, например, на вершинах гор, чем на уровне моря, поскольку расстояние от центра Земли до вершины горы несколько больше. Действительно, этот факт установлен экспериментально. Однако формула (5.3) не дает точного значения величины g во всех точках, так как поверхность Земли не является в точности сферической (на ее поверхности не только существуют горы и долины, но также имеют место изменения радиуса Земли на экваторе; кроме того, масса Земли распределена неоднородно); вращение Земли, как будет показано в примере 5.8, также влияет на изменение g.

До тех пор, пока не была измерена гравитационная постоянная G, масса Земли оставалась неизвестной. И лишь после того, как G была измерена, с помощью соотношения (5.3) удалось вычислить массу Земли. Это впервые проделал сам Кавендиш. Подставляя в (5.3) значения $g = 9{,}80$ м/с^2 и радиуса Земли $r_3 = 6{,}38 \cdot 10^6$ м, получаем следующее значение массы Земли:

$$m_3 = \frac{gr_3^2}{G} = \frac{(9{,}80\ \text{м/с}^2)(6{,}38 \cdot 10^6\ \text{м})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{кг}.$$

Для силы тяготения, действующей на тела, находящиеся вблизи поверхности Земли, мы можем пользоваться просто выражением mg. Если же необходимо рассчитать силу тяготения, действующую на тело, расположенное на некотором удалении от Земли, или силу, вызываемую другим небесным телом (например, Луной или другой планетой), то следует использовать эффективное значение величины g, вычисленное с помощью формулы (5.3), в которой r_3 и m_3 должны быть заменены на соответствующее расстояние и массу; можно также непосредственно воспользоваться формулой (5.1).

Пример 5.8. Предполагая, что форма Земли является сферической, определим влияние вращения Земли на ускорение свободного падения g на экваторе по сравнению с его величиной на полюсах.

Решение. На рис. 5.14 показаны тела массой m каждое, подвешенные на пружинных весах в двух точках на поверхности Земли. На Северном полюсе на тело действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{w}$, с которой пружина тянет тело. Последнюю силу мы назвали $\mathbf{w}$, так как

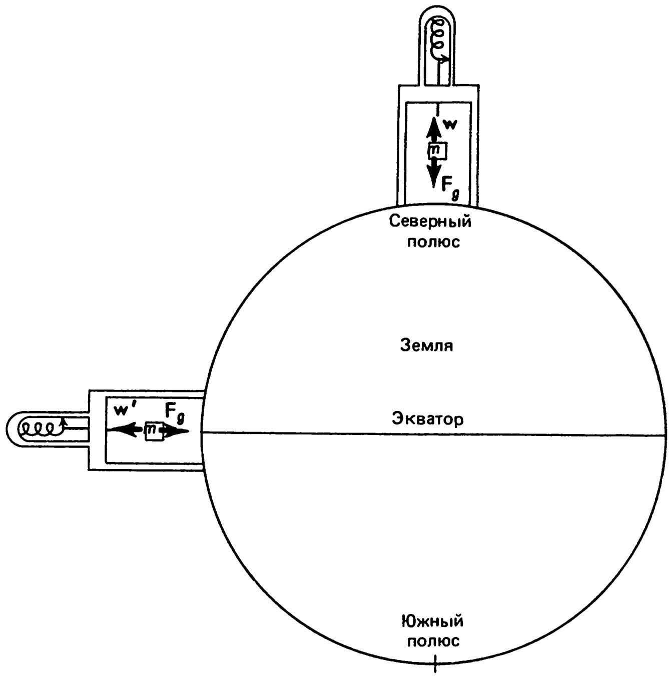


Рис. 5.14. Пример 5.8.

по третьему закону Ньютона она равна силе, с которой тело растягивает пружину (т. е. весу тела)[1]. Поскольку тело не испытывает ускорения, из второго закона Ньютона имеем

$$mg - w = 0$$

и, следовательно, $w = mg$. Таким образом, вес этого тела, регистрируемый на пружинных весах, равен mg, что, разумеется, не удивительно. На экваторе же тело обладает ускорением из-за вращения Земли. По-прежнему та же самая сила тяжести $F_g = mg$ действует в направлении к центру Земли (мы обозначаем буквой g ускорение свободного падения в отсутствие вращения и пренебрегаем изменением радиуса Земли на экваторе). Пружина действует на тело с силой w', направленной вверх; при этом w' также равна по величине силе, с которой тело растягивает пружину (согласно третьему закону Ньютона), и, следовательно, равна весу тела, регистрируемому на пружинных весах. Согласно второму закону Ньютона, мы теперь имеем (рис. 5.14)

$$mg - w' = mv^2/r_з;$$

здесь $r_з = 6{,}38 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, а v – скорость тела, обусловленная суточным вращением Земли и численно равная $v = 2\pi r_з/(1\ \text{сут}) = (6{,}28)(6{,}38 \cdot 10^6\ \text{м})/(8{,}64 \times 10^4\ \text{с}) = 4{,}64 \cdot 10^2$ м/с. Можно ввести «эффективное» ускорение свободного падения, определив его следующим образом[2]: $g' = w'/m$. Решив уравнение, написанное выше, относительно w', получим $w' = m(g - v^2/r_з)$. Таким образом,

$$g' = w'/m = g - v^2/r_з.$$

Следовательно, $\Delta g = g - g' = v^2/r_з = (4{,}64 \cdot 10^2\ \text{м/с})^2/(6{,}38 \cdot 10^6\ \text{м}) = 0{,}0337$ м/с^2. Из табл. 2.1 видно, что реально существу-

---

[1] По первой букве англ. слова weight – вес.– *Прим. ред.*

[2] В отечественной литературе подобный термин не принят, и ускорение свободного падения всегда равно g.– *Прим. ред.*

ющее различие между этими величинами составляет (9,832–9,780) м/с^2 = 0,052 м/с^2 и превышает полученное нами значение. Это расхождение объясняется тем, что Земля на экваторе несколько «толще» (примерно на 21 км), чем на полюсах. Для определения эффективного значения величины g на широтах, отличающихся от полюса и экватора, приходится решать двумерную задачу, поскольку $\mathbf{F}_g$ направлена к центру Земли по радиусу, в то время как центростремительное ускорение направлено перпендикулярно оси вращения (т. е. параллельно плоскости экватора).

* 5.5. Гравитационная и инертная масса

Мы рассмотрели два аспекта понятия массы. В гл. 4 мы определили массу как меру инертности тела. Второй закон Ньютона связывает силу, действующую на тело, с его ускорением и его *инертной массой*. Затем в данной главе мы рассматривали массу как свойство, связанное с силой гравитационного притяжения между телами; оказалось, что масса тел определяет интенсивность этого притяжения. Такую массу мы назвали *гравитационной массой* (подробнее см. в разд. 4.4, где определены два способа введения шкалы измерения массы).

Отнюдь не очевидно, что инертная масса тела должна быть равна его гравитационной массе. (Вообще говоря, сила тяготения могла бы зависеть от совершенно другого свойства тела; например, электрическая сила, как мы увидим ниже, определяется свойством, называемым электрическим зарядом.) Опыты Ньютона и Кавендиша показали, что для данного тела оба этих вида массы совпадают; современные эксперименты подтверждают это с точностью до 10^{-11}.

Если бы гравитационная и инертная массы не были равны друг другу, то не был бы справедлив вывод Галилея о том, что все тела в отсутствие сопротивления воздуха падают на Землю с одинаковыми ускорениями. Предположим, что более тяжелые тела обладают такой же инертностью, как и легкие (под более легкими мы имеем в виду тела, на которые действует меньшая сила тяжести). При этом более тяжелые тела будут сильнее ускоряться по сравнению с более легкими, поскольку $a = F/m$; иными словами, сила F будет больше для тяжелого тела, в то время как его масса m та же, что и у более легкого тела. Благодаря равенству инертной и гравитационной масс более тяжелое тело не только подвергается действию большей силы, но и имеет соответственно бóльшую инертность по сравнению с легким телом, так что ускорения этих тел одинаковы.

5.6. Спутники и невесомость

Искусственные спутники, обращающиеся вокруг Земли, стали теперь обыденным явлением. Спутник выводится на орбиту вследствие разгона до достаточно высокой тангенциальной скорости, осуществляемого с помощью ракетных двигателей, как показано на рис. 5.15. Если приобретенная спутником скорость слишком велика, то притяжение Земли не сможет удержать космический корабль и он покинет ее пределы. В случае недостаточно высокой скорости, сообщенной спутнику, он упадет обратно на Землю. Спутники обычно выводятся на круговые или близкие к ним орбиты. Для этого спутнику необходимо сообщить некоторую минимальную скорость запуска. Иногда спрашивают: что удерживает спутник на орбите? Ответ обычно звучит так: ведь спутник движется с высокой скоростью. Разумеется, если спутник перестанет двигаться, он упадет на Землю. Но при очень высокой скорости движения спутник очень скоро улетел бы в космическое пространство, если бы гравитационная сила Земли не удерживала его на околоземной орбите.

У спутников, которые движутся равномерно по окружности (хотя бы приблизительно), центростремительное ускорение равно v^2/r. Сила, которая сообщает спутнику это ускорение, является силой тяжести, а, поскольку спутник может находиться на значительном удалении от Земли, величину силы, действующей на него, можно вычислять с помощью формулы (5.1). Применяя второй закон Ньютона $F = ma$, можно написать следующее соотношение:

$$G\frac{mm_З}{r^2} = m\frac{v^2}{r}. \tag{5.4}$$

Это соотношение связывает расстояние r от спутника до центра Земли с его скоростью v. Еще раз заметим, что на спутник действует только одна сила, а именно сила тяжести.

Пример 5.9. Вычислите скорость, необходимую для того, чтобы спутник двигался по круговой орбите на высоте 200 км от поверхности Земли.

Решение. Решим уравнение (5.4) относительно скорости v:

$$v = \sqrt{Gm_З/r}.$$

Величина r равна $(6380 + 200)$ км $=$ $= 6580$ км, или $6{,}58 \cdot 10^6$ м.

Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2)(5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{кг})}{6{,}58\cdot 10^6\ \text{м}}} = 7{,}79 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Это приблизительно равно 27 000 км/ч. Следует заметить, что с увеличением высоты необходимая для удержания спутника на круговой орбите скорость будет уменьшаться.

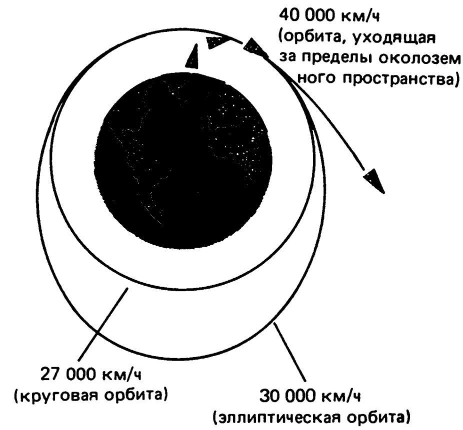


Рис. 5.15. Искусственные спутники.

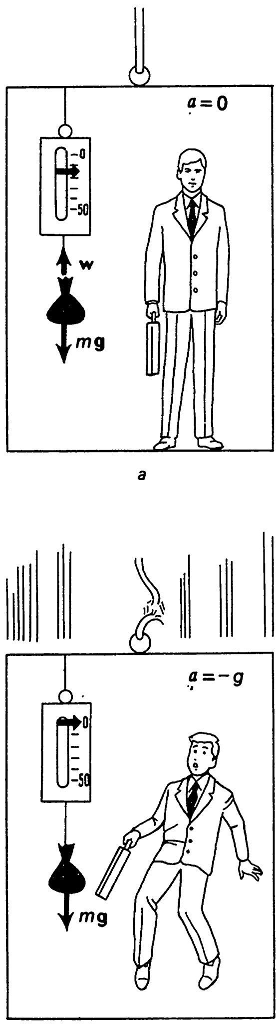


Рис. 5.16. В покоящемся лифте (a) тело действует на пружину весов с силой, равной действующей на него силе тяжести; в свободно падающем лифте ($б$) наступает состояние «невесомости».

Находящиеся на спутнике, вращающемся вокруг Земли по круговой орбите, космонавты испытывают состояние невесомости. Прежде чем проанализировать случай со спутником, рассмотрим более простой случай падающего лифта. На рис. 5.16, *а* лифт находится в покое. Пусть в лифте имеются пружинные весы со шкалой, к которым подвешен груз в мешке, как показано на рис. 5.16, *а*. При этом стрелка на шкале указывает величину силы, действующей вниз на пружину со стороны мешка. Эта сила, действующая *на* пружину, в точности равна и противоположно направлена силе, которая действует на мешок вертикально вверх со стороны пружины; обозначим эту силу через $\mathbf{w}$. Поскольку при этом ускорение подвешенного груза m равно нулю, применение к нему второго закона Ньютона $F = ma$ дает

$$0 = w - mg;$$

здесь mg – сила тяжести; следовательно, $w = mg$. А поскольку стрелка на пружинных весах указывает силу w, приложенную к пружине со стороны мешка, пружинные весы регистрируют силу, равную весу мешка, как мы и ожидали. Если теперь лифт начал двигаться с ускорением a, то, применяя снова закон $F = ma$ к мешку, мы имеем $w - mg = ma$. Отсюда находим следующее выражение:

$$w = mg + ma.$$

За положительное направление мы выбрали направление вверх. Таким образом, если ускорение a направлено вверх, то оно положительно и пружинные весы, которые измеряют w, покажут величину, бóльшую, чем mg. Если же лифт ускоряется вниз, то его ускорение a будет отрицательно и w будет меньше, чем mg. Например, если ускорение лифта равно $-g/2$, то вес будет равен $w = mg - (1/2)mg = (1/2)mg$. Иными словами, весы показывают значение w, равное половине силы тяжести. Когда лифт *свободно падает* (например, если оборвется трос), то $a = -g$ и $w = mg - mg = 0$. Весы покажут нуль (рис. 5.16, *б*), и ме-

Рис. 5.17. Летящий спутник «падает» с прямолинейной орбиты по направлению к Земле.

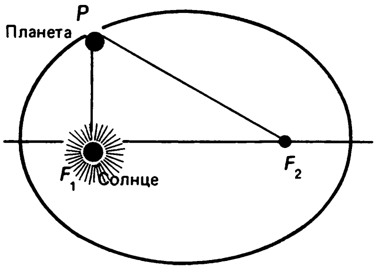
шок окажется невесомым. Если человек в лифте уронит предмет, например карандаш, то карандаш не упадет на пол. Действительно, карандаш будет свободно падать с ускорением g, но с таким же ускорением будут падать и лифт, и человек. Карандаш будет находиться перед человеком в том месте, где его отпустили. Такое явление называется *невесомостью*, причем сила тяжести продолжает действовать на тело. Тела становятся невесомыми только потому, что лифт движется с ускорением, равным $-g$.

Невесомость, испытываемая человеком на спутнике, обращающемся по орбите вблизи Земли, имеет ту же природу, что и невесомость в свободно падающем лифте. Это вначале может показаться странным: как можно говорить о свободном падении спутника? Но спутник действительно падает на Землю (рис. 5.17); сила тяжести заставляет его «падать», т. е. отклоняться от своей естественной прямолинейной траектории. Спутник приобретает ускорение благодаря наличию гравитации, так как единственной силой, действующей на спутник, является сила тяжести. [Мы использовали этот факт при записи соотношения (5.4); то, что мы записали ускорение в виде v^2/r, ничего не меняет.] Таким образом, хотя на тела внутри спутника действует сила тяжести, они испытывают состояние невесомости, так как и они, и сам спутник движутся с ускорением свободного падения.

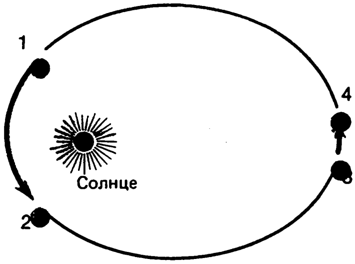
Совершенно иная картина наблюдается в космическом корабле, находящемся в космосе вдали от Земли и других притягивающих небесных тел (например, Луны). Сила гравитационного притяжения Земли и других небесных тел будет исчезающе мала из-за большого удаления космического корабля, и люди в таком корабле испытают невесомость, даже если корабль движется прямолинейно и равномерно (без ускорения).

5.7. Законы Кеплера и обобщение Ньютона

Более чем за полстолетия до того, как Ньютон предложил свои три закона динамики, а также четвертый закон – закон всемирного тяготения, немецкий астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) написал ряд работ по астрономии, в которых можно найти подробное описание движения планет вокруг Солнца. Работы Кеплера возникли отчасти благодаря многолетнему изучению им данных, полученных астрономом Тихо Браге (1546–1601), относительно положений планет в процессе их наблюдаемого «небесного» движения. На основании всех этих изысканий были сделаны три открытия, которые мы называем теперь **законами Кеплера для движения планет**. Их можно сформулировать следующим образом (пояснение см. на рис. 5.18).



а



б

Рис. 5.18. *а* – первый закон Кеплера. Эллипс – это замкнутая кривая, обладающая следующим свойством: сумма расстояний от любой точки P, принадлежащей эллипсу, до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, постоянна; это означает, что сумма расстояний $F_1P + F_2P$ одинакова для всех точек P, принадлежащих эллипсу; окружность – частный случай эллипса, у которого оба фокуса совпадают с центром окружности. *б* – второй закон Кеплера; две заштрихованные области имеют одинаковые площади. Из точки 1 в точку 2 планета перемещается за то же время, что из точки 3 в точку 4. Быстрее всего планета движется на наиболее приближенном к Солнцу участке пути.

Первый закон Кеплера. Траектория движения (орбита) каждой планеты вокруг Солнца представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце (рис. 5.18).

Второй закон Кеплера. Каждая планета движется так, что воображаемая линия, соединяющая ее с Солнцем, заметает равные площади за равные промежутки времени (рис. 5.18, *б*).

Третий закон Кеплера. Отношение квадратов периодов любых двух планет, обращающихся вокруг Солнца, равно отношению кубов их средних расстояний от Солнца. Это означает, что если T_1 и T_2 – периоды обращения (т. е. промежутки времени, необходимые для совершения планетой полного оборота вокруг Солнца), а r_1 и r_2 – средние расстояния от планет до Солнца, то

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

(Современные данные представлены в последнем столбце табл. 5.1.)

Таблица 5.1. Параметры движения планет, используемые в третьем законе Кеплера

Планета	Среднее расстояние до солнца r, 10^6 км	Период T, земной год	r^3/T^2, 10^{24} км^3/год^2
Меркурий	57,9	0,241	3,34
Венера	108,2	0,615	3,35
Земля	149,6	1,0	3,35
Марс	227,9	1,88	3,35
Юпитер	778,3	11,86	3,35
Сатурн	1427	29,5	3,34
Уран	2870	84,0	3,35
Нептун	4497	165	3,34
Плутон	5900	248	3,33

Ньютону удалось показать, что законы Кеплера могли быть получены путем математического вывода из закона всемирного тяготения и законов движения. Кроме того, Ньютон показал, что из всех более или менее разумных записей закона для гравитационной силы полностью согласована со всеми тремя законами Кеплера только одна – та, в которой зависимость от расстояния подчиняется закону обратных квадратов. Поэтому Ньютон использовал законы Кеплера как свидетельство в пользу своего закона всемирного тяготения, записываемого в виде (5.1).

Проще всего вывести третий закон Кеплера, и мы сделаем это для частного случая круговой орбиты. (Большинство планетных орбит достаточно близки к окружностям, представляющим собой частный случай эллипса.) Прежде всего запишем второй закон Ньютона: $F = ma$, а затем запишем закон всемирного тяготения (5.1), в который подставим вместо силы F ее выражение через массу и ускорение, а вместо ускорения a центростремительное ускорение v^2/r. Таким образом, мы имеем

$$F = ma,$$

$$G\frac{m_1 M}{r_1^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1}.$$

Здесь m_1 – масса данной планеты, r_1 – ее среднее расстояние от Солнца, v_1 – средняя скорость ее движения по орбите, а M – масса Солнца, гравитационное притяжение которого и удерживает каждую планету на своей орбите. Поскольку период T_1 – это время, за которое планета совершает полный оборот вокруг Солнца (т. е. проходит путь длиной, равной длине окружности $2\pi r_1$), скорость v_1 запишется в виде

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

Подставляя это выражение для v_1 в написанное выше соотношение, находим

$$G\frac{m_1 M}{r_1^2} = m_1 \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}.$$

Выполняя преобразование, получаем

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Этот результат получен для планеты 1 (например, Марса), но аналогичный вывод применим и для любой другой планеты 2 (например, Сатурна):

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM};$$

здесь T_2 и r_2 – соответственно период и радиус орбиты планеты 2. Поскольку правые части обоих равенств одинаковы, очевидно, что $T_1^2/r_1^3 = T_2^2/r_2^3$, или окончательно

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Таким образом, мы пришли к третьему закону Кеплера. Второй закон Кеплера также нетрудно вывести, и мы сделаем это в гл. 10.

Точные измерения орбит планет показали, что для них не вполне точно выполняются законы Кеплера; например, наблюдались небольшие отклонения от идеальных эллиптических орбит. Ньютон понимал, что этого следует ожидать на основании закона всемирного тяготения («каждое тело во Вселенной притягивает любое другое тело...»), так как помимо Солнца каждая планета действует гравитационной силой на другие планеты. Поскольку масса Солнца значительно превышает массу любой другой планеты, силы гравитационного взаимодействия между любыми двумя планетами малы по сравнению с силой их гравитационного взаимодействия с Солнцем. (При выводе закона Кеплера об идеально эллиптических орбитах полностью пренебрегалось влиянием сил со стороны других планет.) Однако благодаря этим малым силам каждая планетная орбита должна отличаться от идеального эллипса[1], в особенности если другая планета достаточно близка к данной. Подобные отклонения (или, как их называют, возмущения) от идеальных эллиптических орбит действительно наблюдаются. По существу, именно наблюдение Ньютоном возмущений орбиты Сатурна было той подсказкой, которая помогла ему сформулировать закон всемирного тяготения, справедливый для всех тел. Наблюдения других возмущений привели позднее к открытию Нептуна и Плутона. Например, отклонения орбиты Урана не могли быть объяснены за счет действия других, уже известных планет. Тщательные вычисления, проведенные в прошлом столетии, показали, что эти отклонения можно объяснить лишь наличием в Солнечной системе еще одной удаленной планеты. Ее положение было предсказано по отклонениям орбиты Урана, и с помощью телескопов, направленых в указанную область неба, эта планета была быстро обнаружена и названа Нептуном[2]. Аналогично по значительно более слабым возмущениям орбиты Нептуна в 1930 г. удалось открыть планету Плутон.

Открытие Ньютоном закона всемирного тяготения и трех законов динамики (гл. 4) явилось одним из высших достижений физической науки. С помощью этих законов Ньютону удалось описать движение тел на Земле и указать причины этого движения. Кроме того, на той же основе удалось объяснить движение планет вокруг Солнца и обращение Луны вокруг Земли. Оказалось, что движение небесных тел и тел на Земле подчиняется одним и тем же законам (до Ньютона эта точка зрения не была общепринятой, хотя Галилей усиленно отстаивал ее). Поэтому иногда говорят о ньютоновском обобщении, отмечая при этом, что Ньютон привел в систему и взгляды своих предшественников.

Деятельность Ньютона была столь всеобъемлюща,

---

[1] Ньютон формулировал это так: «Планеты никогда не движутся точно по эллипсам и не обращаются дважды по одной и той же орбите». Он также указывал, что, например, Солнце не находится в точности в одном из фокусов эллипса; даже в идеальном случае только двух тел (Солнца и одной планеты) они обращаются вокруг их общего центра тяжести.

[2] Речь идет об открытии французского астронома Леверье (1811–1877), вошедшем в историю науки как классический пример открытия, сделанного «на кончике пера».– *Прим. ред.*

что она привела к созданию определенной картины мира, повлиявшей на философию и другие области науки. Законы, формулировку которых дал Ньютон, называют *причинными законами*; здесь под *причинностью* мы понимаем то, что одно явление с необходимостью может вызывать другое[1]. Мы не раз видели, как удар камня в окно приводит к тому, что окно немедленно разбивается. Отсюда мы делаем вывод, что именно камень послужил *причиной* разбиения окна. Вообще представление о «причине» и «следствии» приобрело мощную поддержку в законах Ньютона, поскольку было обнаружено, что движение (или, точнее, ускорение) любого тела *вызывается* действующей на него результирующей силой. В итоге многие ученые и философы стали описывать Вселенную как гигантскую машину, отдельные «части» которой движутся предсказуемым и предопределенным образом в соответствии с законами природы[2]. Однако эта *детерминистская* картина Вселенной[3] была отвергнута в 20 в., что мы покажем в гл. 40 и 41.

5.8. Виды сил в природе

Мы уже обсудили, каким образом закон всемирного тяготения Ньютона [выражение (5.1)] описывает зависимость конкретной силы, а именно силы тяжести, от масс взаимодействующих тел и расстояний между ними. Второй закон Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ говорит о том, как будет ускоряться тело под действием силы $\mathbf{F}$ любой природы. Но какие же виды сил вообще встречаются в природе?

В настоящее время физики различают всего четыре вида сил в природе[4]. К ним относятся следующие: 1) гравитационная сила; 2) электромагнитная сила (как мы увидим ниже, электрическая и магнитная силы тесно взаимосвязаны); 3) сильная ядерная сила и 4) слабая ядерная сила. Мы подробно рассмотрели гравитационную силу, электромагнитная сила будет изучена в следующих главах. Сильная и слабая ядерные силы действуют на уровне атомного ядра и значительно менее заметны в

---

[1] О таких законах часто принято также говорить как о законах динамических в противоположность законам статистическим, или вероятностным (см. гл. 18).– *Прим. ред.*

[2] То есть в соответствии с ньютоновскими законами.– *Прим. ред.*

[3] Ярким выразителем этого был французский философ и математик П. Лаплас (1749–1827).– *Прим. ред.*

[4] Строго говоря, насчитывается всего лишь три различных вида фундаментальных сил, так как указанные здесь силы 2) и 4) имеют, как выяснилось, одинаковую природу. В настоящее время ведется интенсивная работа по поиску возможности дальнейшего объединения фундаментальных сил.– *Прим. ред.*

повседневной жизни (хотя именно им мы обязаны такими явлениями, как радиоактивность и ядерная энергия).

А как обстоит дело с обычными силами, подобными точкам, натяжениям или трению? К какой категории следует отнести их? Мы будем называть силы такого типа *контактными силами*[1], так как они возникают лишь при непосредственном контакте взаимодействующих тел. Согласно современной квантовой теории, эти силы своим происхождением обязаны электромагнитной силе. Например, сила, с которой ваши пальцы действуют на ручку или карандаш,– это результат электрического отталкивания внешних электронов атомов ваших пальцев и атомов карандаша.

* 5.9. Поле тяготения (гравитационное поле)

Большинство сил, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни, являются контактными силами: вы толкаете или тянете газонокосилку, теннисная ракетка действует с силой на теннисный мяч, когда они соприкасаются, или мяч действует с силой на оконное стекло при попадании в него и т. п. Но сила гравитационного взаимодействия (и даже электромагнитная сила, как мы увидим ниже) действует на расстоянии; сила существует даже тогда, когда два тела не находятся в контакте. Земля, например, действует силой на падающее яблоко; она также взаимодействует с Луной, удаленной от нее на расстояние 385000 км. Создаваемая Солнцем сила тяготения действует на Землю. Мысль о возможности существования сил, *действующих на расстоянии*, была трудна для понимания учеными прошлого. Сам Ньютон с трудом примирился с этим, когда опубликовал свой закон всемирного тяготения.

Трудности в понимании действия на расстоянии могут быть преодолены с помощью понятия силового поля, которое было развито в 19 в. Майклом Фарадеем (1791–1867) для объяснения электромагнетизма; только позже это понятие было применено к гравитации. В соответствии с общим понятием поля *гравитационным полем* окружено любое тело, обладающее массой, и это поле заполняет все пространство. Второе тело, находящееся в некоторой точке вблизи первого, испытывает действие силы, так как в этой точке существует гравитационное поле.

Гравитационное поле может быть описано количественно с помощью *напряженности гравитационного поля*, определяемой как сила гравитационного взаимодействия,

[1] Точнее, следовало бы вообще говорить об эмпирических, или вторичных силах, которые в принципе сводятся к фундаментальным, или первичным.– *Прим. ред.*

действующая на единицу массы в любой точке пространства. Для того чтобы измерить напряженность гравитационного поля в произвольной точке, необходимо поместить в эту точку небольшое «пробное» тело массой m и измерить силу $\mathbf{F}$, действующую на него (при этом надо быть уверенным, что на тело не действуют другие силы, кроме гравитационной). При этом напряженность гравитационного поля $\mathcal{G}$ в этой точке определяется как

$$\mathcal{G} = \mathbf{F}/m. \tag{5.5}$$

Таким образом, $\mathcal{G}$ измеряется в единицах Н/кг.

Если поле тяготения вызвано одиночным телом с массой M (это, например, справедливо для тела с массой m, находящегося вблизи поверхности Земли), то

$$\mathcal{G} = \frac{GM}{r^2};$$

здесь r – расстояние от m до M, а G – универсальная гравитационная постоянная [см. формулы (5.1) и (5.3)]. Если гравитационное поле обусловлено несколькими телами, то $\mathcal{G}$ равна векторной сумме напряженностей полей тяготения, создаваемых каждым из тел. Например, в межпланетном пространстве $\mathcal{G}$ является векторной суммой соответствующих величин для Земли, Солнца, Луны и других небесных тел, дающих существенный вклад в поле тяготения. Важным аспектом существования поля тяготения является то, что его напряженность в любой точке пространства не зависит от массы m пробного тела, помещаемого в эту точку; $\mathcal{G}$ зависит только от масс (и их расположения в пространстве) тел, которые создают поле в рассматриваемой точке.

Напряженность поля тяготения $\mathcal{G}$, определяемая формулой (5.5), аналогична ускорению свободного падения $\mathbf{g}$, которое мы рассматривали выше. Действительно, они могут иметь одно и то же численное значение. Но смысл этих понятий различен. Это различие можно проследить на примере анализа размерностей; хотя Н/кг = м/с^2 (поскольку 1 Н определяется как 1 кг · м/с^2; см. разд. 4.4), для напряженности поля тяготения мы используем Н/кг, в то время как ускорение, приобретаемое вследствие гравитационного взаимодействия, мы измеряем в м/с^2.

Интересно заметить, что поле тяготения в любой точке пространства изменится, если одно или несколько тел из тех, что создают это поле, изменят свое положение. Но это изменение не происходит мгновенно. По-видимому, необходимо какое-то время, чтобы мы могли почувствовать в любой точке пространства, что положение тела изменилось. Согласно общей теории относительности Эйнштейна, любое изменение напряженности поля распространяется в пространстве со скоростью света $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. Характерное время этого распространения экспериментально еще не определено.

Заключение

Частица, вращающаяся по окружности радиусом r с постоянной скоростью v, испытывает действие силы, которая в любой момент времени направлена к центру окружности. Величина этой силы равна произведению массы частицы m на центростремительное ускорение v^2/r.

Согласно *закону всемирного тяготения* Ньютона, любая частица во Вселенной притягивается любой другой частицей с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Эта сила направлена вдоль прямой, соединяющей две взаимодействующие частицы. Именно эта сила гравитационного притяжения удерживает на орбите Луну при ее обращении вокруг Земли, а планеты – при их обращении вокруг Солнца. Полная, или результирующая, сила тяготения, действующая на любое тело, является векторной суммой сил, вызванных всеми другими телами; во многих случаях при этом можно пренебречь влиянием всех тел, кроме одного или двух, дающих основной вклад.

Три закона Ньютона вместе с его законом всемирного тяготения составляют теорию Вселенной, имеющую широкий диапазон применений. Эти законы позволяют правильно описывать движение любого тела на Земле и на любом небесном теле; они послужили теоретическим обоснованием полученных экспериментально законов Кеплера для движения планет.

Вопросы

1. Бытует мнение, что в стиральной машине капли воды удаляются с одежды под действием центробежной силы, отбрасывающей их к стенкам машины. Правильно ли это мнение?

2. В отчетах об экспериментах на центрифуге часто ограничиваются указанием только значений числа оборотов в минуту. Почему этого недостаточно?

3. Предположим, что автомобиль с постоянной скоростью движется по горной дороге. В каких точках сила нормального давления автомобиля на дорогу принимает максимальное и минимальное значения: а) на вершине холма; б) в низшей точке вогнутой долины, соединяющей два холма; в) на ровной дороге у подножья холма?

4. Укажите все силы, действующие на ребенка, катающегося на карусельной лошадке.

5. Действует ли на Землю сила гравитационного притяжения со стороны яблока? Если да, то чему равна эта сила? Рассмотрите яблоко, а) висящее на яблоне и б) падающее с яблони.

6. Как изменилась бы орбита Луны, если бы масса Земли удвоилась?

7. Пусть космический корабль движется с постоянной скоростью от Земли к Марсу. Ускорение свободного падения вблизи поверхности Марса $g = 3{,}8$ м/с^2. Изобразите графически полную гравитационную силу, действующую на пассажира массой 70 кг, как функцию расстояния между кораблем и одной из планет.

8. Гравитационное притяжение Солнца, действующее на Землю, во много раз превышает гравитационное притяжение Луны. Несмотря на это, за земные приливы в основном ответственна Луна. Объясните.

9. Истоки реки Миссисипи ближе к центру Земли, чем ее устье в Луизиане (так как Земля на экваторе «толще», чем на полюсах). Объясните, как может Миссисипи течь «в гору»?

10. Где тело весит больше: на экваторе или полюсах? Какие два явления необходимо учитывать? Оказывают ли эти явления противоположное влияние?

11. Где – на экваторе или на Северном полюсе – вы купите в магазине большее количество му-

ки, весящей 1 Н? Зависит ли ваш ответ от того, на каких весах – пружинных или рычажных – вам будут взвешивать муку? Объясните.

12. В большинстве точек на Земле нить отвеса не указывает точное направление к центру Земли. Почему это происходит?

13. В каком случае ваш вес, измеренный на пружинных весах в движущемся лифте, будет наибольшим: а) когда лифт движется с ускорением, направленным вертикально вниз по направлению к Земле; б) когда лифт движется с ускорением, направленным вертикально вверх; в) когда лифт находится в состоянии свободного падения или г) когда лифт движется вверх с постоянной скоростью? В каком из этих случаев измеренный вес будет наименьшим? В каком случае он будет таким же, если измерения проводятся не в лифте, а на поверхности земли?

14. Предположим, что вы находитесь внутри спутника, обращающегося вокруг Земли. Как вы могли бы справиться со своим перемещением по спутнику, питьем воды или тем, чтобы положить ножницы на стол?

15. У спутника, движущегося вокруг Земли по круговой орбите, ослабло крепление антенны и антенна отделилась от спутника. Опишите последующее движение антенны. Если она упадет на Землю, то укажите, в каком месте; если не упадет, то опишите, каким способом можно сделать так, чтобы антенна приземлилась.

16. В полночь Солнце находится точно под нами, на прямой, проходящей через центр Земли. Не становимся ли мы ночью тяжелее по сравнению с полднем из-за силы гравитационного притяжения Солнца? Объясните.

17. Сила гравитационного притяжения Луны Землей равна половине силы гравитационного притяжения Луны Солнцем (см. пример 5.7). Почему Луна не улетает прочь от Земли?

18. Космонавты, находящиеся долгое время в космическом пространстве, могут испытать отрицательные последствия невесомости. Можно создать искусственную силу тяжести, придав кораблю форму велосипедного колеса и затем вращая этот корабль относительно оси подобно велосипедному колесу. При этом космонавты будут находиться внутри «обода» колеса. Объясните, каким образом в таком корабле возникает искусственная сила тяжести? Рассмотрите: а) как будут падать предметы в таком корабле; б) силу, которая будет действовать на ступни космонавтов; в) любые другие проявления искусственной силы тяжести, которые вы можете придумать.

19. Иногда задают вопрос: «Что удерживает спутник на орбите при его вращении вокруг Земли?» Как бы вы ответили на этот вопрос?

20. Объясните, почему бегущий человек испытывает состояние «свободного падения», или «невесомости», в моменты отрыва от поверхности Земли.

21. Зимой Земля вращается по своей орбите вокруг Солнца быстрее, чем летом. Когда она находится ближе к Солнцу – зимой или летом? Влияет ли это на времена года? Объясните.

22. Обсудите разницу между понятиями ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ и напряженности гравитационного поля $\mathscr{G}$.

Задачи

Раздел 5.1

1. (I) Рассчитайте центростремительное ускорение Земли, движущейся по орбите вокруг Солнца, и суммарную силу, действующую на Землю. Какие небесные тела создают эти силы? Считайте, что орбита Земли представляет собой окружность радиусом $1{,}49 \cdot 10^{11}$ м.

2. (I) С какой максимальной скоростью автомобиль массой 1300 кг может проходить по горизонтальной дороге поворот радиусом 95 м, если коэффициент трения между шинами автомобиля и дороги равен 0,55. Зависит ли ответ от массы автомобиля?

3. (I) Чему равен коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой, если автомобиль проходит закругление дороги радиусом 62 м со скоростью 55 км/ч?

4. (I) К камню массой 0,60 кг приложена сила 26,0 Н таким образом, что он вращается по окружности радиусом 0,40 м, расположенной в горизонтальной плоскости. Найдите, с какой скоростью вращается камень.

5. (I) Ребенок, катающийся на карусельной лошадке, движется со скоростью 1,50 м/с на расстоянии 7,8 м от оси вращения карусели. Рассчитайте а) центростремительное ускорение ребенка и б) результирующую горизонтальную силу, действующую на ребенка (масса ребенка 25 кг).

6. (II) Сколько оборотов в минуту должна совершать центрифуга, чтобы частица, находящаяся на расстоянии 9,0 см от оси вращения, испытывала ускорение $110\,000g$?

7. (II) Можно ли вращать ведро с водой в вертикальной плоскости настолько быстро, что вода из него не будет выливаться? Если да, то с какой наименьшей скоростью нужно вращать ведро?

8. (II) Монета находится на расстоянии 12,0 см от оси вращающегося диска, скорость вращения которого можно менять. Когда частота вращения диска медленно увеличивается, монета покоится на диске до тех пор, пока частота

Рис. 5.19. Аттракцион «американские горы» в калифорнийском парке.

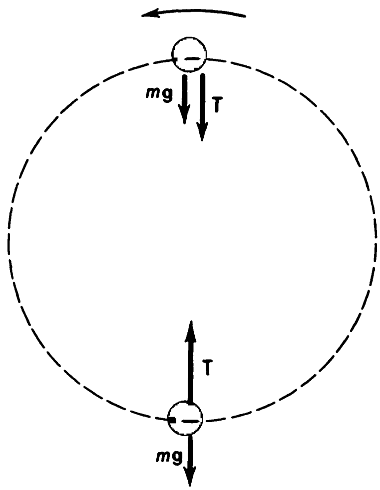


Рис. 5.20.

вращения диска не станет равной 58 об/мин, после чего монета сдвигается к краю диска. Чему равен коэффициент трения покоя между диском и монетой?

9. (II) На карнавале можно увидеть карусель, на которой люди прижимаются к внутренней стенке вертикального цилиндра радиусом 2,9 м, вращающегося с частотой 0,92 об/с (при этом у него убирается дно). Каков должен быть коэффициент трения, чтобы человек, катающийся на такой карусели, не выпал из нее? Безопасна ли она?

10. (II) Какую минимальную скорость должен иметь поезд на роликах в аттракционе «американские горы» (рис. 5.19) в тот момент, когда он находится в верхней части колеи, имеющей вид вертикальной окружности, чтобы пассажиры из него не выпали. Считайте, что радиус окружности равен 8,0 м.

11. (II) Шарик, закрепленный на конце нити,

вращается с постоянной скоростью по вертикальной окружности радиусом 96,5 см (рис. 5.20). Рассчитайте натяжение нити, когда шарик находится а) в наивысшей точке траектории и б) в наинизшей точке траектории. Скорость шарика равна 3,15 м/с, а масса 0,335 кг.

12. (II) Шарик массой m, закрепленный на шнуре длиной L, вращается по вертикальной окружности. Чему должна быть равна наименьшая скорость v шарика в самой высокой точке окружности, чтобы при прохождении этой точки шариком шнур оставался натянутым?

13. (II) Проектируемая космическая станция представляет собой трубку кругового сечения с тонкими стенками, свернутую в виде окружности и вращающуюся вокруг своей оси симметрии (аналогично тому, как вращается велосипедное колесо). Диаметр этой окружности равен 1,6 км. а) Какая часть внутренней поверхности трубы будет для обитателей станции играть роль «пола»? б) С какой частотой (в оборотах в сутки) должна вращаться станция, чтобы на ней создавалась искусственная сила тяжести, равная силе тяжести на поверхности Земли ($1g$)?

14. (III) Наклон профилированной дороги в месте поворота с радиусом кривизны 60 м подобран таким образом, чтобы в этот поворот вписывался автомобиль, движущийся со скоростью 60 км/ч. Каков должен быть коэффициент трения покоя, чтобы автомобиль, едущий со скоростью 90 км/ч, не испытал заноса?

15. (III) Автомобиль массой 1200 кг выполняет поворот с радиусом кривизны 65 м по профилированной дороге с углом наклона 14° относительно горизонтальной плоскости. Понадобится ли сила трения для того, чтобы автомобиль мог выполнить поворот, двигаясь со скоростью 80 км/ч? Если да, то чему должна быть равна и как направлена эта сила трения?

16. (III) Образующая боковой поверхности конуса составляет угол ϕ с вертикалью. Небольшое тело массой m помещено на внутреннюю поверхность конуса, обращенного вверх основанием и вращающегося с частотой f (оборотов в секунду) вокруг своей оси симметрии. В каких точках на внутренней поверхности конуса тело не будет соскальзывать, если коэффициент трения покоя равен μ? (Укажите наибольшее и наименьшее расстояния r от оси вращения до точек, где тело находится в покое относительно поверхности конуса.)

Разделы 5.2 и 5.3

17. (I) Рассчитайте силу тяжести, действующую на космический корабль массой 850 кг, находящийся над поверхностью Земли на высоте 12 800 км.

18. (I) Вычислите ускорение свободного падения вблизи поверхности Луны. Радиус Луны приближенно равен $1{,}7\cdot10^6$ м, а ее масса равна $7{,}4\cdot10^{22}$ кг.

19. (I) На какой высоте над поверхностью Земли ускорение свободного падения будет равно половине величины ускорения свободного падения на ее поверхности?

20. (II) Выведите формулу для массы планеты в зависимости от ее радиуса r, ускорения свободного падения на поверхности g_p и гравитационной постоянной G.

21. (II) Четыре тела сферической формы, имеющие массу 8,0 кг каждое, расположены в вершинах квадрата со стороной 0,50 м. Рассчитайте величину и направление силы гравитационного притяжения, действующей на одну из сфер со стороны остальных трех.

22. (II) На каком расстоянии от Земли результирующая гравитационная сила, действующая на космический корабль, летящий от Земли к Луне, равна нулю? (В этой точке силы притяжения Луны и Земли становятся равными и противоположно направленными.)

23. (III) С помощью интегрального исчисления покажите, что сила гравитационного притяжения, действующая на частицу с массой m со стороны тела сферической формы с однородно распределенной массой M, описывается формулой (5.1), в которой r – расстояние от частицы m до центра сферы, и предполагается, что вся масса сферического тела сосредоточена в его центре. [*Подсказка*: при расчете разбейте сферу на бесконечно тонкие сферические слои, а затем каждый слой разбейте на тонкие кольца так, чтобы все части каждого кольца находились на одинаковом расстоянии от частицы m. Определите силу, действующую на частицу m со стороны каждого кольца, и просуммируйте (проинтегрируйте) результат по кольцам, а затем по слоям.]

Раздел 5.4

24. (I) Рассчитайте эффективное значение гравитационного ускорения на высоте а) 3200 м и б) 3200 км над поверхностью Земли.

25. (I) Определите массу Солнца, используя известное значение периода обращения вокруг него Земли и ее расстояния от Солнца.

26. (I) Предположим, что масса Земли удвоилась, но плотность ее и сферическая форма сохранились. Как изменится сила тяжести, действующая на тела, расположенные на ее поверхности?

27. (III) а) Используя биномиальное разложение

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots,$$

покажите, что на высоте Δr над поверхностью Земли значение g меняется приблизительно на величину

$$\Delta g \approx -2g\frac{\Delta r}{r_з}$$

при условии, что $\Delta r \ll r_з$ (здесь $r_з$ – радиус Земли). б) Что означает знак минус в этом соотношении? в) С помощью этого соотношения вычислите эффективное значение величины g на высоте 100 км над поверхностью Земли. Сравните результат с полученным ранее прямым вычислением с помощью формулы (5.1).

28. (III) Определите величину и направление эффективного ускорения свободного падения **g** на поверхности Земли в точке, находящейся на широте 45°. Считайте, что Земля имеет сферическую форму и вращается.

29. (III) Судно идет вдоль экватора со скоростью v. Покажите, что вес w тела, взвешиваемого на корабле, приближенно равен $w = w_0(1 \pm 4\pi f v/g)$, где f – частота вращения Земли (в оборотах в секунду). Почему здесь имеются оба знака $\pm$? Считайте, что w_0 – вес тела, измеренный в условиях, когда судно находится в покое относительно Земли.

Раздел 5.6

30. (I) Обезьяна массой 15,0 кг подвешена на шнуре к потолку лифта. Шнур выдерживает силу натяжения 185 Н. При ускорении лифта шнур оборвался. Чему при этом равно наименьшее ускорение лифта (по величине и направлению)?

31. (I) Найдите скорость спутника, обращающегося по стационарной круговой орбите на высоте 3200 км над поверхностью Земли.

32. (II) Один из спутников Юпитера, открытый Галилеем, имеет период обращения $1{,}44 \cdot 10^6$ с и отстоит от Юпитера в среднем на расстояние $1{,}9 \cdot 10^9$ м. Используя эти данные, вычислите массу Юпитера.

33. (II) Что покажут пружинные весы при взвешивании женщины массой 55,0 кг, находящейся в лифте, если лифт движется а) с постоянной скоростью 5,0 м/с вверх; б) с постоянной скоростью 5,0 м/с вниз; в) с ускорением $0{,}33g$, направленным вверх; г) с ускорением $0{,}33g$, направленным вниз, и д) если лифт свободно падает?

34. (II) Колесо обозрения диаметром 22,5 м делает один оборот за 12,5 с. Чему равно относительное изменение веса человека, когда он находится а) в верхней точке колеса и б) у основания колеса? (Сравните полученные вами результаты с весом человека, когда он находится в покое относительно Земли.)

35. (II) Чему равен вес космонавта массой 65 кг, находящегося в космическом корабле, движущемся на расстоянии 4200 км от центра Луны, если а) корабль движется с постоянной скоростью; б) корабль движется с ускорением, направленным к поверхности Луны, равным 3,6 м/с^2. Установите его «направление» в каждом из рассматриваемых случаев.

36. (II) а) Покажите, что масса Солнца определяется формулой $M_С = (4\pi^2 r^3)/(GT^2)$, где T – период обращения любой из планет (время, необходимое для совершения одного оборота вокруг Солнца), r – радиус орбиты этой планеты (по предположению орбита круговая) и G – гравитационная постоянная. б) Вычислите массу Солнца, используя в качестве выбранной планеты Землю.

37. (II) Какими были бы земные сутки, если бы Земля вращалась так быстро, что тела на экваторе были бы невесомы?

38. (II) Опишите, каким образом можно определить массу планеты по наблюдениям орбиты одного из ее спутников.

39. (II) Две звезды находятся на расстоянии $8{,}0 \cdot 10^{10}$ м друг от друга и вращаются относительно точки, расположенной посередине между ними, с частотой 1 оборот за каждые 12,6 года. а) Почему звезды не падают друг на друга из-за взаимного гравитационного притяжения? б) Чему равна масса каждой звезды (считайте, что массы звезд одинаковы)?

40. (III) В лифте установлена наклонная плоскость, угол наклона которой относительно пола равен 30°. Тело массой m без трения скользит по плоскости. С каким ускорением оно движется, если лифт: а) движется с ускорением $0{,}50g$, направленным вверх; б) движется с ускорением $0{,}50g$, направленным вниз; в) свободно падает; г) движется вверх с постоянной скоростью?

Раздел 5.7

41. (I) С помощью законов Кеплера, если известно, что период обращения Луны равен 27,4 сут, найдите период обращения искусственного спутника по орбите вблизи поверхности Земли.

42. (I) Астероид Икар, имеющий всего несколько сот метров в поперечнике, вращается вокруг Солнца, как и другие планеты. Период обращения его 410 сут. Чему равно среднее расстояние от него до Солнца?

43. (I) Венера находится на среднем расстоянии от Солнца, равном $1{,}08 \cdot 10^8$ км. Оцените приближенно длительность венерианского года, учитывая, что Земля удалена от Солнца в среднем на $1{,}49 \cdot 10^8$ км.

44. (II) С помощью третьего закона Кеплера найдите, на какой высоте над Землей должна проходить орбита искусственного спутника, если он находится в одном и том же месте относительно Земли.

45. (II) а) Используя второй закон Кеплера, покажите, что отношение скоростей планеты, когда она располагается ближе всего к Солнцу и дальше всего от Солнца, равно обратному отношению расстояний от Солнца до ближайшей и самой далекой точек орбиты планеты: $v_{\text{ближ}}/v_{\text{дальн}} = d_{\text{дальн}}/d_{\text{ближ}}$. б) Учитывая, что расстояние от Земли до Солнца меняется в пределах $(1{,}47\text{–}1{,}52) \cdot 10^{11}$ м, вычислите наименьшую и наибольшую скорости Земли при ее обращении вокруг Солнца.

*Раздел 5.9

***46.** (I) Чему равна величина и каково направление напряженности поля тяготения в точке, находящейся посередине между Землей и Луной?

***47.** (I) а) Чему равна напряженность поля тяготения, создаваемого Солнцем на поверхности Земли? б) Оказывает ли это поле существенное влияние на ваш вес?

***48.** (III) Две одинаковые частицы массой m каждая расположены на оси x в точках $x = +x_0$ и $x = -x_0$. а) Напишите формулу для напряженности поля тяготения, создаваемого этими двумя частицами в точках на оси y, т. е. найдите зависимость $\mathcal{G}$ от y, m, x_0 и других переменных. б) В какой точке (или точках) на оси y величина $\mathcal{G}$ имеет максимальное значение? Чему равно это максимальное значение? (*Подсказка*: вычислите производную $d\mathcal{G}/dy$.)