6 Работа и энергия

До сих пор мы изучали движение частицы в рамках трех законов динамики Ньютона. При этом для количественного описания движения мы использовали понятие *силы*. В настоящей главе и в двух последующих мы рассмотрим альтернативное описание движения частицы с помощью понятий *энергии* и *импульса*. Важной особенностью этих величин является то, что они *сохраняются*; иными словами, при достаточно общих условиях их значения остаются постоянными. (Свойство этих величин сохраняться не только позволяет нам глубже заглянуть в устройство мира, но и дает другой способ решения практических задач.)

Законы сохранения энергии и импульса особенно полезны, когда мы имеем дело с системами многих тел, в которых детальное рассмотрение действующих сил представляло бы трудную задачу.

Эта глава посвящена очень важному понятию *энергии* и тесно связанному с ним понятию *работы*. Поскольку эти величины являются скалярными и не имеют направления, во многих случаях с ними проще иметь дело, чем с векторными силами. Важная роль энергии обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, это сохраняющаяся величина, а во-вторых, это – понятие, которое находит применение не только для изучения механического движения, но и во всех областях физики, а также в других науках. Однако, прежде чем рассматривать саму энергию, выясним сначала, что представляет собой работа.

6.1. Работа, совершаемая постоянной силой

В повседневной жизни слово *работа* употребляется в различном смысле. В физике же работа имеет строго определенный смысл; она описывает то, что совершает сила, когда, действуя на тело, она перемещает его на некоторое расстояние. В частности, **работа**, совершаемая постоянной (как по величине, так и по направлению) силой при перемещении частицы определяется как *произведение величины силы и проекции перемещения на направление вдоль силы*. Это можно записать следующим образом:

$$W = Fd\cos\theta; \tag{6.1}$$

здесь F – постоянная сила, d – результирующее перемещение частицы, а θ – угол между направлениями силы и перемещения. (Следует заметить, что $d\cos\theta$ – это величина составляющей вектора **d**, параллельной вектору **F**.)

Рассмотрим случай, когда сила и перемещение имеют одно и то же направление, так что $\cos\theta = 1$ и $W = Fd$. Например, если вы толкаете нагруженную продуктовую тележку с постоянной горизонтальной силой 30 Н и перемещаете ее на расстояние 50 м, то вы совершаете над тележкой работу (30 Н)(50 м) = 1500 Н·м.

Из этого примера следует, что в системе единиц СИ работа измеряется в ньютонах, умноженных на метры; для удобства единице измерения работы присвоено специальное наименование *джоуль* (Дж): 1 Дж = 1 Н·м. В системе СГС единица измерения работы называется *эргом* и определяется как 1 эрг = 1 дин·см. Легко показать, что 1 Дж = 10^7 эрг.

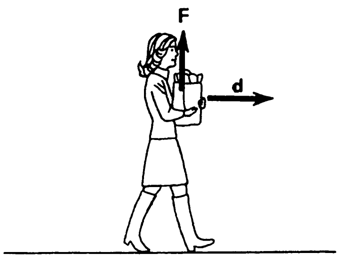

Рис. 6.1. В этом случае работа равна нулю, поскольку сила **F** перпендикулярна перемещению **d**.

Сила может быть приложена к телу и не совершать при этом работы. Например, если вы держите в руках тяжелую сумку с продуктами и не двигаетесь, то вы не совершаете работы; вы можете устать (и действительно ваши мускулы расходуют энергию), но, поскольку сумка остается в покое (т. е. ее перемещение равно нулю), работа $W = 0$. Вы также не совершаете работы, когда несете сумку с продуктами так, как показано на рис. 6.1, т.е. идете по горизонтальному полу. Для перемещения вашего груза с постоянной скоростью не требуется никакой горизонтальной силы. Однако вы действуете на сумку с силой **F**, направленной вверх и равной ее весу. Но эта сила перпендикулярна горизонтальному перемещению сумки и, следовательно, не влияет на горизонтальное движение; поэтому вертикальная сила не производит работы. Это согласуется с нашим определением работы (6.1); в самом деле, $W = 0$, поскольку $\theta = 90°$, а $\cos 90° = 0$. Таким образом, когда сила направлена перпендикулярно перемещению, она не совершает работы.

Понаблюдаем теперь за мальчиком, который тянет за собой тележку, прилагая силу **F** под углом θ к горизонту (рис. 6.2). Перемещая тележку на расстояние d вдоль поверхности земли, он совершает работу, которую нетрудно вычислить по формуле (6.1). Если мальчик тянет тележку с силой 20 Н под углом $\theta = 30°$ и тележка перемещается на расстояние 100 м, то полная работа оказывается равной (20 Н)(100 м)(0,866) $\approx$ 1700 Дж.

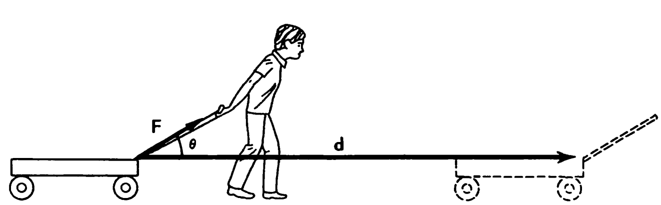

Рис. 6.2. Работа, совершаемая силой **F**, действующей под углом θ к поверхности земли, равна $Fd\cos\theta$.

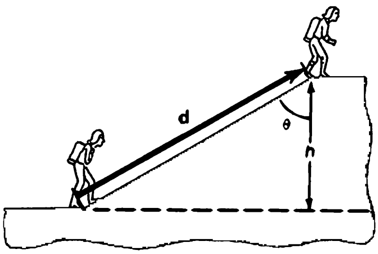

Рис. 6.3. Пример 6.1.

Пример 6.1. Вычислите работу, совершаемую против силы тяжести при подъеме рюкзака массой 15,0 кг на холм высотой $h = 10{,}0$ м (рис. 6.3).

Решение. Пренебрегая возможным ускорением, будем считать, что человек прилагает к рюкзаку постоянную силу $\mathbf{F}$, направленную вертикально вверх и численно равную силе тяжести, действующей на рюкзак: $(15{,}0\ \text{кг})(9{,}80\ \text{м/с}^2) = 147$ Н. Формула (6.1) может быть переписана в виде $W = F(d\cos\theta)$, и из из рис. 6.3 следует, что $d\cos\theta = h$. Следовательно, мы имеем

$$W = Fh = (147\ \text{Н})(10{,}0\ \text{м}) = 1470\ \text{Дж}.$$

Заметим, что работа зависит только от изменения высоты и не зависит от крутизны холма. При вертикальном подъеме рюкзака на такую же высоту h совершается та же работа. Чтобы найти полную работу, которую человек совершает против силы тяжести при подъеме на холм, нужно поступить аналогичным образом, но использовать силу тяжести, действующую на человека и на рюкзак.

Как и в случае с силой, когда мы имеем дело с работой, необходимо уточнять, совершается ли работа *данным телом*, или она совершается *над* телом. Существенно также выяснить, производится ли работа какой-либо одной конкретной силой или *результирующей сил*, действующих на тело.

Полная (или результирующая) работа, совершаемая над телом, является алгебраической суммой работ каждой из сил, действующих на тело; разумеется, что эта полная работа производится равнодействующей всех сил, действующих на тело. Например, когда человек медленно поднимает груз массой 5,0 кг с пола на стол высотой 1,0 м, на груз действуют две силы: действующая вертикально вверх сила со стороны человека и направленная вертикально вниз сила тяжести $mg = 49$ Н. Если груз поднимается аккуратно с постоянной скоростью, то сила, прикладываемая человеком, равна силе тяжести, так что работа, совершаемая *человеком*, равна $W = (49\ \text{Н})(1{,}0\ \text{м}) = 49$ Дж. Если считать положительным направление вверх, то работа, совершаемая *силой тяжести*, равна $(-49\ \text{Н})(1{,}0\ \text{м}) = -49$ Дж. [Заметим, что, когда направление силы противоположно перемещению, работа оказывается отрицательной; в этом случае в формуле (6.1) $\theta = 180°$.] Таким образом, *полная работа* над грузом равна 49 Дж + (– 49 Дж) = 0. Это согласуется с тем, что, поскольку полная сила, действующая на груз, равна нулю, полная работа над грузом должна быть равна нулю. Это, разумеется, не противоречит тому, что человек действительно совершает над грузом работу 49 Дж.

6.2. Скалярное произведение двух векторов

Хотя работа скалярная величина, она равна произведению двух векторных величин: силы и перемещения. Поэтому рассмотрим теперь произведение векторов.

Поскольку векторы характеризуются и величиной, и направлением, их нельзя перемножать тем же способом, что и скалярные величины. Вместо этого мы должны *определить* операцию умножения векторов. Среди многих возможных способов умножения векторов существует три способа, которые используются в физике: 1) умножение вектора на скаляр, которое уже обсуждалось в разд. 3.3; 2) умножение одного вектора на другой вектор, когда получается скаляр; 3) умножение одного вектора на другой, когда получается новый вектор. Третий тип произведения, называемый *векторным произведением*, мы рассмотрим ниже (в разд. 10.1). Сейчас мы рассмотрим второй тип, называемый *скалярным произведением*. **Скалярное произведение** двух векторов **A** и **B** записывается следующим образом:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \tag{6.2}$$

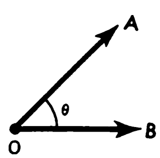

Рис. 6.4. Скалярное произведение двух векторов **A** и **B** записывается как $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$.

где A и B – величины векторов, θ – наименьший угол ($< 180°$) между ними (в случае, когда эти векторы исходят из общего начала; рис. 6.4). Так как A, B и $\cos\theta$ – скалярные величины, мы имеем скалярное произведение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Выражение (6.2) полностью совпадает с определением работы, совершаемой постоянной силой [формула (6.1)]. Это означает, что работу, совершаемую постоянной силой, можно записать как скалярное произведение вектора силы и вектора перемещения:

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = Fd\cos\theta. \tag{6.3}$$

Действительно, скалярное произведение в виде (6.2) записывается так потому, что некоторые важные физические величины, такие, как работа и другие величины, с которыми мы встретимся ниже, можно представить скалярным произведением двух векторов. (Мы могли бы определить скалярное произведение, например, как $AB\,\mathrm{tg}\,\theta$ или $AB^2\cos(\theta/2)$, но эти определения были бы бесполезными для физики.)

Скалярное произведение можно эквивалентно определить как произведение абсолютной величины одного вектора (скажем, A) и проекции другого вектора на направление первого ($B\cos\theta$).

Поскольку A, B и $\cos\theta$ – скалярные величины, не имеет значения, в каком порядке они перемножаются. Следовательно, скалярное произведение *коммутативно*:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}.$$

Нетрудно также показать, что оно *дистрибутивно* (см.

задачу 23):

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}.$$

Используя это свойство и записывая каждый вектор через его проекции на три взаимно перпендикулярные оси [разд. 3.5, формула (3.5)], можно показать (см. задачу 15), что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad (6.4)$$

Это равенство очень полезно.

Если вектор **A** перпендикулярен **B**, то $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, однако обратное неверно; значение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ может осуществляться тремя способами: $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = 0$ или $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$.

Пример 6.2. Сила на рис. 6.2 равна 20 Н и составляет с горизонтом угол 30°. Рассчитайте с помощью формулы (6.4) работу, совершенную этой силой при перемещении тележки на 100 м по горизонтали.

Решение. Направим ось x горизонтально вправо, а ось y вертикально вверх. Тогда $\mathbf{F} = (F\cos\theta)\mathbf{i} + (F\sin\theta)\mathbf{j} = (17\ \text{Н})\mathbf{i} + (10\ \text{Н})\mathbf{j}$, в то время как $\mathbf{d} = (100\ \text{м})\mathbf{i}$. Используя формулу (6.4), получаем

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = (17\ \text{Н})(100\ \text{м}) + (10\ \text{Н})(0) + (0)(0) = 1700\ \text{Дж}.$$

Заметим, что, выбирая направление оси x вдоль **d**, мы упростили расчеты, поскольку в такой системе координат вектор **d** имеет лишь одну составляющую.

6.3. Работа, совершаемая переменной силой

Во многих случаях в процессе движения сила меняется по величине или по направлению. Например, при старте ракеты с Земли совершается работа против силы тяжести, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния ракеты до центра Земли. Сила, обусловленная деформацией пружины, возрастает с увеличением этой деформации. Как можно рассчитать работу, совершаемую переменной силой?

На рис. 6.5 показана траектория частицы, движущейся в плоскости xy из точки a в точку b. Траектория разделена на малые интервалы длиной Δl_1, Δl_2, ..., Δl_7. Сила **F** действует на частицу в любой точке траектории: на рис. 6.5 показана сила, действующая в двух точках и обозначаемая в этих точках соответственно как $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_5$. В пределах каждого интервала Δl сила меняется мало и ее можно считать постоянной. Тогда на первом интервале

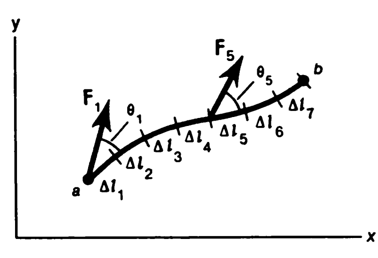

Рис. 6.5. Частица, на которую действует переменная сила **F**, движется по указанной здесь траектории из точки a в точку b.

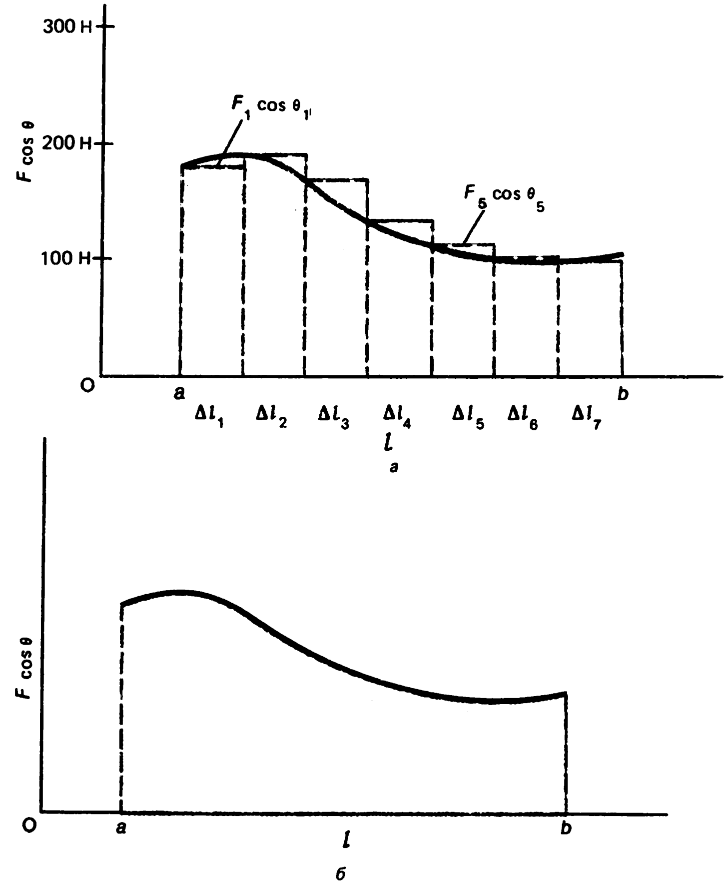

Рис. 6.6. Работа, совершаемая силой F, равна приближенно сумме площадей прямоугольников (*а*) и точно площади под кривой, описывающей зависимость $F\cos\theta$ от l (*б*).

сила совершает работу ΔW, приближенно [см. формулу (6.1)] равную

$$\Delta W \approx F_1 \cos\theta_1 \, \Delta l_1 .$$

Работа на втором интервале приближенно равна $F_2 \cos\theta_2 \, \Delta l_2$ и т.д. Полная работа при перемещении частицы на полное расстояние $l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_7$ равна сумме всех таких слагаемых:

$$W \approx \sum_{i=1}^{7} F_i \cos\theta_i \, \Delta l_i . \qquad (6.5)$$

Представим эту сумму графически (рис. 6.6, *а*). Для этого построим зависимость проекции $F\cos\theta$ от l. Отрезок l разделен на семь равных частей вертикальными штриховыми линиями. Значения $F\cos\theta$ на каждом отрезке Δl указываются горизонтальными штриховыми линиями. Каждый из затененных прямоугольников имеет площадь $(F_i \cos\theta_i)(\Delta l_i)$, равную работе, совершенной при перемещении частицы на Δl_i. Таким образом, определяемая выражением (6.5) работа равна сумме площадей всех прямоугольников. Если траекторию разбить на большее число отрезков, так что длина Δl_i станет меньше, то по формуле (6.5) мы определим работу более точно (при этом предположение о том, что сила F постоянна на каждом отрезке Δl_i, оказывается еще более справедливым). Если устремить длину каждого отрезка Δl_i к нулю (т. е. получить бесконечное число отрезков разбиения), то мы найдем точное значение совершенной работы:

$$W = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum F_i \cos\theta_i \Delta l_i,$$

$$W = \int_a^b F \cos\theta \, dl. \qquad (6.6)$$

Этот предел при $\Delta l_i \to 0$ называется *интегралом* от $F\cos\theta\, dl$ в пределах от a до b и записывается в виде специального знака. Символ интеграла $\int$ представляет собой вытянутую букву S и указывает на вычисление бесконечной суммы; при этом Δl заменяется на dl, что обозначает бесконечно малое расстояние.

В пределе $\Delta l \to 0$ полная площадь прямоугольников (рис. 6.6, *а*) оказывается равна площади между кривой $F\cos\theta$ и осью l, ограниченной перпендикулярами к оси l в точках a и b (рис. 6.6, *б*). Иными словами, *работа, совершаемая переменной силой при перемещении частицы от одной точки до другой, численно равна площади под кривой зависимости $F\cos\theta$ от l между этими двумя точками a и b.*

В пределе $\Delta l \to 0$ бесконечно малое расстояние dl равно[1)] длине вектора бесконечно малого перемещения $d\mathbf{l}$. Направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с касательной к кривой в этой точке; следовательно, θ – это угол между векторами $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{l}$ в любой точке траектории. Таким образом, используя скалярное произведение, можно написать следующее выражение:

Рис. 6.7. Абсолютная величина вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ может не совпадать с пройденным путем Δl.

$$W = \int_a^b F\cos\theta\, dl = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}. \qquad (6.7)$$

Это *наиболее общее определение работы*. Интеграл, входящий в формулу (6.7), называется *криволинейным интегралом*, так как он представляет собой интеграл от функции $F\cos\theta$ вдоль линии, которая представляет собой траекторию тела [формула (6.1) для работы постоянной силы – это частный случай формулы (6.7)].

1) Расстояние Δl, пройденное частицей вдоль траектории, в общем случае не совпадает с перемещением $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 6.7). Но в пределе бесконечно малых величин они совпадают: $dl = dr$, и в этом пределе $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$. Заметим, что вектор $\Delta\mathbf{l}$ нельзя определить, поскольку при прохождении искривленной траектории он не имеет однозначного направления; направление $d\mathbf{l}$ можно определить как направление касательной к кривой в данной точке, так что $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ и $dl = dr$.

Для вычисления работы с помощью формул (6.6) или (6.7) существует несколько способов. Если произведение $F\cos\theta$ является функцией положения частицы, то можно построить график, как на рис. 6.6, *б*, и графически определить искомую площадь. Кроме того, можно выполнить численное интегрирование или численное суммирование (возможно, с применением ЭВМ или микрокалькуляторов). Можно также применить для вычисления интегралов аналитические методы. С этой целью F необходимо записать как функцию положения, т.е. как $F(x, y, z)$. В качестве примера использования интегрального исчисления рассмотрим одномерный случай и определим аналитически работу, совершаемую при растяжении пружины. Предположим, что один конец пружины прикреплен к стене. Для растяжения или сжатия такой пружины на величину x относительно ее нормальной (недеформированной) длины требуется сила, величина которой прямо пропорциональна x:

$$F(x) = kx,$$

где k – постоянная, называемая коэффициентом упругости пружины и характеризующая ее жесткость. Это соотношение для пружины иногда называют *законом Гука*[1]. Оно справедливо, если деформация x достаточно мала. Рассчитаем работу, совершаемую при растяжении (или сжатии) пружины на длину $x_b = x$ от ее длины в недеформированном состоянии ($x_a = 0$). Будем считать, что растягивается пружина медленно, так что ее ускорение равно нулю. Приложенная к пружине сила параллельна оси пружины (оси x); следовательно, векторы $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{l}$ параллельны друг другу. Таким образом, работу можно записать в виде (мы полагаем в этом случае, что $d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{i}$)[2]:

$$W = \int_{x_a=0}^{x_b=x} [F(x)\mathbf{i}]\cdot[dx\,\mathbf{i}] = \int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}kx^2.$$

(Следует заметить, что буквой x мы обозначали как переменную, по которой производится интегрирование, так и ее значение на верхнем пределе при интегрировании от $x_a = 0$ до $x_b = x$.) Таким образом, мы видим, что работа по растяжению пружины пропорциональна квадрату величины удлинения (или сжатия) пружины x. Это же можно получить, вычисляя площадь под прямой на гра-

[1] Это соотношение не совсем точно называть законом, поскольку оно является, во-первых, приближенным, а, во-вторых, относится лишь к ограниченному классу явлений. Большинство физиков предпочитает законом называть более общие и точные соотношения, такие, как законы динамики Ньютона или закон сохранения энергии (гл. 7).

[2] См. таблицу интегралов в приложении Б.

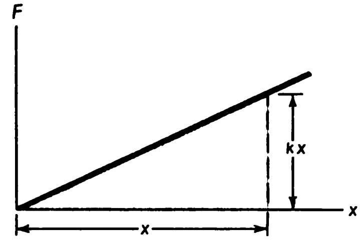

Рис. 6.8. Работа, совершаемая при растяжении пружины на длину x, равна площади треугольника под кривой $F = kx$. Поскольку площадь треугольника равна произведению полувысоты на основание, $W = (^1/_2)(x)(kx) = kx^2/2$.

фике зависимости F от x (в рассматриваемом случае $\cos\theta = 1$), как показано на рис. 6.8. Поскольку область, площадь которой нужно подсчитать, является треугольником с высотой kx и основанием x, работа, равная площади, запишется в виде

$$W = \frac{1}{2}(x)(kx) = \frac{1}{2}kx^2,$$

что совпадает с полученным выше выражением для W.

Пример 6.3. Математический маятник состоит из очень небольшого по размерам груза массой m, подвешенного на нити, имеющей пренебрежимо малую массу и длину L (рис. 6.9, *а*). К грузу в горизонтальном направлении прикладывается сила $\mathbf{F}$ (т. е. $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$), под действием которой он очень медленно движется, так что его ускорение в любой момент времени равно нулю. (Заметим, что величина силы $\mathbf{F}$ изменяется в зависимости от угла θ, который нить составляет с вертикалью в каждый момент времени.) а) Вычислите работу, совершенную этой силой $\mathbf{F}$, если маятник переместился из положения $\theta = 0$ в положение $\theta = \theta_0$. б) Определите работу, совершаемую силой тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, приложенной к грузу, и работу, совершаемую силой натяжения $\mathbf{F}_s$, приложенной к грузу со стороны нити.

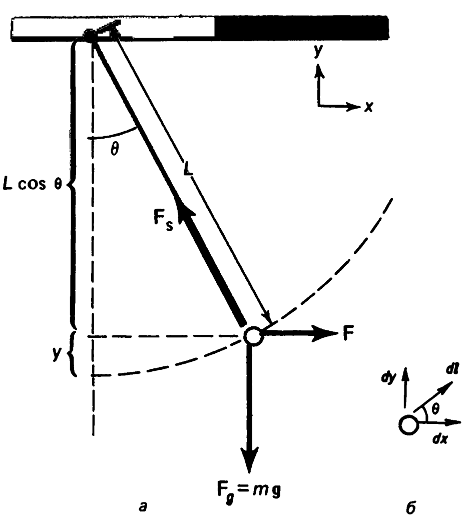

Рис. 6.9. *а* – математический маятник (пример 6.3); *б* – разложение на составляющие бесконечно малого перемещения груза маятника.

Решение. а) Выберем систему координат таким образом, чтобы в самом нижнем положении ($\theta = 0$) груз имел координаты $x = y = 0$. Поскольку ускорение груза равно нулю, результирующая сила, действующая на груз в любом его положении, равна нулю. Следовательно, x- и y-проекции результирующей силы должны быть равны нулю (рис. 6.9, *а*):

$$F - F_s \sin\theta = 0,$$

$$F_s \cos\theta - mg = 0.$$

Если из второго уравнения найти силу F_s и подставить найденное выражение в первое уравнение, то получим

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\theta, \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = \mathbf{i}\,mg\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

Отсюда следует, что F зависит от положения груза (мы задаем положение груза углом θ). Из рис. 6.9, *б* видно, что в любой точке

$$dl = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j},$$

где

$$dx = \cos\theta\, dl, \quad dy = \sin\theta\, dl.$$

Работа, совершаемая силой $\mathbf{F}$ при перемещении груза из положения $\theta = 0$ в положение $\theta = \theta_0$, вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}W_F &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\theta=0}^{\theta_0} (mg\,\mathrm{tg}\,\theta\,\mathbf{i})\cdot(\cos\theta\, dl\,\mathbf{i} + \\ &\quad + \sin\theta\, dl\,\mathbf{j}) = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} mg\,\mathrm{tg}\,\theta\cos\theta\, dl = \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta_0} mg\sin\theta\, dl = \\ &= \int_{y=0}^{y_0} mg\, dy = mgy\Big|_0^{y_0} = \\ &= mgy_0.\end{aligned}$$

Как видно из рис. 6.9, *а*, $y = L - L\cos\theta$; следовательно, $y_0 = L(1 - \cos\theta_0)$ и работа, выраженная через угол θ_0, запишется в виде $W_F = mgL(1 - \cos\theta_0)$.

б) Сила $\mathbf{F}_s$ не совершает работы, поскольку в любой момент времени она действует в направлении, перпендикулярном перемещению груза, так что $\mathbf{F}_s\cdot d\mathbf{l} = 0$ в любой точке. Работа, совершаемая силой тяжести, равна

$$\begin{aligned}W_g &= \int_{y=0}^{y_0} m\mathbf{g}\cdot d\mathbf{l} = \int_{y=0}^{y_0} (-mg\mathbf{j})\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}) = \\ &= -\int_0^{y_0} mg\, dy = -mgy\Big|_0^{y_0} = -mg\,y_0.\end{aligned}$$

Следует заметить, что полная работа, совершаемая всеми силами, действующими на груз, равна нулю, т.е. $mgy_0 + 0 - mgy_0 = 0$, что согласуется с тем, что результирующая сила, действующая на груз, равна нулю.

6.4. Кинетическая энергия и теорема о связи энергии и работы

Энергия представляет собой одно из наиболее важных понятий в науке. Однако мы не можем дать простого и в то же время достаточно строгого и полного определения энергии всего лишь в нескольких словах. Любой из различных ее видов можно определить весьма просто, и в этой главе мы определим кинетическую энергию (поступательного) движения и (механическую) потенциальную энергию. В последующих главах настоящего тома мы рассмотрим другие виды энергии, например связанные с тепловым движением (гл. 19–21). Все виды энергии объединяет то, что их можно определить согласованно друг с другом, т.е. их единицы измерения должны совпадать с единицами измерения работы (сила × расстояние), и таким образом, что сумма всех видов энергии, а именно *полная энергия*, должна оставаться неизменной, какой бы процесс мы ни рассматривали. Иными словами, энергию можно определить как величину, которая сохраняется. Позже мы рассмотрим это более подробно.

Для целей настоящей главы мы могли бы определить энергию обычным образом как «способность совершать работу». Это простое определение не вполне точно и в действительности не применимо ко всем видам энергии[1].

---

[1] Например, энергия, связанная с тепловым движением, во многих случаях не может быть превращена в работу (по крайней мере, полностью.– *Ред.*); подробнее об этом см. в гл. 21.

Однако его вполне достаточно для механической энергии, которая рассматривается в настоящей главе; на основе этого определения можно дать и наиболее общее определение энергии для чисто механических систем, поскольку связь между энергией и работой является фундаментальной. Определим теперь один из основных видов энергии, а именно кинетическую энергию, и обсудим ее свойства.

Движущееся тело может совершить работу над другим телом, с которым оно соударяется. Летящее пушечное ядро совершает работу над кирпичной стеной, которую оно проламывает; движущийся молоток производит работу по забиванию гвоздя. В любом из этих случаев движущееся тело действует с определенной силой на второе тело и перемещает его на некоторое расстояние. Движущееся тело обладает способностью совершать работу, и потому можно говорить, что оно обладает энергией. Энергию механического движения называют **кинетической энергией** (от греч. *kinetikos*, что значит «движение»).

Для того чтобы получить количественное определение кинетической энергии, вычислим работу, которую действительно может совершить движущееся тело в частном случае одномерного движения. Будем считать, что рассматриваемое тело является материальной частицей или в любом случае может двигаться лишь поступательно. Пусть тело массой m, движущееся со скоростью v, соударяется со вторым телом (над которым оно производит работу) и затем останавливается. Для конкретности будем думать о молотке, ударяющем по гвоздю. Предположим, что при ударе по гвоздю молоток действует на него с постоянной силой $\mathbf{F}$ во время перемещения гвоздя на расстояние d параллельно $\mathbf{F}$ (рис. 6.10) до тех пор, пока молоток не остановится. Таким образом, эта сила производит работу $W = Fd$. Нас интересует молоток, на который по третьему закону Ньютона гвоздь действует с силой $-\mathbf{F}$. Будем считать, что $-\mathbf{F}$ представляет собой результирующую силу, действующую на молоток (вообразим себе, что рука человека лишь слегка поддерживает молоток после достижения им скорости v). Тогда по

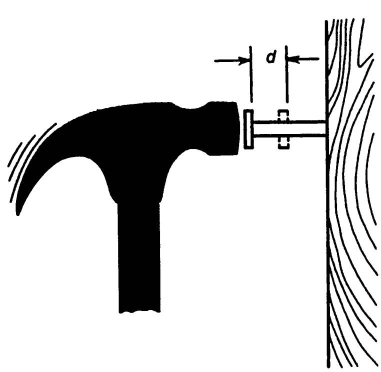

Рис. 6.10. Ударяя по гвоздю, молоток совершает работу.

второму закону Ньютона именно сила $-\mathbf{F}$ замедляет движение молотка от начальной скорости v до полной остановки, так что $-\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. С помощью выражения (2.9в) ускорение (отрицательное) молотка $\mathbf{a}$ (которое является постоянным, поскольку мы предположили, что сила $\mathbf{F}$ постоянна во время взаимодействия молотка с гвоздем) можно связать с начальной скоростью v и расстоянием d; поскольку конечная скорость равна нулю, мы имеем $v^2 = -2ad$. Объединяя эти соотношения, находим работу, совершаемую молотком:

$$W = Fd = -mad = m(v^2/2d)\,d = (1/2)\,mv^2\,.$$

Таким образом, тело массой m, движущееся со скоростью v, **если его остановить,** может совершить работу, равную $(1/2)\,mv^2$. **Поэтому величину** $(1/2)\,mv^2$ мы *определяем* как **кинетическую энергию** (КЭ) **поступательного (трансляционного) движения** тела:

$$\text{КЭ} = (1/2)\,mv^2\,. \tag{6.8}$$

Это определение кинетической энергии дает количественный смысл представлению об энергии как способности совершить работу. (Ниже мы покажем, что данное определение применимо также и в случае трех измерений.) Очень важно и то, что (как мы вскоре увидим) это определение кинетической энергии позволяет оперировать с еще более общим понятием энергии, которая сохраняется в любом процессе.

Мы убедились в том, что движущееся тело может совершать работу. Верно и обратное: чтобы тело приобрело кинетическую энергию, над ним необходимо совершить работу. Для того чтобы найти точную взаимосвязь, обратим ход рассуждений, приведенный выше. Предположим, что тело массой m движется прямолинейно с начальной скоростью v_1, причем для равномерного ускорения его до скорости v_2 к нему прикладывают постоянную результирующую силу F в направлении, параллельном движению тела, причем сила действует на расстоянии d. Тогда работа, совершаемая над телом, равна $W = Fd$. Используя второй закон Ньютона $F = ma$ и формулу (2.9в) (на этот раз записанную в виде $v_2^2 = v_1^2 + 2ad$, где v_1 и v_2 – начальная и конечная скорости соответственно), находим

$$W = Fd = mad = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}\right)d,$$

или

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta\text{КЭ}\,. \tag{6.9}$$

Таким образом:

> **Полная работа, произведенная над телом, равна изменению его кинетической энергии.**

Это утверждение иногда называют теоремой о **связи работы и энергии**. Заметим, однако, что, поскольку мы использовали второй закон Ньютона $F = ma$, сила F должна быть результирующей (суммой всех сил, действующих на тело). Поэтому сформулированное выше утверждение справедливо лишь в том случае, когда W–это *полная работа*, произведенная над телом.

Соотношение между работой и кинетической энергией можно рассматривать с двух точек зрения. С одной стороны, если над телом совершается работа, его кинетическая энергия возрастает. С другой стороны, если у тела имеется кинетическая энергия, оно может совершить работу над каким-либо другим телом, и если это происходит, то его собственная кинетическая энергия уменьшается. Это можно выразить иначе: если полная работа W, совершаемая над телом, положительна, то его кинетическая энергия возрастает: если же W отрицательна, то кинетическая энергия убывает. В случае когда полная работа равна нулю, кинетическая энергия остается постоянной.

Теорема о связи работы с кинетической энергией (6.9) доказана нами для одномерного случая и постоянной силы. Однако эта теорема справедлива и для случая переменной силы, когда движение происходит в двух или трех измерениях; докажем это. Предположим, что результирующая сила **F**, действующая на тело, изменяется как по величине, так и по направлению, причем тело движется по криволинейной траектории, как показано на рис. 6.5. При этом силу можно рассматривать как функцию (векторную) величины l–расстояния вдоль кривой. В соответствии с формулой (6.6) эта сила совершает работу

$$W = \int F \cos\theta \, dl = F_{\parallel} \, dl,$$

где $F_{\parallel}$–величина составляющей силы F, параллельной[1)] касательной к кривой в любой точке. По второму закону Ньютона

$$F_{\parallel} = ma_{\parallel} = m\frac{dv}{dt},$$

где $a_{\parallel}$ соответствует величине, параллельной (или тангенциальной) составляющей ускорения, равной быстроте изменения скорости тела dv/dt. Считая, что v является функцией расстояния l, и используя правила дифференци-

[1)] Заметим, что сила (или ее составляющая), перпендикулярная вектору скорости, не совершает работы. Такая сила лишь изменяет направление скорости и не влияет на ее величину. Одним из примеров этого может служить равномерное движение по окружности, при котором на тело, движущееся с постоянной по величине скоростью, действует центростремительная сила, направленная к центру окружности; эта сила не совершает работы над телом.

рования, имеем

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dl}\frac{dl}{dt}=v\frac{dv}{dl}.$$

Здесь мы учли, что по определению $dl/dt = v$. Таким образом (вводя индексы 1 и 2 соответственно для начальных и конечных величин), получаем выражение

$$W=\int_1^2 F_{\parallel}\,dl=\int_1^2 m\frac{dv}{dt}dl=\int_1^2 mv\frac{dv}{dl}dl=\int_1^2 mv\,dv,$$

которое после интегрирования приводит к

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\Delta\text{КЭ}.$$

Таким образом, мы вновь пришли к теореме о связи работы и энергии, доказав ее для трехмерного движения с переменной результирующей силой. Заметим кстати, что эта теорема не является новым независимым законом. Она была выведена, исходя из определений работы и кинетической энергии с использованием второго закона Ньютона.

Поскольку работа и кинетическая энергия непосредственно связаны друг с другом, энергия должна иметь те же единицы измерения, что и работа: джоули в системе СИ, эрги в СГС. Кинетическая энергия, как и работа, является скалярной величиной. Кинетическая энергия системы частиц равна (скалярной) сумме кинетических энергий отдельных частиц, входящих в систему.

Пример 6.4. Какую работу необходимо совершить, чтобы скорость автомобиля массой 1000 кг, равная 20 м/с, увеличилась до 30 м/с?

Решение. Необходимая работа равна приращению кинетической энергии:

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=$$
$$=\frac{1}{2}(1000\text{ кг})(30\text{ м/с})^2-$$
$$-\frac{1}{2}(1000\text{ кг})(20\text{ м/с})^2=2{,}5\cdot10^5\text{ Дж}.$$

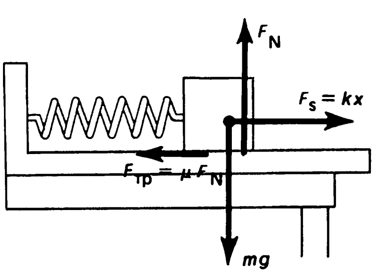

Рис. 6.11. Пример 6.5.

Пример 6.5. Горизонтально расположенная пружина имеет коэффициент упругости $k = 180$ Н/м (рис. 6.11). а) Какая работа требуется, чтобы сжать ее из свободного состояния ($x = 0$) до значения $x = 15{,}5$ см (x – величина деформации пружины)? б) Если прикрепить теперь к концу пружины груз массой 1,85 кг, то какова будет его скорость, когда он отделится от пружины в точке $x = 0$? Трением пренебрегите. в) Рассмотрите вновь случай «б», считая теперь груз скользящим по столу и принимая коэффициент трения скольжения равным $\mu_k = 0{,}27$.

Решение. а) В разд. 6.3 мы показали, что работа W, необходимая для сжатия пружины на величину x, равна $kx^2/2$. Следовательно, в нашем случае потребуется работа $W = (1/2)(180\ \text{Н/м})(0{,}155\ \text{м})^2 = 2{,}16$ Дж (все величины приведены к системе СИ).

б) Возвращаясь в исходное недеформированное состояние, пружина произведет над грузом работу 2,16 Дж (вычисления те же, что и в п. «а», изменяется лишь направление движения). Согласно теореме о связи работы и энергии, груз приобретает кинетическую энергию 2,16 Дж; поскольку КЭ $= (1/2)mv^2$, скорость груза

$$v = \sqrt{\frac{2(\text{КЭ})}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}16\ \text{Дж})}{1{,}85\ \text{кг}}} = 2{,}34\ \text{м/с}.$$

в) На груз действуют две силы: одна со стороны пружины и другая со стороны стола (за счет трения). Пружина производит над грузом работу 2,16 Дж. Работа силы трения, действующей на груз, равна

$$W_{\text{тр}} = (-\mu_k mg)x = -(0{,}27)(1{,}85\ \text{кг})(9{,}8\ \text{м/с}^2)(0{,}155\ \text{м}) = -0{,}76\ \text{Дж}.$$

Мы учли здесь, что сила нормального давления F_N, с которой груз действует на стол, равна силе тяжести mg. Эта работа отрицательна, поскольку сила трения скольжения направлена противоположно перемещению x. Полная работа, произведенная над грузом, равна $W = 2{,}16$ Дж $- 0{,}76$ Дж $= 1{,}40$ Дж. Используя теорему о связи работы и энергии (6.9) и полагая $v_2 = v$ и $v_1 = 0$, имеем

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}40\ \text{Дж})}{1{,}85\ \text{кг}}} = 1{,}26\ \text{м/с}.$$

6.5. Потенциальная энергия

Можно говорить, что энергия тела обусловлена не только его движением, но и положением в пространстве и его формой; такую энергию называют **потенциальной энергией** (ПЭ).

Потенциальной энергией обладает, например, заведенная пружина часов. При своем раскручивании она совершает работу и передвигает стрелки часов. Сама пружина приобрела потенциальную энергию благодаря тому, что *над* ней совершил работу человек, заводивший часы.

Возможно, самым привычным примером потенциальной энергии является *гравитационная потенциальная энергия*. Массивное тело, поднятое высоко в воздух, имеет потенциальную энергию благодаря своему положению. Оно обладает способностью совершать работу, поскольку, если его освободить, оно упадет на землю и может совершить работу (например, загнать в землю торчащий стержень). Определим теперь количественно гравитационную потенциальную энергию тела вблизи поверхности Земли. Поднять тело массой m вертикально вверх можно, только приложив к нему силу, по крайней мере равную силе тяжести mg (например, со стороны ладони человека). Для того чтобы поднять это тело без ускорения на высоту h над поверхностью Земли (рис. 6.12, *а*), человек должен совершить работу, равную произведению силы mg на расстояние по вертикали h; иными словами, $W = mgh$.

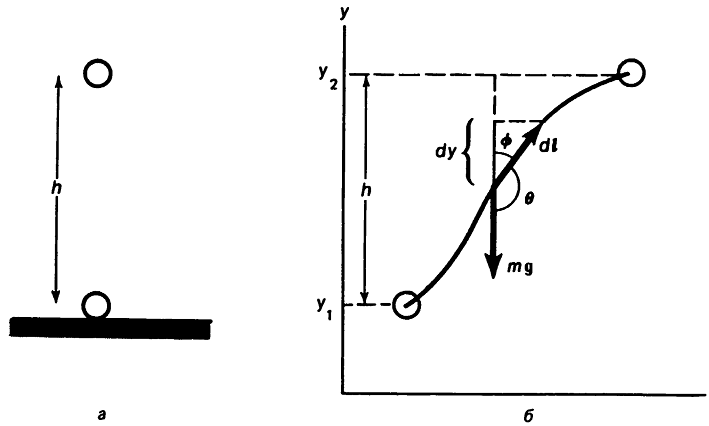

Рис. 6.12. Тело массой m поднимается на высоту $h = y_2 - y_1$ вертикально (*а*) и по произвольной двумерной траектории (*б*).

Если затем мы позволим телу свободно падать под действием силы тяжести и при падении загнать в землю стержень, то тело совершит над стержнем работу mgh, что можно проверить, используя кинематические соотношения, как мы это делали в разд. 6.4 для кинетической энергии. Таким образом, чтобы поднять тело массой m на высоту h, *необходимо* совершить работу, равную mgh; поднятое на высоту h тело обладает *способностью* производить работу, равную mgh.

Предположим, что вместо движения вверх по вертикали тело следует по некоторой произвольной траектории в плоскости xy (рис. 6.12, *б*). Оно начинает движение в точке с вертикальной координатой (высотой) y_1 и достигает высоты y_2, причем $y_2 - y_1 = h$. С помощью формулы (6.7) вычислим работу W_g, совершаемую в этом процессе силой тяжести:

$$W_g = \int_1^2 (\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{l}) = \int_1^2 mg \cos\theta \, dl.$$

Обозначим через $\phi = 180° - \theta$ угол между вектором перемещения $d\mathbf{l}$ и его вертикальной составляющей dy, как показано на рис. 6.12, *б*; тогда, учитывая, что $\cos\theta = -\cos\phi$ и $dy = dl \cos\phi$, находим

$$W_g = -\int_{y_1}^{y_2} mg\, dy = -mg(y_2 - y_1). \tag{6.10}$$

Поскольку $y_2 - y_1 = h$ – высота по вертикали, мы видим, что работа зависит только от высоты и вовсе не зависит от конкретной выбранной траектории. В случае, изображенном на рис. 6.12, *б*, $y_2 > y_1$, и потому работа силы тяжести отрицательна; если же $y_2 < y_1$ (т. е. тело падает вниз), то W_g положительна.

Если тело падает свободно по вертикали на расстояние $h = y_2 - y_1$, то оно может совершить работу (над другим телом или системой), равную $mgh = mg(y_2 - y_1)$. В соответствии с определением энергии как способности совершать работу, мы можем найти изменение *гравитационной потенциальной энергии* U, когда тело с высоты y_1 переместится в точку на высоте y_2, как

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1) \quad \text{[гравитационная ПЭ]}. \tag{6.11}$$

Выражение (6.11) определяет изменение потенциальной энергии между двумя точками. Потенциальную энергию U в любой точке, характеризуемой высотой y относительно какой-либо точки отсчета (начала системы координат), можно определить следующим образом:

$$U = mgy \quad \text{[гравитационная ПЭ]}. \tag{6.12}$$

Можно было бы определить гравитационную ПЭ в точке также в виде

$$U = mgy + C,$$

где C – постоянная величина; такое определение тоже согласуется с формулой (6.11) (постоянные C сократились бы одна с другой при вычитании U_1 из U_2). Значение C для удобства выбирают обычно равным нулю, поскольку U так или иначе зависит от выбора системы координат (т. е. от точки, в которой мы выбрали начало отсчета высоты y). Например, гравитационная потенциальная энергия книги, поднятой высоко над столом, зависит от того, откуда мы измеряем высоту y: от поверхности стола, пола или от какой-либо другой точки отсчета[1]. В любой ситуации физический смысл имеет *изменение* потенциальной энергии, поскольку именно она связана с совершаемой работой. Мы можем поэтому выбирать нулевое значение потенциальной энергии в любой точке, в которой это удобно, но должны сохранять этот выбор в процессе решения данной задачи. Изменение потенциальной энергии между любыми двумя точками не зависит от этого выбора.

Пример 6.6. Автомобиль массой 1000 кг перемещается из точки A (рис. 6.13) в точку B, а затем в точку C. а) Чему равна потенциальная энергия автомобиля в точках B и C относительно точки A? б) Каково будет изменение потенциальной энергии тела, когда оно переместится из точки B в точку C? в) Ответьте на вопросы «а» и «б», выбрав начало отсчета ($y = 0$) в точке C.

Решение. а) Будем измерять высоты от точки A, так что в начальном положении автомобиль имеет нулевую потенциаль-

[1] Это имеет место и в случае кинетической энергии: кинетическая энергия тела тоже зависит от выбора системы отсчета; например, у человека, сидящего в автобусе, движущемся со скоростью v, кинетическая энергия в системе отсчета, связанной с автобусом, равна нулю, но в системе отсчета, связанной с дорогой, она равна КЭ = $(1/2)mv^2$. Однако *изменение* потенциальной энергии не зависит от системы отсчета, тогда как изменение кинетической энергии также зависит от системы отсчета.

ную энергию. В точке B, где $y = 10$ м,

$$ПЭ_B = mgy = (1000\ кг)(9{,}8\ м/с^2)(10\ м) = 1{,}0 \cdot 10^5\ Дж.$$

В точке C, находящейся ниже A, $y = -15$ м, и потому

$$ПЭ_C = mgy = (1000\ кг)(9{,}8\ м/с^2)(-15\ м) = -1{,}5 \cdot 10^5\ Дж.$$

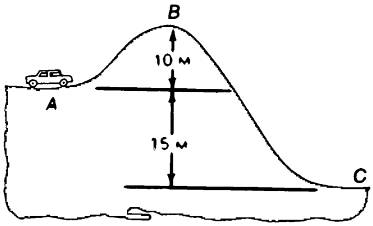

Рис. 6.13. Пример 6.6.

б) Изменение потенциальной энергии автомобиля при его перемещении из точки B в точку C равно

$$ПЭ_C - ПЭ_B = (-1{,}5 \cdot 10^5\ Дж) - (1{,}0 \cdot 10^5\ Дж) = -2{,}5 \cdot 10^5\ Дж.$$

Таким образом, автомобиль теряет энергию $2{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

в) В этом случае, поскольку $y = 15$ м, потенциальная энергия автомобиля в начальной точке A равна $(1000\ кг)(9{,}8\ м/с^2) \times (15\ м) = 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж. В точке B его потенциальная энергия равна $2{,}5 \cdot 10^5$ Дж, а в точке C – нулю. Однако изменение потенциальной энергии при переходе из точки B в точку C (или из точки A в точку B) такое же, как и в п. «б».

Сравнивая выражения (6.10) и (6.11), мы видим, что изменение гравитационной потенциальной энергии определено так, что оно равно работе со знаком минус, совершаемой силой тяжести при перемещении тела с высоты y_1 на высоту y_2:

$$\Delta U = -W_g = -\int_1^2 (\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{l}).$$

Вместо этого можно было бы сказать, что изменение потенциальной энергии ΔU равно работе, совершаемой другой силой (равной по величине силе тяжести), например действующей со стороны человека и поднимающей тело (без ускорения) против силы тяжести.

Помимо гравитационной существуют и другие виды потенциальной энергии. В общем случае мы определяем *изменение потенциальной энергии, связанной с конкретной силой* $\mathbf{F}$, *как величину, равную (с обратным знаком) работе, совершаемой этой силой:*

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}). \tag{6.13}$$

В следующей главе мы увидим, что такое определение имеет смысл не для всех возможных сил, а лишь для так называемых консервативных сил, таких, как сила тяжести.

Рассмотрим теперь еще один вид потенциальной энергии, характерный для упругих тел и имеющий много практических применений. В качестве простого примера рассмотрим часовую пружину или даже просто проволочную пружину (рис. 6.14). В сжатом или растянутом состоянии пружина обладает потенциальной энергией, поскольку, когда ее высвобождают, она может совершить

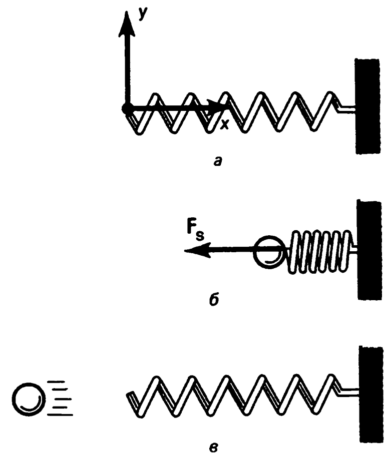

Рис. 6.14. Пружина (*а*) может запасать энергию (упругая ПЭ), находясь в сжатом состоянии (*б*); эту энергию можно использовать для совершения работы в момент освобождения пружины (*в*).

работу над шариком, как это показано на рис. 6.14. По аналогии с другими упругими телами сжатие пружины описывается законом Гука (см. разд. 6.3) при условии, что ее деформация x не слишком велика. Выберем систему координат так, чтобы конец нерастянутой пружины находился в точке $x = 0$ (рис. 6.14, *а*) и положительным было направление оси x вправо. Для того чтобы удержать пружину в сжатом (или растянутом) на длину x состоянии, к ней необходимо приложить силу $F = kx$. По третьему закону Ньютона пружина действует на нас в обратном направлении с силой

$$F_s = -kx.$$

Знак минус появился потому, что направление силы F_s противоположно направлению смещения x (рис. 6.14, *б*). Согласно определению (6.13), изменение потенциальной энергии пружины между значениями координаты $x_1 = 0$ (недеформированная пружина) и $x_2 = x$ равно

$$\Delta U = U(x) - U(0) = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Здесь $U(x)$ – потенциальная энергия в точке x, так что $U(0)$ – это потенциальная энергия в точке $x = 0$. Удобно положить потенциальную энергию в этой точке равной нулю: $U(0) = 0$; тогда потенциальная энергия пружины, сжатой или растянутой на длину x от положения равновесия, запишется в виде

$$U(x) = (1/2)kx^2 \quad [\text{упругая ПЭ}]. \tag{6.14}$$

В любом из предыдущих примеров потенциальной энергии – гравитационной или упругой – тело обладает потенциальной способностью совершить работу, хотя в действительности еще не совершает ее. Именно поэтому используется название потенциальная энергия. Из этих примеров очевидно также, что энергию можно накопить для дальнейшего использования в форме потенциальной энергии. Кроме того, следует заметить, что если для кинетической энергии частицы существует единое, универсальное выражение $(1/2)mv^2$, то для потенциальной энергии такого выражения не имеется; аналитический вид потенциальной энергии зависит от рассматриваемых сил.

Потенциальная энергия всегда связана с той или иной силой, действующей со стороны одного тела на другое (например, Земля действует силой тяжести на падающий камень, сжатая пружина – на шарик и т. п.). Таким образом, потенциальная энергия это не то, что присуще самому телу: она всегда связана со взаимодействием двух (или большего числа) тел.

6.6. Другие виды энергии

Помимо кинетической и потенциальной энергии для обычных тел можно определить и другие виды энергии. К ним относятся электрическая энергия, ядерная энергия, внутренняя энергия, а также химическая энергия, запасенная в пище и топливе. С возникновением атомной теории перечисленные выше виды энергии стали рассматриваться как разновидности кинетической и потенциальной энергий на атомном или молекулярном уровнях. Например, согласно атомной теории, внутренняя энергия интерпретируется как кинетическая и (или) потенциальная энергия быстро движущихся молекул; когда тело нагревают, составляющие его молекулы начинают двигаться быстрее. С другой стороны, энергию, запасенную в пище и топливе (например, бензине), можно рассматривать как потенциальную энергию, обусловленную относительным расположением атомов внутри молекулы. Использовать эту энергию для совершения работы можно, если только ее высвободить (как правило, в ходе химической реакции). Это несколько напоминает сжатую пружину, которая также способна совершить работу, если отпустить ее.

Электрическую, магнитную и ядерную энергии можно также рассматривать с помощью понятий кинетической и потенциальной энергии. Эти виды энергии мы рассмотрим в последующих главах.

6.7. Преобразование энергии

Энергия может быть преобразована из одного вида в другой. Камень, поднятый высоко в воздух, обладает потенциальной энергией; когда он падает, его потенциальная энергия уменьшается, поскольку уменьшается его высота над Землей. Однако кинетическая энергия камня при этом увеличивается, поскольку возрастает его скорость. Таким образом, потенциальная энергия камня преобразуется в его кинетическую энергию.

Во многих случаях при преобразовании энергии происходит передача энергии от одного тела другому. Так, потенциальная энергия, запасенная в сжатой пружине (на рис. 6.14, *б*), преобразуется в кинетическую энергию шарика (рис. 6.14, *в*). Потенциальная энергия воды в верхней части плотины при падении воды преобразуется в кинетическую энергию; у основания плотины кинетическая энергия воды может быть передана лопастям турбины и затем преобразована в электрическую энергию, как мы это увидим в гл. 30 (т. 2 настоящей книги). Потенциальная энергия, запасенная в натянутой тетиве лука, может быть преобразована в кинетическую энергию стрелы.

В каждом из этих примеров передача энергии от одного тела другому сопровождается совершением работы. Пружина совершает работу над шариком, вода – над лопастями турбины, тетива – над стрелой. Это наблюдение приводит нас еще к одному аспекту взаимосвязи работы и энергии:

Работа совершается всякий раз, когда энергия одного тела передается другому[1].

Можно привести еще пример: человек бросает мяч или толкает продуктовую тележку. Совершенная при этом работа указывает на передачу энергии от человека (которую он в конечном счете получил из химической потенциальной энергии, запасенной в пище) к мячу или тележке.

Важность понятия энергии состоит в том, что энергия – сохраняющаяся величина. Иными словами, в любом процессе энергия может преобразовываться из одного вида в другой, но полная энергия не возрастает и не убывает. В этом состоит закон сохранения энергии – один из самых важных в физике; мы обсудим его в следующей главе.

Заключение

Сила совершает работу над телом, когда эта сила передвигает тело на некоторое расстояние. Работа W, совершаемая постоянной силой $\mathbf{F}$ над телом при его перемещении на $\mathbf{d}$, дается выражением

$$W = Fd\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d},$$

где θ – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{d}$.

Последнее выражение называется скалярным произведением векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{d}$. Вообще *скалярное произведение* любых двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяется как $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$, где θ – угол между векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

---

[1] Здесь следовало бы все же уточнить, что это происходит в действительности не всегда, а лишь в тех случаях, когда передача энергии не происходит исключительно путем теплообмена (см. подробнее гл. 19). – *Прим. ред.*

Работа W, совершаемая переменной силой $\mathbf{F}$, действующей на частицу, которая перемещается из точки a в точку b, дается выражением

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b F \cos\theta \, dl,$$

где $d\mathbf{l}$ – бесконечно малое перемещение частицы вдоль ее траектории (по направлению этот вектор совпадает в каждой точке с касательной к ней), а θ – угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{F}$.

Кинетическая энергия частицы массой m, движущейся со скоростью v, определяется выражением

$$\text{КЭ} = (1/2)\,mv^2.$$

Теорема о связи работы и энергии гласит, что полная работа, совершаемая над телом результирующей силой, равна изменению кинетической энергии тела:

$$W = (1/2)\,mv_2^2 - (1/2)\,mv_1^2.$$

Тело может иметь *потенциальную энергию*, обусловленную его положением или формой. Примерами потенциальной энергии являются гравитационная, упругая, химическая, электрическая и ядерная энергии. В частности, гравитационная потенциальная энергия частицы массой m, находящейся вблизи поверхности Земли на высоте y относительно некоторой точки отсчета, равна mgy. Упругая потенциальная энергия пружины с коэффициентом упругости k, сжатой или растянутой на длину x из положения равновесия, равна $kx^2/2$. Потенциальная энергия определяется всегда относительно какой-либо точки отсчета, поскольку физический смысл имеют только изменения потенциальной энергии. Изменение потенциальной энергии ΔU тела, движущегося из точки 1 в точку 2 под действием силы $\mathbf{F}$, определяется как работа (взятая с обратным знаком), совершаемая этой силой:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

(Потенциальная энергия может быть определена не для всех, а лишь для некоторых сил; см. гл. 7.)

Вопросы

1. В чем понятие работы, используемое в повседневной жизни, совпадает с понятием работы в физике? А в чем их отличие?

2. С помощью рычага, изображенного на рис. 6.15, можно поднять вверх тело, которое обычным способом человек поднять не может. Легко показать, что отношение силы F_o, действующей со стороны рычага на тело, к силе F_i, прикладываемой к противоположному концу рычага, равно отношению длины l_i к длине l_o: $F_o/F_i = l_i/l_o$ (в пренебрежении силой трения и массой рычага). Покажите, что, хотя рычаг дает нам выигрыш в силе, он не приводит к уменьшению совершаемой работы.

3. Почему работа, совершаемая силами динамического трения, всегда отрицательна?

4. Женщина, плывущая против течения в реке с сильным течением, не перемещается относительно берега. Совершает ли она какую-либо работу? Если она перестанет плыть и, удержи-

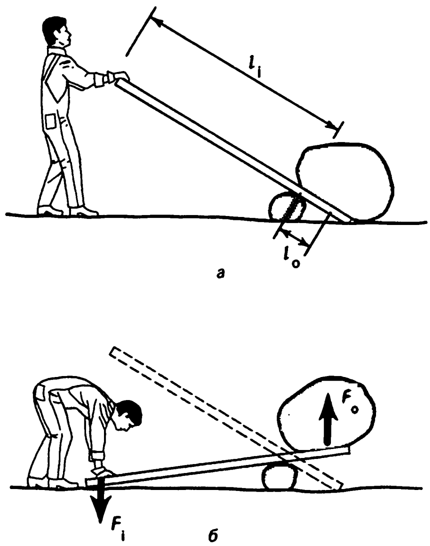

Рис. 6.15. Простой рычаг.

ваясь на поверхности воды, будет перемещаться только из-за течения реки, будет ли над ней совершаться работа?

5. Докажите, что $\mathbf{A}\cdot(-\mathbf{B}) = -\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

6. Зависит ли скалярное произведение двух векторов от выбора системы координат?

7. Может ли скалярное произведение двух векторов быть отрицательным? Если да, то укажите, какие условия при этом должны выполняться.

8. Если $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, то следует ли из этого, что $\mathbf{A} = \mathbf{B}$?

9. Совершает ли центростремительная сила какую-либо работу? Объясните.

10. Может ли сила нормальной реакции, перпендикулярная вектору перемещения тела, совершать работу? Объясните.

11. Имеются две пружины, которые различаются лишь жесткостью; пружина 1 жестче, чем пружина 2 ($k_1 > k_2$). Над какой пружиной совершается бóльшая работа, а) если их растягивают, прикладывая одинаковые силы; б) если их растягивают на одинаковую длину?

12. Может ли кинетическая энергия быть отрицательной? Объясните.

13. Зависит ли работа, совершаемая над телом, от выбора системы отсчета? Влияет ли это на теорему о связи работы и энергии?

14. Вычислите приближенно, на сколько изменится гравитационная потенциальная энергия, когда вы прыгаете на максимальную для вас высоту.

15. Опишите превращения энергии в случае, когда ребенок скачет верхом на палочке.

16. Опишите, как преобразуется энергия лыжника, когда он начинает скатываться с горы и через какое-то время останавливается, заехав в сугроб.

Задачи

Раздел 6.1

1. (I) Женщина массой 48 кг поднимается по лестнице на высоту 4,5 м. Какую работу при этом она совершает?

2. (I) С какой высоты должен упасть забивающий сваю груз массой 37,8 кг, чтобы совершить работу $5{,}60\cdot10^4$ Дж?

3. (I) Работа двигателя автомобиля, проехавшего 1,25 км с постоянной скоростью, равна $5{,}8\cdot10^4$ Дж. Чему равна средняя сила трения (любого происхождения), действующая на автомобиль?

4. (I) Какую работу проделала лошадь, перевезя тележку массой 300 кг на расстояние 50 км вдоль горизонтальной дороги, если эффективный коэффициент трения был 0,060? Считайте, что лошадь тянет тележку с постоянной силой в горизонтальном направлении.

5. (I) На полу находится ящик массой 59 кг. Какую работу нужно затратить, чтобы передвинуть ящик с постоянной скоростью а) на 12,0 м в горизонтальном направлении по полу, если сила трения равна 150 Н; б) на 12,0 м вертикально вверх?

6. (I) Чему равен переводный коэффициент между джоулями и эргами?

7. (II) Какая работа требуется для перемещения с постоянной скоростью автомобиля массой 1250 кг на 115 м вверх по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 13,5°? а) пренебрегите трением; б) считайте, что коэффициент трения равен 0,090.

8. (II) Десять кирпичей, каждый массой 1,5 кг и толщиной 6,0 см лежат широкой своей частью на горизонтальном столе. Какую работу нужно затратить, чтобы положить их друг на друга?

9. (II) Рассчитайте полную работу, совершаемую вертолетом массой M, который поднимается на высоту h с ускорением, направленным вверх и равным $0{,}10g$.

10. (II) или (III) Пианино массой 300 кг скатывают по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 25°, на расстояние 4,5 м, подталкивая его сзади и сообщая тем самым ему ускорение. Эффективный коэффициент трения равен 0,39. Рассчитайте а) полную работу, совершаемую над пианино; б) работу, совершаемую над пианино толкающим его человеком;

в) работу, совершаемую над пианино гравитационным полем.

Раздел 6.2

11. (I) Покажите, что

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$

и

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0,$$

где **i**, **j** и **k** – единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей x, y и z прямоугольной системы координат.

12. (I) Покажите, что для любого вектора $V = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$ справедливы соотношения

$$V_x = \mathbf{i}\cdot\mathbf{V}, \quad V_y = \mathbf{j}\cdot\mathbf{V}, \quad V_z = \mathbf{k}\cdot\mathbf{V}.$$

13. (I) Вектор $\mathbf{V}_1$ направлен вдоль оси z, и его абсолютная величина $V_1 = 36$. Вектор V_2 лежит в плоскости xz и составляет угол 25° с осью x, а его абсолютная величина равна $V_2 = 55$. Чему равно скалярное произведение $\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2$?

14. (I) Найдите угол между векторами $\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

15. (I) Докажите, что $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$, используя формулу (6.2) и дистрибутивный закон (который будет доказан в задаче 23).

16. (II) Пусть $\mathbf{A} = 4{,}0\mathbf{i} - 3{,}5\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -1{,}7\mathbf{i} + 8{,}1\mathbf{j} + 4{,}6\mathbf{k}$ и $\mathbf{C} = 6{,}3\mathbf{i} - 2{,}2\mathbf{j}$. Вычислите а) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$; б) $(\mathbf{A}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{B}$; в) $(\mathbf{B}+\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}$.

17. (II) Предположим, что сила **F** на рис. 6.9 направлена вдоль касательной к окружности так, что в любой момент времени она составляет угол θ с горизонтальной осью. Рассчитайте работу, которую должна совершить эта сила, чтобы переместить груз с небольшой постоянной скоростью из нижнего положения на высоту y_0.

18. (II) Пусть даны векторы $\mathbf{A} = 5{,}2\mathbf{i} - 3{,}8\mathbf{j}$ и $\mathbf{B} = 3{,}6\mathbf{i} + 5{,}1\mathbf{j}$. Найдите вектор **C**, который лежит в плоскости xy и перпендикулярен вектору **B** и скалярное произведение которого с вектором **A** равно 16,4.

19. (II) Покажите, что если два вектора имеют одинаковую абсолютную величину, то их сумма будет перпендикулярна их разности.

20. (II) Пусть дан вектор $\mathbf{V} = 6{,}8\mathbf{i} + 12{,}0\mathbf{j} - 4{,}7\mathbf{k}$. Чему равны углы, которые он составляет с осями x, y и z?

21. (II) С помощью формулы для скалярного произведения докажите теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

где a, b и c – длины сторон треугольника, θ – угол, лежащий против стороны c.

22. (II) Векторы **A** и **B** лежат в плоскости xy, и их скалярное произведение равно 24,6. Если вектор **A** составляет угол 30° с осью x и его длина равна 11,7, то что можно сказать про вектор **B**?

23. (III) Покажите, что скалярное произведение обладает свойством дистрибутивности, т.е. $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$. (*Подсказка*: используйте диаграмму, на которой изобразите эти три вектора лежащими в плоскости и укажите на диаграмме скалярные произведения.)

Раздел 6.3

24. (I) Коэффициент жесткости пружины равен $k = 74$ Н/м. Используя график, такой, как на рис. 6.8, определите работу, совершаемую при растягивании пружины от $x = 3{,}0$ см до $x = 5{,}5$ см. (Считайте, что $x = 0$ соответствует нерастянутому состоянию пружины.)

25. (I) Вращая педали велосипеда, велосипедист во время каждого нажатия на педали действует на них с силой 85 Н, направленной вниз. Если диаметр окружности, описываемой каждою педалью, равен 36 см, то какая работа совершается при каждом нажатии на педаль?

26. (II) На частицу действует сила, которая линейно возрастает от нулевого значения при $x = 0$ до 24,0 Н при $x = 3{,}0$ м. Она остается постоянной и равной 24,0 Н при изменении x от 3,0 до 8,0 м, а затем линейно уменьшается до нулевого значения при $x = 11{,}0$. Определите графически работу, совершенную силой при перемещении частицы от $x = 0$ до $x = 11{,}0$ м, рассчитав площадь под кривой зависимости F от x.

27. (II) Покажите, что ответ в примере 6.1 не изменится, если профиль горы будет иметь не такой вид, как на рис. 6.3, а более сложный (рис. 6.16). Иными словами, покажите, что работа силы тяжести зависит только от высоты горы, а не от ее формы или пройденного пути.

28. (II) Сила, необходимая для того, чтобы удержать пружину в сжатом состоянии, когда длина ее уменьшена на величину x по сравнению с ее нормальной длиной, записывается в виде $F = kx + ax^3 + bx^4$. Какая работа совершается при сжатии пружины на величину x?

29. (II) Предположите, что на рис. 6.6, *а* шкала расстояний линейна и что $l_a = 4{,}0$ м, а $l_b = 28{,}5$ м. Оцените приближенно работу, совершаемую этой силой при перемещении тела массой 25 кг из точки l_a в точку l_b.

30. (III) Космический корабль массой 1400 кг падает вертикально с высоты 2500 км над поверхностью Земли. а) Найдите работу, совершаемую при этом силой тяжести, построив график зависимости силы F от расстояния r между космическим кораблем и центром Земли [с помощью формулы (5.1)]; определите из

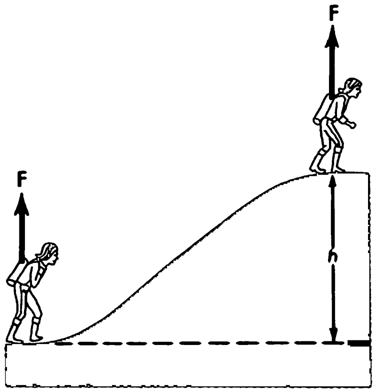

Рис. 6.16.

этого графика работу с точностью до 3%. б) Повторите расчет, используя интегральное исчисление.

Раздел 6.4

31. (I) Атом углерода массой $1{,}99 \cdot 10^{-26}$ кг имеет кинетическую энергию $4{,}64 \cdot 10^{-19}$ Дж. Чему равна скорость его движения?

32. (I) Какая совершается работа, когда автомобиль массой 1000 кг, имевший скорость 90 км/ч, тормозится до 30 км/ч?

33. (I) Чему равна работа, совершаемая при ускорении электрона ($m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг) из состояния покоя до скорости $2{,}10 \cdot 10^{6}$ м/с?

34. (I) а) Саранча массой 3,0 г в прыжке развивает скорость 3,40 м/с. Чему равна ее кинетическая энергия при этой скорости? б) Если саранча преобразует энергию с КПД = 40%, то сколько энергии она затрачивает на этот прыжок?

35. (I) Автомобиль массой 1250 кг, движущийся по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 40$ км/ч, сталкивается с горизонтальной пружиной и, сжимая ее, останавливается через 2,5 м. Чему равен коэффициент упругости пружины?

36. (I) Бейсбольный мяч массой $m = 140$ г, движущийся со скоростью 30 м/с, попав в руку ловящего его игрока, сдвигает ее назад на 35 см. Чему равна средняя сила, действующая на руку игрока со стороны мяча?

37. (II) Сила, необходимая для сжатия горизонтальной пружины на величину x, записывается в виде $F = 230x + 2{,}7x^3$, где x выражается в метрах, а F – в ньютонах. Если пружина была сжата на 2,0 м, то какую скорость она сообщит (после того, как ее отпустят) помещенному перед ней шарику массой 3,0 кг?

38. (II) Если скорость автомобиля удвоится, то во сколько раз увеличится его минимальный тормозной путь (считайте, что, кроме этого, ничего не изменится)?

39. (II) Масса одного автомобиля в два раза больше массы другого, а его кинетическая энергия равна половине кинетической энергии второго автомобиля. Когда оба автомобиля увеличили свою скорость на 3,0 м/с, их кинетическая энергия стала одинаковой. Каковы были начальные скорости каждого из автомобилей?

40. (II) Груз массой 130 кг поднимается вертикально вверх на высоту 30 м одиночным тросом с ускорением $a = 0{,}15g$. Вычислите а) натяжение троса; б) полную работу, совершаемую над грузом; в) работу, совершаемую тросом над грузом; г) работу, совершаемую над грузом силой тяжести; д) конечную скорость груза, считая, что его начальная скорость равна нулю.

41. (II) Трос лифта обрывается, когда лифт массой 750 кг находится на высоте 25 м над мощной пружиной ($k = 4{,}0 \cdot 10^4$ Н/м), находящейся на дне шахты лифта. Вычислите: а) работу, совершаемую силой тяжести, действующей на лифт до того, как он ударится о пружину; б) скорость лифта сразу перед соударением с пружиной; в) величину сжатия пружины (заметим, что при этом совершается работа как пружиной, так и силой тяжести).

42. (III) Чему равен коэффициент упругости пружины k, если с ее помощью нужно остановить автомобиль массой 1500 кг, который ехал со скоростью 90 км/ч, чтобы пассажиры автомобиля испытали ускорение не более $1{,}5g$?

Раздел 6.5

43. (I) Коэффициент упругости пружины k равен 320 Н/м. Насколько нужно сжать пружину, чтобы в ней была запасена энергия 50 Дж?

44. (I) Обезьянка массой 4,2 кг перепрыгивает с одной ветки на другую, расположенную на 1,7 м выше первой. На сколько при этом изменится потенциальная энергия обезьянки?

45. (I) Человек ростом 1,80 м поднимает книгу массой 230 г на высоту 2,15 м над полом. Чему равна потенциальная энергия книги относительно а) пола; б) макушки человека? в) Какую человек совершит работу в соответствии с ответами на вопросы «а» и «б»?

46. (I) Путешественник массой 65 кг начинает восхождение с высоты 1500 м и покоряет вершину 2600 м. а) На сколько при этом изменится потенциальная энергия путешественника? б) Какая минимальная работа совершается при этом? в) Может ли реально совершенная рабо-

та быть больше этого значения? Объясните.

47. (II) а) Пружина с коэффициентом упругости k сжата относительно своего недеформированного состояния на величину x_0. На сколько изменится потенциальная энергия пружины, если ее сжать на величину x относительно недеформированного состояния? б) Пружину *растянули* на расстояние x_0 относительно недеформированного состояния. Чему равно изменение потенциальной энергии пружины по сравнению с тем, когда она была сжата на x_0 относительно недеформированного состояния?

48. (II) Сила электростатического притяжения, действующая между двумя заряженными частицами, изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними: $F = C/r^2$, где C - постоянная. Определите а) работу, когда расстояние между частицами увеличивается от r_1 до $r_2 = r_1 + \Delta r$; б) потенциальную энергию U как функцию величины r, полагая $U = 0$ при $r = \infty$.

49. (III) Велосипедист массой m действует на педали со средней силой $0{,}90mg$. Педали велосипеда при вращении описывают окружности радиусом 18 см, радиусы колес равны 34 см, а передняя и задняя звездочки, на которых крепится цепь, имеют 42 и 27 зубцов соответственно. Определите максимальную крутизну горы, на которую велосипедист может въехать с постоянной скоростью. Считайте, что масса велосипеда равна 12 кг, а масса велосипедиста 60 кг. Пренебрегите трением. Предположите, что сила прикладывается к педалям а) вертикально вниз; б) по касательной к окружности, по которой движутся педали.

Численные расчеты на программируемом микрокалькуляторе (см. разд. 2.10)

***50.** (II) Результирующая сила, действующая на движущуюся по прямой частицу массой 480 г, измеряется через каждый интервал длиной 10 см, начиная с точки $x = 0{,}0$. Полученные значения F равны: 26,0; 28,5; 35,6; 29,6; 32,8; 40,1; 46,6; 42,2; 48,8; 52,6; 55,8; 60,2; 60,6; 58,2; 53,7; 50,3; 45,6; 45,2; 43,2; 38,9; 35,1; 30,8; 27,2; 21,0; 22,2; 18,6. Определите полную работу, совершаемую над частицей при ее полном перемещении.

***51.** (III) Сила, действующая на частицу массой 150 г, записывается в виде

$$F = \frac{848}{x^2 + 14{,}0x},$$

где F измеряется в ньютонах, а x – в метрах. Для приближенного расчета (с точностью до 2%) работы, совершаемой силой при перемещении частицы из точки с координатой $x = 2{,}00$ м в точку с координатой $x = 6{,}50$ м, используйте методы численного интегрирования. (*Подсказка*: при расчетах воспользуйтесь программируемым калькулятором или компьютером.)

***52.** (III) В задаче 54 гл. 4 оцените (с точностью до 2%) полную работу, совершаемую над прыгающим лыжником, за промежуток времени 15,0 с.