7 Сохранение энергии

В настоящей главе мы продолжим рассмотрение работы и энергии, начатое в предыдущей главе. Эти величины, особенно энергия, играют важную роль, и это в конечном счете объясняется свойством сохранения энергии: полная энергия сохраняется постоянной в любых процессах. Существование величин, сохранение которых подтверждается самыми точными современными экспериментами, является одним из самых замечательных свойств природы. Сохранение энергии – это один из великих универсальных и объединяющих законов науки.

Благодаря этому закону мы получаем еще один метод решения задач. Существует много случаев, когда решить ту или иную задачу, основываясь на законах Ньютона, трудно или невозможно (силы могут быть неизвестны или недоступны для измерений). Тогда мы можем использовать закон сохранения энергии, а в некоторых случаях и другие законы сохранения (например, закон сохранения импульса), которые будут рассмотрены в последующих главах.

7.1. Консервативные силы и теорема о связи работы и энергии

Силы можно разделить на два класса – консервативные и неконсервативные силы. Любая сила называется **консервативной**, если а) *она зависит только от положения тела, на которое действует,* и б) *производимая ею работа над частицей, перемещающейся между любыми двумя точками в пространстве, зависит только от начального и конечного положений частицы* и, следовательно, *не зависит от ее траектории.*

Примером консервативной силы является сила тяжести. В разд. 6.5 мы показали, что работа, совершаемая силой тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ при перемещении тела (вблизи поверхности Земли) из одной точки в другую, не зависит от пути, по которому перемещалась частица. Например, при вертикальном подъеме груза с высоты y_1 на высоту y_2 сила тяжести совершает работу, которая будет одной и той же независимо от того, по какой кривой перемещается при этом частица. Следовательно, сила тяжести является консервативной.

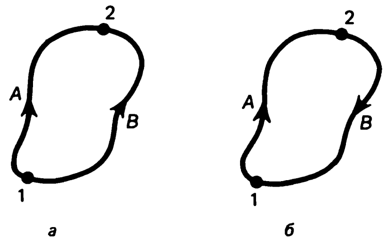

Рис. 7.1. *а* – частица перемещается из точки 1 в точку 2 двумя различными путями *A* и *B*; *б* – частица перемещается по замкнутому контуру из точки 1 в точку 2 по пути *A* и обратно из точки 2 в точку 1 по пути *B*.

Имеется еще одно эквивалентное определение *консервативной силы: это такая сила, работа которой над телом при его перемещении по любой замкнутой траектории, когда тело возвращается в исходное положение, всегда равна нулю.* (Такое перемещение можно назвать «кругосветным путешествием».) Чтобы доказать, что это определение эквивалентно данному ранее, рассмотрим частицу, перемещающуюся из точки 1 в точку 2 по двум путям, обозначенным *A* и *B* на рис. 7.1, *а*. Если мы предположим, что на частицу действует консервативная сила, то, согласно первому определению, работа, совершаемая ею при перемещении частицы по пути *A*, такая же, как и по пути *B*. Обозначим эту работу по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 через W. Пусть теперь частица движется по замкнутому пути (рис. 7.1, *б*). Из точки 1 в точку 2 частица движется по пути *A*, причем сила совершает работу W. Далее частица возвращается из точки 2 в точку 1 по пути *B*. Какую работу совершает при этом сила? При перемещении частицы из точки 1 в точку 2 по пути *B* производится работа, которая по определению равна $\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$. При обратном движении частицы из точки 2 в точку 1 сила $\mathbf{F}$ в каждой точке та же самая, что и при перемещении из 1 в 2, но при этом направление $d\mathbf{l}$ меняется на обратное. Следовательно, в каждой точке произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ имеет противоположный знак, т. е. работа на обратном пути из точки 2 в точку 1 равна $-W$. Таким образом, полная работа, совершаемая при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 и обратно, равна $W + (-W) = 0$, что доказывает эквивалентность двух приведенных выше определений консервативной силы[1].

Второе определение консервативной силы выявляет важное ее свойство: *работа консервативной силы является обратимой* в том смысле, что если на каком-либо участке пути *частицей* совершается работа над другими телами, то на обратном пути на этом участке будет совершена точно такая же работа *над* нашей частицей.

Выше отмечалось, что сила тяжести консервативна. Нетрудно показать (см. задачи в настоящей главе), что сила упругости ($F = kx$) также консервативна. Но не все

[1] Для полного доказательства эквивалентности двух определений требуется еще доказать обратное утверждение, т. е. что из второго определения следует первое.– *Прим. ред.*

силы консервативны. К *неконсервативным* относится сила трения. Работа, совершаемая при перемещении тяжелого ящика вдоль горизонтального пола, равна произведению силы трения на полный *путь, пройденный* ящиком, поскольку сила трения в каждой точке траектории направлена точно против движения. Следовательно, работа силы трения при перемещении тела из одной точки в другую вдоль прямой, соединяющей эти точки, меньше, чем работа, совершаемая при перемещении тела по искривленной траектории, например по полуокружности.

Заметим также, что в случае, когда мы имеем дело с трением скольжения, сила трения всегда направлена в сторону, противоположную перемещению, и работа, совершаемая над телом при его перемещении, отрицательна. Поэтому, когда тело перемещается по замкнутому пути, например из точки 1 в точку 2 и обратно из точки 2 в точку 1, полная работа, совершаемая силой трения, никогда не будет равна нулю – она всегда отрицательна. Таким образом, работа, совершаемая неконсервативной силой, не является обратимой, как в случае консервативной силы.

То, что мы делаем различие между консервативными и неконсервативными силами, весьма важно и объясняется главным образом тем, что *потенциальная энергия может быть определена только для консервативной силы.* В этом можно убедиться из определения потенциальной энергии [формула (6.13)]:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Интеграл здесь можно вычислить, только если $\mathbf{F}$ является функцией положения. Иными словами, интеграл

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

(который равен выполненной работе) имеет единственное значение, если он зависит лишь от положения начальной и конечной точек 1 и 2 и не зависит от пути интегрирования. В случае консервативной силы этот интеграл будет зависеть не только от пространственного положения точек 1 и 2, но и от контура интегрирования, соединяющего точки 1 и 2. Величина ΔU при этом зависела бы от пути, и нельзя было бы утверждать, что U имеет определенное значение в каждой точке пространства. Отсюда следует, что для неконсервативной силы понятие потенциальной энергии теряет смысл.

В одномерном случае, когда консервативная сила может быть записана как функция одной пространственной координаты (например, x), потенциальная энергия запишется в виде

$$U(x) = -\int F(x)\,dx.$$

Это выражение показывает, каким образом, если известна сила $F(x)$, можно вычислить потенциальную энергию

$U(x)$. Если, наоборот, задана $U(x)$, то, обращая это выражение, можно вычислить силу $F(x)$. Для этого необходимо взять производную от обеих частей, вспоминая, что интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями:

$$\frac{d}{dx}\int F(x)\,dx = F(x).$$

Таким образом,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{7.1}$$

В трехмерном случае это соотношение запишется в виде

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Здесь производные $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ называются частными производными; например, производная $\partial/\partial x$ означает, что, хотя потенциальная энергия U может быть функцией от x, y и z [что записывается как $U(x, y, z)$], производная берется только по переменной x, а все остальные переменные считаются при этом постоянными. Проекции силы $\mathbf{F}$ записываются следующим образом:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Пример 7.1. Предположим, что $U(x) = -ax/(b^2 + x^2)$, где a и b – постоянные. Найдите зависимость F от переменной x.

Решение. Так как $F(x) = -dU/dx$,

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{ax}{b^2 + x^2}\right) = \frac{a}{b^2 + x^2} - \frac{ax}{(b^2 + x^2)^2}\cdot 2x = \frac{a(b^2 - x^2)}{(b^2 + x^2)^2}.$$

Теперь мы можем сформулировать **теорему о связи работы и энергии** (обсуждавшуюся выше в разд. 6.4), включив в нее потенциальную энергию. Предположим, что на тело действуют несколько сил и некоторые из них являются консервативными: для этих консервативных сил можно записать потенциальную энергию в виде функции U. Тогда *работа W', совершаемая всеми остальными силами, действующими на тело, будет равна суммарному изменению кинетической и потенциальной энергий тела:*

$$W' = \Delta КЭ + \Delta U. \tag{7.2}$$

То, что это так, можно показать, вспоминая формулы (6.13) и (6.7):

$$\Delta U = -\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = -W_c;$$

здесь $-W_c$ есть отрицательная работа, совершаемая консервативными силами. Если в правую часть формулы (7.2) вместо изменения потенциальной энергии ΔU подставить его значение $-W_c$ и затем перенести этот член в левую часть, то получим

$$W' + W_c = \Delta\text{КЭ},$$

где сумма $W' + W_c$ представляет собой работу, совершаемую *всеми* силами, действующими на тело, т. е. *полную работу*. Последнее выражение есть не что иное, как теорема о связи работы и энергии в ее первоначальном виде [формула (6.9)]. Таким образом, мы доказали справедливость выражения (7.2).

Необходимо подчеркнуть, что в формулу (7.2) должны быть включены все силы, действующие на тело: либо в правую часть – в изменение потенциальной энергии, либо в левую часть – в W' (но не в обе части одновременно!). Безразлично, будет ли консервативная сила рассматриваться как совершающая работу (и, следовательно, включаться в W') или учитываться через изменение потенциальной энергии, в то время как неконсервативные силы (такие, как трение) должны быть включены в W'.

7.2. Механическая энергия и ее сохранение

Рассмотрим теперь систему частиц, между которыми действуют лишь консервативные силы и в системе возможен переход энергии из кинетической в потенциальную и обратно.

Мы рассматриваем именно систему частиц, а не одиночную частицу, поскольку изолированная частица не имеет потенциальной энергии: потенциальная энергия связана с силой, действующей на частицу, а эта сила вызывается всегда каким-то другим телом. Таким образом, потенциальная энергия – это свойство системы как целого. Потенциальная энергия системы, состоящей из пружины и закрепленного на ее конце тела массой m, при растяжении пружины на длину x увеличивается на $kx^2/2$; эта энергия обусловлена силой упругой деформации $F = -kx$, действующей со стороны пружины на тело. Аналогично, когда тело поднимается на высоту y над поверхностью Земли, потенциальная энергия изменяется на величину mgy; здесь система состоит из тела и Земли.

Предположим, что мы имеем консервативную систему (это означает, что в ней действуют только консервативные силы). Это может быть, например, пружина с закрепленным на ее конце телом массой m или тело, помещенное в поле тяготения Земли. Поскольку в системе действуют только консервативные силы, в формуле (7.2) все силы можно включить только в член, описывающий потенциальную энергию. Следовательно, $W' = 0$, и мы имеем

$$\Delta КЭ + \Delta U = 0 \quad \text{[только консервативные силы]}. \qquad (7.3)$$

Отсюда следует, что в любом процессе, если кинетическая энергия увеличивается на какую-то величину, потенциальная энергия уменьшается на такую же величину, и обратно. Определим **полную механическую энергию** E системы как сумму кинетической энергии[1] тела массой m и потенциальной энергии U:

$$E = (1/2)mv^2 + U.$$

При этом для консервативной системы из формулы (7.3) получаем

$$E = (1/2)mv^2 + U = \text{const} \quad \text{[только консервативные силы]}. \qquad (7.4)$$

Иными словами, любое увеличение или уменьшение кинетической энергии сопровождается соответствующим уменьшением или увеличением потенциальной энергии U, т.е. *полная механическая энергия консервативной системы сохраняется постоянной.* Это называется **законом сохранения механической энергии в системе, где действуют только консервативные силы.** Теперь становится понятным смысл названия «консервативные силы»: для таких сил механическая энергия сохраняется[2]. Сохранение механической энергии – это частный случай более общего закона сохранения энергии (мы рассмотрим его в следующем разделе), который справедлив для любого вида энергии.

Обозначим через v_1 и U_1 соответственно скорость и потенциальную энергию в некоторый момент времени, а через v_2 и U_2 те же величины в другой момент времени. Тогда выражение (7.4) можно переписать в виде

$$(1/2)mv_1^2 + U_1 = (1/2)mv_2^2 + U_2 \quad \text{[консервативная система]}. \qquad (7.5)$$

Это просто другая запись того факта, что сумма кинетической и потенциальной энергий консервативной системы остается постоянной величиной. Выражение (7.5) еще раз подтверждает, что для потенциальной энергии не имеет значения выбор начала отсчета: добавляя постоянную величину к U (как обсуждалось в разд. 6.5), мы просто добавляем к обеим частям записанного выше выражения одинаковые постоянные члены, которые сокращаются. Постоянная добавка не влияет также и на силу $F = -dU/dx$ в формуле (7.1), поскольку, дифференцируя

[1] При этом мы предполагаем, что в системе не имеется другой существенной кинетической энергии. Например, если в случае тела массой m, закрепленного на конце пружины, мы не можем пренебречь массой пружины, то необходимо учесть еще кинетическую энергию пружины.

[2] От англ. conserve – сохранять, сберегать.– *Прим. ред.*

постояную величину, мы получаем нуль. Вследствие того что мы имеем дело лишь с изменением потенциальной энергии, абсолютная величина U не играет роли.

Рассмотрим некоторые примеры использования закона сохранения механической энергии для консервативных систем. Таким образом, мы пренебрегаем трением и другими неконсервативными силами. Рассмотрим сперва камень, падающий под действием силы тяжести (рис. 7.2). В исходном положении он обладает только потенциальной энергией. При падении камня потенциальная энергия уменьшается, но увеличивается кинетическая энергия камня, которая компенсирует это уменьшение таким образом, что сумма этих двух энергий остается постоянной. В любой точке вдоль пути полная механическая энергия равна $(1/2)mv^2 + mgy$, где y – высота над поверхностью Земли, а v – скорость камня на этой высоте. Если индексом 1 отметить все физические величины в какой-либо точке вдоль траектории камня, скажем в его начальном положении, а индексом 2 – величины в другой точке вдоль траектории, то в соответствии с формулой (7.5) мы получим

Рис. 7.2. При падении камня его потенциальная энергия переходит в кинетическую.

$$(1/2)mv_1^2 + mgy_1 = (1/2)mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{[только сила тяжести]}. \quad (7.6)$$

Для того чтобы показать практическую значимость этого равенства, предположим, что в начальный момент времени камень находился на высоте $y_1 = 3{,}0$ м (рис. 7.2), и вычислим его скорость в тот момент времени, когда при своем падении он достигнет высоты 1,0 м над поверхностью Земли. При этом, поскольку $v_1 = 0$ в момент времени, когда камень выпускают из рук, $y_2 = 1{,}0$ м и $g = 9{,}8$ м/с^2, из (7.6) находим

$$0 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(3{,}0\ \text{м}) = (1/2)mv_2^2 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(1{,}0\ \text{м}).$$

Отсюда, сокращая массу m, находим $v_2^2 = 2[(9{,}8\ \text{м/с}^2) \times (3{,}0\ \text{м}) - (9{,}8\ \text{м/с}^2)(1{,}0\ \text{м})] = 39{,}2\ \text{м}^2/\text{с}^2$ и $v_2 = \sqrt{39{,}2} = 6{,}3$ м/с.

Равенство (7.6) можно применять для любого тела, движущегося под действием силы тяжести без трения, поскольку, как мы показали, потенциальная энергия зависит только от положения тела (в данном случае от высоты y, на которой находится тело) и не зависит от того, по какому пути движется тело. Например, автомобиль на рис. 7.3, находившийся в состоянии покоя на вершине холма, съезжает с выключенным двигателем без трения к подножию холма, а затем взбирается по инерции на соседний холм. В исходном положении автомобиля мы имеем лишь потенциальную энергию. По мере того как автомобиль спускается с холма, потенциальная энергия уменьшается, но увеличивается кинетическая энергия автомобиля, так что сумма энергий сохраняется постоянной. У подножия холма автомобиль имеет максимальную кинетическую энергию и вкатывается по инерции на другой холм; при этом кинетическая энергия переходит об-

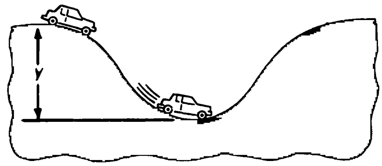

Рис. 7.3. Иллюстрация закона сохранения энергии на примере автомобиля, съезжающего с холма.

ратно в потенциальную. Когда автомобиль снова остановится, вся энергия станет только потенциальной. Поскольку потенциальная энергия пропорциональна высоте, на которой находится автомобиль, а энергия автомобиля сохраняется, автомобиль остановится на высоте, равной первоначальной. В случае когда высота обоих холмов одинакова, автомобиль остановится, едва достигнув вершины второго холма. Если же высота второго холма меньше, то не вся кинетическая энергия автомобиля преобразуется в потенциальную и автомобиль пересечет вершину и скатится с противоположного склона второго холма. Если второй холм выше первого, то автомобиль сможет достичь лишь высоты, равной высоте первого холма. При этом ни профиль склона холма, ни его крутизна не играют роли, так как потенциальная энергия зависит только от высоты.

Пример 7.2. Предположив, что высота холма на рис. 7.3 равна 40 м, вычислите а) скорость автомобиля у подножья холма и б) высоту, на которой скорость автомобиля равна половине этой скорости.

Решение. а) Применяя закон сохранения механической энергии, в формуле (7.6) положим $v_1 = 0$, $y_1 = 40$ м и $y_2 = 0$. Тогда

$$0 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(40\ \text{м}) = (1/2)mv_2^2 + 0\,.$$

Сокращая m, находим $v_2 = 28$ м/с.

б) Воспользуемся той же формулой, но учтем, что $v_2 = 14$ м/с и y_2 – неизвестная величина:

$$0 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(40\ \text{м}) = (1/2)(14\ \text{м/с})^2 + (m)(9{,}8\ \text{м/с}^2)(y_2)\,.$$

Сокращая множитель m, отсюда находим $y_2 = 30$ м. Таким образом, скорость 14 м/с автомобиль будет иметь на высоте 30 м, отсчитываемой по вертикали относительно самой нижней точки его траектории как в случае, когда автомобиль съезжает с левого холма, так и в случае, когда он въезжает на правый холм.

В легкой атлетике существует множество интересных примеров, иллюстрирующих закон сохранения энергии. Одним из них является прыжок с шестом, как показано на рис. 7.4. С энергетической точки зрения в процессе прыжка происходит следующее: кинетическая энергия бегущего легкоатлета превращается в упругую потенциальную энергию, связанную с изгибом шеста, а при отрыве ног легкоатлета от земли – в гравитационную потенциальную энергию; затем, когда шест распрямляется, человек достигает планки, и вся энергия переходит в гравитационную потенциальную энергию. (Мы пренебрегаем небольшой скоростью прыгуна в момент преодоления планки.) Шест не производит никакой работы, но он выступает как очень удобное приспособление, *запасающее* энергию, и таким образом способствует переходу кинетической энергии в потенциальную энергию гравитационного поля, что мы и получаем в конечном счете. Энергия, которая требуется для преодоления планки, зависит от того, как высоко должен располагаться центр масс[1] (ЦМ) прыгуна. Изгибая свое тело, прыгун с шестом может добиться того, что его ЦМ будет располагаться столь низко, что фактически окажется немного ниже планки; тем самым прыгун способен преодолеть более высокую планку, чем это было бы возможно при ином способе прыжка.

Пример 7.3. Вычислите кинетическую энергию и скорость прыгуна с шестом массой 70 кг, необходимую для того, чтобы он преодолел планку на высоте 5,0 м. Считайте, что ЦМ прыгуна перед прыжком располагается на высоте 0,90 м над поверхностью земли и достигает максимальной высоты на уровне планки.

Решение. Приравняем полную энергию прыгуна, которую он имеет непосредственно перед тем, как воткнуть шест в землю (шест начинает при этом изгибаться и запасать потенциальную энергию), полной энергии, которой он обладает в момент преодоления планки (при этом мы пренебрегаем малой величиной кинетической энергии). Таким образом,

$$(1/2)mv^2 + 0 = 0 + mgy$$

и

$$\text{КЭ} = (1/2)mv^2 = mgy =$$
$$= (70\ \text{кг})(9{,}8\ \text{м/с}^2)(4{,}1\ \text{м}) = 2{,}8 \cdot 10^3\ \text{Дж}.$$

Искомая скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{2\text{КЭ}}{m}} = \sqrt{\frac{2\,(2800\ \text{Дж})}{70\ \text{кг}}} = 8{,}9\ \text{м/с}.$$

Заметим, что при рассмотрении простого случая падающего камня [см. сразу после формулы (7.6)] мы могли бы использовать уравнения кинематики (2.9), справедливые при постоянном ускорении, но их нельзя использовать для решений примеров 7.2 и 7.3, поскольку в этих случаях ускорение не является постоянным. Эти примеры продемострировали нам высокую эффективность применения закона сохранения энергии. Несмотря на то что этот закон соответствует второму закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (и может быть выведен из него)[2], его применение для решения задач позволило избежать необходимости использовать силы и ускорения, которые в этих случаях изменяются сложным образом.

В качестве другого примера сохранения механической энергии рассмотрим груз массой m, укрепленный на пружине (собственной массой которой мы пренебрегаем) с коэффициентом упругости k. Груз обладает в любой

---

[1] Центр масс (ЦМ)–это такая точка, в которой можно считать сосредоточенной всю массу тела. Центр масс используется для описания поступательного движения тела, которое при этом рассматривается как материальная точка (подробнее об этом см. в гл. 8).

[2] Это уже сделано с помощью теоремы о связи работы и энергии (разд. 6.4, 7.1 и 7.2).

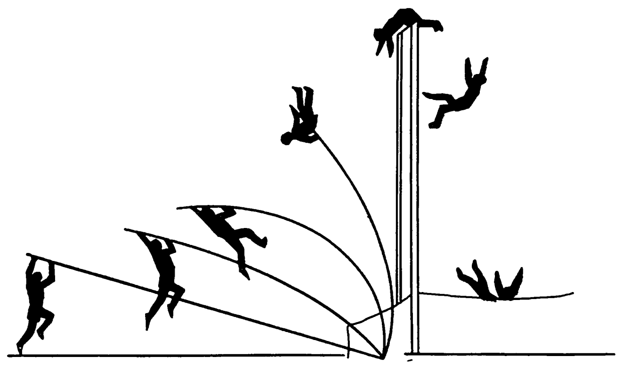

Рис. 7.4. Преобразование энергии при выполнении прыжка с шестом.

момент скоростью v, причем потенциальная энергия системы равна $kx^2/2$, где x – смещение пружины из своего недеформированного состояния. Если на груз не действует ни сила трения, ни какая-либо другая сила, то закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{[упругая сила];} \qquad (7.7)$$

здесь индексы 1 и 2 относятся к скорости и смещению в два различных момента времени.

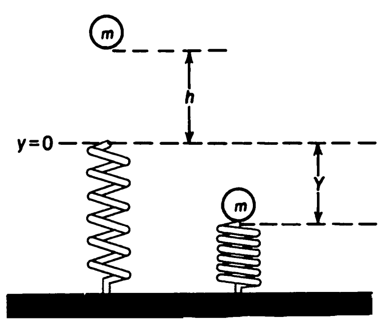

Рис. 7.5. Пример 7.4.

Пример 7.4. Шар массой $m = 2{,}6$ кг падает без начальной скорости с высоты $h = 55$ см на расположенную вертикально пружину, которая при ударе сжимается (рис. 7.5). Если у пружины коэффициент упругости $k = 72$ Н/м, то на какую максимальную длину сожмется пружина? Все расстояния будем измерять от точки соприкосновения шара с недеформированной пружиной.

Решение. Поскольку мы рассматриваем движение по вертикали, вместо координаты x будем использовать y (положительное направление оси y вверх). Обозначим максимальную величину деформации пружины через Y. Полная энергия системы шар–пружина в исходном состоянии равна

$$E_1 = mgh.$$

При максимальном сжатии пружины полная энергия запишется в виде

$$E_2 = (1/2)kY^2 - mgY.$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет собой упругую, а второе слагаемое – гравитационную потенциальную энергию; здесь учтено, что шар, прежде чем он упадет на пружину, пролетает расстояние h по вертикали ($y = 0$ в верхней точке недеформированной пружины), а затем проходит еще расстояние Y, когда пружина сжимается (поскольку $Y > 0$, то $y_2 = -Y$); в конечной точке гравитационная потенциальная энергия равна $-mgY$. В точках 1 и 2 мы имеем нулевую кинетическую энергию, которая в промежуточных точках отлична от нуля. Поскольку полная энергия сохраняется, т. е. $E_1 = E_2$, можно написать следующее равенство:

$$mgh = (1/2)kY^2 - mgY$$

или

$$(1/2)kY^2 - mgY - mgh = 0.$$

Отсюда по известной формуле для корней квадратного уравнения находим Y:

$$Y = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k} = 1{,}1 \text{ м}.$$

Мы выбираем корень со знаком плюс, поскольку по предположению $Y > 0$. Корень со знаком минус $Y = -0{,}36$ м соответствует тому, что связанные между собой шар и пружина подпрыгнули вверх на расстояние 0,36 м от недеформированного положения ($y = 0$) пружины.

7.3. Закон сохранения энергии

Учтем теперь неконсервативные силы, такие, как сила трения, поскольку в реальных ситуациях они играют немаловажную роль. Рассмотрим, например, вновь движение автомобиля (рис. 7.3), но теперь учтем наличие трения. Из-за трения автомобиль уже не сможет достичь на втором холме той же самой высоты, на которой он находился на первом холме.

В этом и других реально происходящих процессах сумма кинетической и потенциальной энергий не остается постоянной, а уменьшается, или диссипирует. Поэтому сила трения называется *диссипативной силой*[1]. Исторически именно несохранение полной механической энергии явилось одним из факторов, помешавших сформулировать всеобщий закон сохранения энергии вплоть до середины 19 в. До этого времени теплота, всегда выделяющаяся в процессе трения (попробуйте потереть ладонь о ладонь), не связывалась с энергией. Исследования ученых 19 в. показали (гл. 19), что на создание определенного количества теплоты всегда тратится одна и та же работа. Стало понятным, что тепло, производимое в процессе трения, может рассматриваться как новая форма энергии, которую мы называем *тепловой энергией*. Например, тело, свободно скользящее по столу, из-за трения останавливается. При этом его начальная кинетическая энергия переходит в тепловую энергию, вследствие чего и тело, и стол немного нагреются. Более наглядным примером перехода кинетической энергии в тепловую может служить забивание гвоздя сильным ударом молотка. Если вы слегка прикоснетесь пальцами к гвоздю, то почувствуете, как он нагрелся.

Согласно атомной теории, тепловая энергия представляет собой кинетическую энергию быстро движущихся молекул. В гл. 18 мы покажем, что рост температуры соответствует увеличению средней кинетической энергии молекул. Поскольку тепловая энергия представляет собой

[1] От англ. dissipation – уменьшение, рассеяние.– *Прим. ред.*

энергию атомов и молекул, из которых состоит тело, ее часто называют *внутренней энергией*. С точки зрения атомной теории внутренняя энергия[1] может включать в себя не только кинетическую энергию молекул, но и их потенциальную энергию (электрическую по природе), обусловленную взаимным расположением атомов в молекулах. С точки зрения макроскопической теории внутренняя энергия обусловлена неконсервативными силами, такими, как сила трения; на микроскопическом же (атомном) уровне, поскольку эта энергия состоит из кинетической и потенциальной энергий атомов и молекул, ей соответствуют главным образом консервативные силы.

Для того чтобы сформулировать более общий закон сохранения энергии, физикам 19 в. помимо тепловой пришлось признать существование электрической, химической и других видов энергии, а также выяснить, действительно ли учет этих видов энергии приводит к выполнению закона сохранения энергии. Было обнаружено, что для каждого класса сил – консервативных или неконсервативных – можно определить вид энергии, соответствующей работе, произведенной этими силами. При этом экспериментально было установлено, что полная энергия E в любом случае сохраняется постоянной. Иными словами, изменение полной энергии, являющейся суммой кинетической, потенциальной и других видов энергии, равно нулю:

$$\Delta\text{КЭ} + \Delta U + (\text{изменение всех остальных видов энергии}) = 0. \qquad (7.8)$$

Это один из наиболее важных законов физики. Он называется **законом сохранения энергии** и может быть сформулирован следующим образом:

> **При любых процессах полная энергия не увеличивается и не уменьшается. Энергия может превращаться из одного вида в другой и передаваться от одного тела другому, но ее полная величина сохраняется постоянной.**

Для консервативных механических систем этот закон можно вывести из законов Ньютона (разд. 7.2) и, следовательно, он эквивалентен последним. Однако во всей своей общности закон сохранения энергии основывается на экспериментальном наблюдении. И хотя установлено, что законы Ньютона не выполняются в субмикроскопическом мире атомов, закон сохранения энергии справедлив и в этом случае, что подтверждается во всех без исключения выполненных до сих пор экспериментах.

В разд. 7.2 мы рассмотрели несколько примеров, ил-

---

[1] Под *внутренней энергией* мы можем понимать также кинетическую и потенциальную энергии отдельных частей, из которых состоит тело (например, энергию колебаний этих частей). Этим термином мы пользуемся, когда нас интересует движение тела как целого.

люстрирующих закон сохранения энергии для консервативных систем. Приведем теперь ряд примеров, в которых участвуют и неконсервативные силы.

Предположим, что автомобиль, движущийся по холмам на рис. 7.3, испытывает действие сил трения. При перемещении из некоторой точки 1 в точку 2 работа, совершаемая силой трения $\mathbf{F}_{тр}$ над автомобилем, равна $W' = \int_1^2 \mathbf{F}_{тр} \cdot d\mathbf{l}$. Если сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ постоянна по величине, то $W' = -F_{тр}l$, где l – расстояние, фактически пройденное автомобилем вдоль траектории при перемещении его из точки 1 в точку 2. (Знак минус обусловлен здесь тем, что сила трения $F_{тр}$ всегда направлена в сторону, противоположную вектору $d\mathbf{l}$). Из теоремы о связи работы и энергии [формула (7.2)] мы имеем

$$W' = -F_{тр}l = \Delta КЭ + \Delta U = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgy_2 - mgy_1),$$

или

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + F_{тр}l.$$

Произведение $F_{тр}l$ представляет собой внутреннюю энергию $U_{внутр}$, создаваемую силой трения и равную работе, совершенной против этой силы. Таким образом, $U_{внутр} = -W' = F_{тр}l$, так что можно записать

$$КЭ_1 + U_1 = КЭ_2 + U_2 + U_{внутр}.$$

Иными словами, полная начальная энергия автомобиля $КЭ_1 + U_1$ равна сумме кинетической и потенциальной энергий автомобиля (в любой произвольно выбранной точке его траектории) и внутренней (или тепловой) энергии, создаваемой в процессе перемещения автомобиля.

Пример 7.5. Установлено, что автомобиль в примере 7.2, прежде чем он остановится, достигнет на втором холме лишь высоты 25 м. При этом он проедет 400 м. Вычислите среднюю величину силы трения, действующей на автомобиль, если масса автомобиля 1000 кг.

Решение. Пусть движение автомобиля начинается из точки 1, а в точке 2 автомобиль останавливается. Таким образом, $v_1 = 0$, $y_1 = 40$ м, $v_2 = 0$, $y_2 = 25$ м и $l = 400$ м. Следовательно,

$$0 + (1000\ кг)(9{,}8\ м/с^2)(40\ м) = 0 + (1000\ кг)(9{,}8\ м/с^2)(25\ м) + F_{тр}(400\ м).$$

Отсюда находим, что сила трения $F_{тр}$ равна 370 Н.

Рассмотрим еще одну неконсервативную силу, а именно силу, с которой человек медленно перемещает груз маятника (рис. 6.9).

Пример 7.6. Вычислите работу, совершаемую горизонтальной силой $\mathbf{F}$ при медленном перемещении груза маятника, как показано на рис. 6.9, из положения $\theta = 0$ в положение $\theta = \theta_0$. (Это уже делалось в примере 6.3.)

Решение. Поскольку перемещение происходит медленно, кинетическая энергия, по существу, равна нулю в любой точке траектории маятника. Из закона сохранения энергии [или из теоремы о связи работы и энергии; формула (7.2)] работа, совершаемая силой **F**, должна быть равна увеличению потенциальной энергии груза. (Других видов энергии или работы в задаче нет, поскольку сила натяжения **T** действует перпендикулярно направлению движения и, следовательно, не совершает работы.) Таким образом, если груз маятника находится (рис. 6.9) на высоте $y_0 = L(1 - \cos\theta_0)$, то

$$W = \Delta ПЭ = mgy_0 = mgL(1 - \cos\theta_0).$$

Заметим здесь, сколь просто по сравнению с примером 6.3 мы получили ответ с помощью рассмотрения энергии.

7.4. Значение закона сохранения энергии

Большая роль закона сохранения энергии определяется двумя его аспектами. Во-первых, с его помощью можно решать задачи, которые другими методами трудно или невозможно решить. Во-вторых, это всеобщий закон, который объясняет нам порядок, существующий в окружающем мире; следовательно, с его помощью мы узнаем о мире нечто очень существенное[1].

Понятие энергии и ее сохранения играет очень важную роль не только во всех областях физики, но и в других науках. Оно служит нитью, связывающей воедино многие науки.

Заметим, что закон сохранения энергии не является открытием в том смысле, в котором, например, в Калифорнии в 1848 г. были открыты залежи золота. Само понятие энергии было введено человеком и является продуктом его мыслительной деятельности. Энергия – не вещественная субстанция, а атрибут материи, количественная мера ее движения, т. е. в конечном счете одно из наиболее общих понятий в физике. Некоторые ученые полагают, что энергия – всего лишь некая математическая функция, что, разумеется, ни в коей мере не умаляет важности этого понятия. Его введение потребовало творческой активности многих ученых. Это понятие (математическое, если угодно) позволяет утверждать, что в любой системе, принадлежащей физическому миру, энергия сохраняется при любых процессах.

Важно отличать значение слова «сохранение», используемого в повседневной жизни, от специального его смысла в физике. В повседневной жизни под сохранением мы понимаем сберегание или экономное расходование чего-то; например, мы должны разумно расходовать, сохранять энергию. (В действительности это означает, что мы должны сохранять *топливо* и тем самым сберечь энергию.)

---

[1] Как известно, закон сохранения энергии является количественным проявлением одного из важнейших методологических положений диалектического материализма о неуничтожимости материи и ее движения.– *Прим. ред.*

В физике же смысл слова «сохранение» заключается в том, что сохраняющаяся величина всегда остается строго *постоянной*. Для ясности мы говорим, что энергия сохраняется (причем нам не приходится вмешиваться в это). Хотя в повседневной жизни мы должны стараться «сохранять» наши топливные ресурсы, чтобы они не оказались израсходованы слишком быстро.

7.5. Гравитационная потенциальная энергия и вторая космическая скорость; центральные силы

До сих пор в этой главе мы рассматривали гравитационную потенциальную энергию, считая силу тяжести $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ постоянной. Это предположение вполне корректно для обычных тел вблизи поверхности Земли. Однако для более общего анализа гравитации необходимо учесть, что сила тяжести, действующая со стороны Земли на частицу массой m, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра Земли. Точное выражение дается законом всемирного тяготения Ньютона (разд. 5.2 и 5.3):

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM_3}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

где M_3 – масса Земли, $\hat{\mathbf{r}}$ – единичный вектор с началом в месте нахождения частицы, направленный по радиусу от центра Земли; знак минус указывает на то, что действующая на тело сила направлена к центру Земли (т.е. противоположно $\hat{\mathbf{r}}$). Это выражение можно также применять для описания силы тяжести вблизи других небесных тел

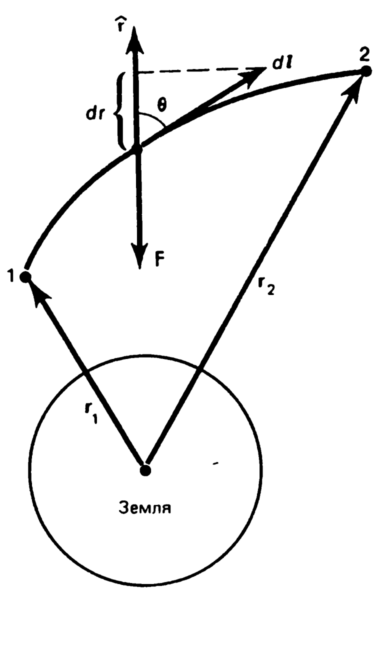

Рис. 7.6. Произвольная траектория частицы массой m, движущейся из точки 1 в точку 2.

(например, Луны, планет или Солнца); в этом случае $M_з$ следует заменить на массу соответствующего небесного тела.

Пусть тело массой m перемещается из одного положения в другое по произвольному пути (рис. 7.6), причем его расстояние от центра Земли изменяется от r_1 до r_2. Работа, совершаемая силой тяготения, запишется в виде

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -GmM_з \int_1^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}}{r^2},$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор бесконечно малого перемещения. Поскольку $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = dr$ представляет собой приращение проекции вектора $d\mathbf{l}$ на $\hat{\mathbf{r}}$ (рис. 7.6), мы имеем

$$W = -GmM_з \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GmM_з\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

или

$$W = \frac{GmM_з}{r_2} - \frac{GmM_з}{r_1} \qquad \text{[гравитация]}.$$

Поскольку интеграл зависит лишь от положений начальной и конечной точек (r_1 и r_2), а не от выбранного пути, сила тяготения должна быть консервативной. Следовательно, для силы тяготения можно использовать понятие потенциальной энергии. Изменение потенциальной энергии в любом случае определяется (см. разд. 6.5) как взятая с обратным знаком работа силы. Таким образом,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\frac{GmM_з}{r_2} + \frac{GmM_з}{r_1}. \tag{7.9}$$

Отсюда следует, что на любом расстоянии r от центра Земли гравитационную потенциальную энергию можно записать в виде

$$U(r) = -\frac{GmM_з}{r} + C,$$

где C – произвольная постоянная. Обычно выбирают $C = 0$, и тогда

$$U(r) = -\frac{GmM_з}{r} \qquad \text{[гравитация]}. \tag{7.10}$$

При таком выборе C имеем $U = 0$ при $r = \infty$. Когда тело приближается к Земле, его потенциальная энергия убывает, оставаясь все время отрицательной.

Полная энергия частицы массой m, испытывающей действие только силы тяжести со стороны Земли, сохраняется, поскольку эта сила является консервативной. Следовательно, мы имеем

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM_з}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_з}{r_2} = \text{const}$$
$$\text{[действие только силы тяжести]}. \tag{7.11}$$

Пример 7.7. Из ракеты, движущейся со скоростью 1800 м/с на высоте 1600 км над поверхностью Земли, выпадает груз, который в конечном счете падает на Землю. Какова скорость груза непосредственно перед падением на Землю? Сопротивлением воздуха пренебрегите.

Решение. Начальная скорость груза относительно Земли равна скорости ракеты, из которой он выпадает. Таким образом, $v_1 = 1{,}80 \cdot 10^3$ м/с, $r_1 = 1{,}60 \cdot 10^6\,\text{м} + 6{,}40 \times 10^6$ м $= 8{,}00 \cdot 10^6$ м и $r_2 = 6{,}40 \cdot 10^6$ м (радиус Земли). Чтобы найти искомую скорость v_2, воспользуемся законом сохранения энергии, т. е. выражением (7.11), из которого получаем

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2GM_3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{(1{,}80 \cdot 10^3\,\text{м/с})^2 - 2(6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2) \times (5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{кг}) \times \left(\frac{1}{8{,}00 \times 10^6\,\text{м}} - \frac{1}{6{,}40 \times 10^6\,\text{м}}\right)} =$$

$$= 5310\ \text{м/с}.$$

В действительности из-за сопротивления воздуха скорость груза при падении будет несколько меньше. Заметим кстати, что направление скорости груза нигде не учитывалось в ходе решения задачи – в этом состоит одно из преимуществ энергетического метода.

Если тело запустить с Земли в воздух, то оно вернется обратно при условии, разумеется, что его скорость не будет слишком велика. Однако если скорость окажется *достаточно большой*, то тело будет продолжать двигаться от Земли и не вернется к ней (если не учитывать действия других сил или столкновений с другими телами). Минимальная начальная скорость, необходимая для того, чтобы тело никогда не вернулось на Землю, называется *второй космической скоростью* и обозначается v_{II}. Чтобы найти v_{II} для Земли (пренебрегая сопротивлением воздуха), положим в (7.11) $v_1 = v_{\text{II}}$ и $r_1 = R_3 = 6{,}40 \cdot 10^6$ м. Поскольку нас интересует минимальное значение скорости, при которой тело выйдет из области притяжения Земли, необходимо, чтобы на расстоянии $r_2 = \infty$ у тела была нулевая скорость, т. е. $v_2 = 0$. Подставляя эти значения в формулу (7.11), имеем

$$\frac{1}{2}mv_{\text{II}}^2 - G\frac{mM_3}{R_3} = 0 + 0,$$

или

$$v_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2GM_3}{R_3}} = 1{,}12 \cdot 10^4\ \text{м/с}.$$

Таким образом, вторая космическая скорость равна 11,2 км/с. Следует заметить, что, хотя тело может навсегда покинуть область притяжения Земли (или Солнечной системы), сила тяготения Земли ни при каких конечных значениях r не обратится в нуль (на очень больших расстояниях эта сила, безусловно, становится очень небольшой и ею обычно пренебрегают).

Можно показать, что вблизи поверхности Земли изменение гравитационной потенциальной энергии [выражение (7.9)] сводится к обычному выражению $mg(y_2 - y_1)$ (см. задачу 29).

Сила тяготения принадлежит к так называемым *центральным силам. Центральная сила* – это любая сила, величина которой зависит только от расстояния r до некоторой выделенной точки, называемой началом (как правило, в этой точке помещается другая частица или центр другого тела), а действует она в направлении либо к началу, либо от него. В общем виде центральную силу можно записать в виде

$$\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

Если использовать те же рассуждения, которые привели нас к выражению (7.9), и еще раз заметить из рис. 7.6, что $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = dr$, то можно определить функцию потенциальной энергии, которая играет важную роль в физике:

$$U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 F(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr;$$

здесь мы учли, что значение последнего интеграла зависит только от начальной r_1 и конечной r_2 точек. Таким образом, мы приходим к выводу, что любая центральная сила является консервативной независимо от вида функции $F(r)$. Потенциальная энергия центральной силы зависит только от r, т.е. $U = U(r)$. Другим примером центральной силы является электростатическая сила, которую мы рассмотрим ниже.

*7.6. Кривые потенциальной энергии; устойчивое и неустойчивое равновесие

Предположим, что в поле консервативных сил задана потенциальная энергия частицы массой m как функция положения, и мы хотим выяснить, как движется частица во времени. Пусть движение будет одномерным (скажем, вдоль оси x). Таким образом, задана функция $U(x)$, а нужно найти $x(t)$. Мы рассматриваем случай, когда все действующие силы являются консервативными и включены в данную потенциальную энергию. Следовательно, полная механическая энергия E является постоянной, и мы можем записать

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E = \text{const}.$$

Отсюда находим

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}. \tag{7.12}$$

Разделяя затем переменные (x и t) и интегрируя, получаем

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = \int_0^t dt = t;$$

здесь мы предположили, что частица в момент времени $t = 0$ находилась в точке x_0. Если интегрирование можно выполнить[1] аналитически, то мы получим искомое соотношение между x и t.

Во многих случаях указанный интеграл трудно (или невозможно) вычислить аналитически. Однако здесь все же можно получить значительную информацию о движении, если построить кривую потенциальной энергии (потенциальную кривую), т.е. построить зависимость $U(x)$. Такой график во многих случаях полезен даже тогда, когда интегрирование может быть выполнено аналитически. Пример подобного построения приведен на рис. 7.7. В этом случае кривая потенциальной энергии $U(x)$ имеет весьма сложный вид. Полная энергия E постоянна, поэтому на графике ее можно представить горизонтальной линией. На рисунке явно отмечены четыре различных возможных значения E, а именно E_0, E_1, E_2 и E_3. Каким будет на самом деле значение E для данной системы, зависит от начальных условий. (Например, полная энергия E груза, колеблющегося на конце пружины, зависит от величины начальной деформации пружины – растяжения или сжатия.) Важно помнить, что величина E остается неизменной до тех пор, пока на груз не действуют какие-либо дополнительные силы. Из выражения (7.12) ясно, что во всех случаях $U(x)$ должна быть меньше или равна E:

$$U(x) \leqslant E.$$

В противном случае скорость v окажется мнимой величиной (квадратный корень из отрицательной величины), которая не имеет физического смысла. Таким образом, минимальное значение, которое может принимать полная энергия при заданной на рис. 7.7 потенциальной энергии, равно E_0. При этом значении E частица может только

---

[1] Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Чтобы найти $x(t)$, когда известна величина F, необходимо выполнить *два* интегрирования, поскольку справа стоит вторая производная. Однократное интегрирование второго закона Ньютона:

$$\int dv = \int \frac{F}{m}\, dt$$

соответствует выражению (7.12), а для получения x необходимо провести еще одно интегрирование.

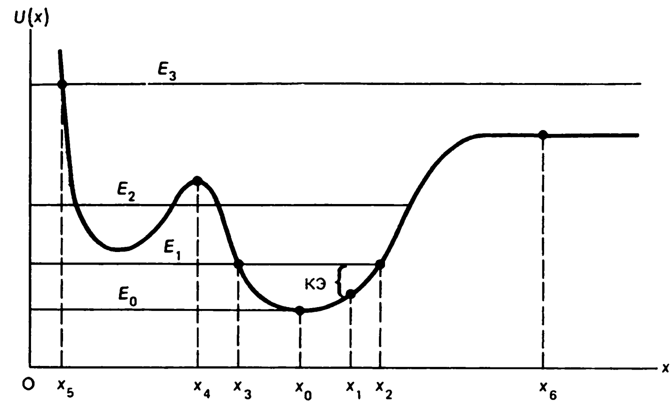

Рис. 7.7. Потенциальная кривая.

находиться в покое в точке $x = x_0$, т. е. мы имеем здесь лишь потенциальную энергию, а кинетическая энергия равна нулю.

Если полная энергия E частицы превышает E_0, скажем равна значению E_1 на рис. 7.7, то у частицы может быть как потенциальная, так и кинетическая энергия. Поскольку полная энергия $E =$ КЭ + ПЭ сохраняется, мы имеем

КЭ $= E - U(x)$.

Таким образом, в то время как потенциальная кривая дает значение $U(x)$ в каждой точке x, кинетическая энергия при любом x представляется расстоянием между горизонтальной прямой, соответствующей значению E, и кривой $U(x)$. На рис. 7.7 указана кинетическая энергия (КЭ) в точке x_1, когда полная энергия равна E_1. Частица с энергией E_1 может осциллировать только между точками x_2 и x_3, так как при значениях $x > x_2$ и $x < x_3$ потенциальная энергия превысила бы полную энергию, что означало бы отрицательную кинетическую энергию (КЭ < 0) и, как следствие, мнимое значение v, что невозможно. В точках x_2 и x_3 скорость обращается в нуль, поскольку в этих точках $E = U$. Точки x_2 и x_3 называют *точками поворота* движения. Действительно, пусть частица находится в точке x_0 и движется, например, вправо; тогда ее кинетическая энергия (и скорость) в точке $x = x_2$ уменьшается до нуля. При этом направление движения частицы меняется на обратное и она движется влево со все возрастающей скоростью до точки x_0. В точке x_0 скорость частицы достигает максимального значения, и она продолжает двигаться (теперь уже с уменьшающейся скоростью) до тех пор, пока не достигнет точки $x = x_3$, в которой скорость частицы опять обращается в нуль; в этой точке направление движения частицы снова изменится на обратное.

Если полная энергия равна E_2 (рис. 7.7), то мы имеем уже не две, а четыре точки поворота. Частица может двигаться лишь в одной из двух потенциальных ям (или долин), в зависимости от того, в какой из них она находилась первоначально. Перейти из одной ямы в другую частица не может: этому препятствует существующий между ними потенциальный барьер, такой, например, как в точке x_4, где $U > E_2$, а это значит, что скорость v должна быть мнимой[1]. В случае, когда полная энергия равна E_3, имеется лишь одна точка поворота x_5, поскольку $U(x) < E_3$ для всех $x > x_5$; при этом скорость частицы, если она движется влево, изменяется по мере прохождения частицей различных потенциальных ям; затем частица останавливается в точке $x = x_5$ и поворачивает в другую сторону, начиная движение слева направо, которое продолжается неограниченно долго: частица никогда не возвращается назад.

Откуда нам известно, что направление движения частицы действительно изменяется на противоположное в точках поворота? Мы узнаем это благодаря тому, что нам известно, какая сила действует на частицу. Сила F связана с потенциальной энергией U выражением (7.1):

$$F = -\frac{dU}{dx}.$$

Иными словами, сила F в любой точке равна (с обратным знаком) производной величины U по x, т. е. тангенсу угла наклона кривой $U(x)$. Например, в точке $x = x_2$ эта производная положительна, так что сила отрицательна, т. е. действует влево (в направлении уменьшения координаты x); в точке $x = x_3$ производная отрицательна, так что сила положительна, т. е. действует вправо. В обоих случаях сила действует в направлении, противоположном направлению движения частицы.

При $x = x_0$ производная функции $U(x)$ равна нулю, так что сила тоже равна нулю. Говорят, что в этой точке частица находится в *равновесии*. Это означает, что результирующая сила, действующая на частицу, равна нулю. Следовательно, ускорение частицы при этом также равно нулю, и если частица первоначально находилась в покое, то она сохранит свое состояние покоя. Если бы частица, находившаяся в покое в точке $x = x_0$, переместилась немного влево или вправо, то на нее подействовала бы отличная от нуля сила, направленная таким образом, чтобы вернуть частицу обратно в точку x_0. Иными словами, если бы частица сместилась немного, например, влево от x_0, то сила была бы направлена вправо, поскольку $dU/dx < 0$; при смещении же частицы вправо сила изменила бы направление на противоположное. В случае,

[1] Последнее утверждение справедливо лишь в рамках механики Ньютона. Согласно современной квантовой механике, частица может «туннелировать» сквозь такой барьер, что действительно наблюдается на микроскопическом (атомном и субатомном) уровнях.

когда при небольшом смещении из положения равновесия частица вновь возвращается к нему, говорят, что частица находится в *устойчивом равновесии*. Любой *минимум* потенциальной кривой предоставляет собой точку устойчивого равновесия.

В точке $x = x_4$ частица также будет находиться в равновесии, поскольку $F = -dU/dx = 0$. Если частица хотя бы немного сместится из этого положения влево или вправо, на нее подействует сила, еще более удаляющая частицу от точки равновесия. Точки, подобные x_4, в которых потенциальная кривая имеет максимум, являются точками *неустойчивого равновесия*. Частица, находящаяся в одной из этих точек, не возвращается в нее при небольших смещениях, а еще дальше уходит от нее.

В случае когда частица находится в области, где потенциальная энергия U постоянна (например, $x = x_0$ на рис. 7.7), то действующая на нее сила равна нулю во всей такой области. Частица в любой точке этой области находится в равновесии, и если сместить ее немного в любую сторону, то действующая сила по-прежнему будет равна нулю. В этом случае говорят, что частица находится в *безразличном равновесии*.

Следует заметить, что описанное выше движение очень сходно (или даже полностью совпадает) с движением шара, скользящего по горке, форма которой такая же, как и у кривой $U(x)$. Попробуйте заново прочесть вышеизложенный материал, имея в виду эту аналогию.

Из приведенного выше анализа [по существу, уже из выражения (7.1)] становится ясно, что сила всегда действует в таком направлении, чтобы понизить потенциальную энергию частицы.

Пример 7.8. Постройте потенциальную кривую и проанализируйте движение груза массой m, закрепленного на конце горизонтально расположенной пружины с коэффициентом упругости k и скользящего без трения по горизонтальному столу (рис. 7.8, *а*). Первоначально груз смещается вправо, так что пружина растягивается на расстояние x_0; затем груз отпускают (без начальной скорости).

Решение. В этом случае потенциальная энергия имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Соответствующая потенциальная кривая изображена на рис. 7.8, *б*. В начальном состоянии $x = x_0$ и $v = 0$, и, следовательно, полная энергия равна $E = (1/2)kx_0^2$. Поскольку полная энергия сохраняется, в любой точке x мы имеем

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

Из этого выражения можно найти скорость v в любом положении x. На рис. 7.8, *б* указаны кинетическая и потенциальная энергии в точке $x = x_1$, и их можно найти из графика. После того как груз отпускают в точке $x = x_0$, на него влево будет действовать сила $F = -dU/dx = -kx$; груз ускоряется влево, и его скорость увеличивается до тех пор, пока он не пройдет точку $x = 0$. Начиная с этой точки, груз замедляется (теперь сила F стала положительной и действует вправо) и в конце концов останавливается в точке $x = -x_0$. Однако все еще действует сила $F = -kx$, которая ускоряет груз вправо.

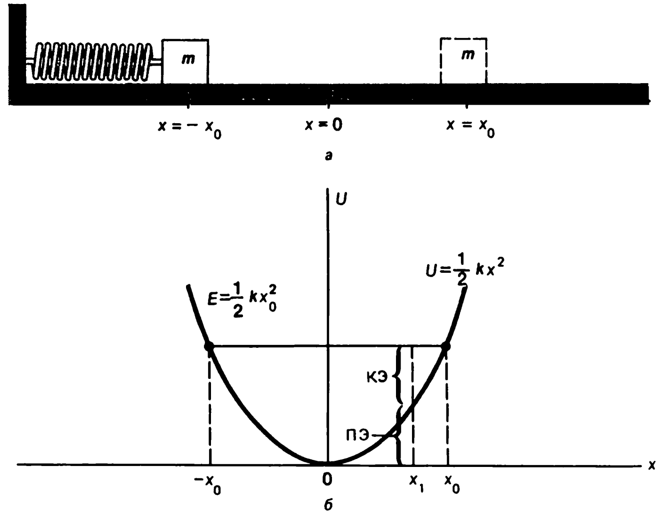

Рис. 7.8. *а* – тело массой *m*, колеблющееся на пружине; *б* – кривая потенциальной энергии для этого тела.

Таким образом, груз совершает колебания между точками x_0 и $-x_0$. Наибольшую скорость и, следовательно, кинетическую энергию груз имеет в той точке, где потенциальная энергия U минимальна, а именно в точке $x = 0$.

7.7. Мощность

Мощность определяется как скорость, с которой совершается работа. Если работа W производится за время t, то *средняя мощность* $\bar{P}$ равна

$$\bar{P} = \frac{W}{t}.$$

Мгновенная мощность дается формулой

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Работа, совершаемая в каком-то процессе, равна количеству энергии, преобразуемой из одной формы в другую. Следовательно, можно также сказать, что мощность равна **скорости** преобразования энергии:

$$P = \frac{dE}{dt}.$$

Мощность лошади определяют как механическую работу, которую лошадь может выполнить в единицу времени. Когда говорят о мощности двигателя, то имеют в виду количество химической или электрической энергии, которое с его помощью можно преобразовать в механическую энергию в единицу времени. В системе единиц СИ мощность измеряется в джоулях в секунду, и эта единица измерения имеет специальное название ватт (Вт); причем, 1 Вт = 1 Дж/с. С ваттом мы больше всего знакомы как с характеристикой электрической лампочки накаливания или электронагревателя, которые преобразуют электрическую энергию в световую или тепловую, однако эта единица измерения используется и для других видов преобразования энергии. Для практических целей нередко используют более крупную единицу мощности, а именно *лошадиную силу* (л. с.). Существует британская лошадиная сила[1] (л. с.), которая равна 746 Вт. В метрической системе 1 л. с. равна 735,5 Вт, так что отличие метрической и британской лошадиных сил не превышает 1%.

Чтобы понять, чем различаются энергия и мощность, рассмотрим следующий пример. Человек ограничен в величине производимой им работы не только требуемой для этого полной энергией, но и скоростью использования этой энергии, т. е. мощностью. Например, человек может пройти большое расстояние или преодолеть лестницу со многими ступеньками, прежде чем он будет вынужден остановиться из-за того, что израсходовал слишком много энергии. Однако, если человек очень быстро пробежит по лестнице, он может упасть в изнеможении, преодолев всего лишь один-два пролета. В этом случае ограничение ставит величина затрачиваемой мощности, т. е. скорости, с которой человек за счет биохимических процессов преобразует химическую энергию пищи в механическую энергию.

Пример 7.9. Человек массой 70 кг взбегает вверх по длинной лестнице за 4,0 с. Высота лестницы по вертикали составляет 4,5 м. Вычислите развиваемую при этом человеком среднюю мощность (в ваттах и лошадиных силах).

Решение. Человек совершает работу против силы тяжести. Следовательно, развиваемая им средняя мощность равна

$$\bar{P} = \frac{mgh}{t} = \frac{(70\ \text{кг})(9{,}8\ \text{м/с}^2)(4{,}5\ \text{м})}{4{,}0\ \text{с}} = 770\ \text{Вт}.$$

Поскольку 1 л. с. = 735,5 Вт, человек совершает работу с такой скоростью, что развивает мощность, несколько превышающую 1 л. с. Следует заметить, что на таком уровне мощности человек, как правило, долго работать не сможет.

При движении автомобиля совершается работа по преодолению силы трения (и сопротивления воздуха), по

[1] Эта единица впервые была установлена Джеймсом Уаттом (1736–1819), которому необходимо было характеризовать мощность недавно изобретенных паровых двигателей. Уатт обнаружил экспериментально, что хорошая лошадь может работать весь день с определенной средней мощностью. Для того чтобы не быть обвиненным в завышении возможностей своих паровых двигателей, он увеличил найденное им значение примерно в 1,5 раза и таким образом определил британскую лошадиную силу равной 746 Вт.

преодолению подъемов, а также для ускорения (разгона). У автомобиля (точнее, его двигателя) также имеется предел мощности, которую он в состоянии развить, и ее обязательно указывают в техническом паспорте (ранее в лошадиных силах, теперь в киловаттах). Автомобилю необходимо развивать большую мощность, когда он поднимается на возвышенность или когда он ускоряется (например, при обгоне). В следующем примере мы вычислим мощность, которая требуется в этих ситуациях для автомобиля среднего класса. Даже если автомобиль едет по ровной дороге, ему необходимо затрачивать мощность, чтобы преодолеть силы трения и сопротивления воздуха; эти силы зависят от конкретных условий, но обычно их величина лежит в диапазоне 400–1000 Н.

Во многих случаях мощность удобно выражать через результирующую силу **F**, приложенную к телу, и скорость **v** этого тела. Поскольку $P = dW/dt$, а из (6.7) мы имеем $dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}$, то

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{l}}{dt},$$

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{7.13}$$

Пример 7.10. Требуется вычислить мощность, необходимую для движения автомобиля массой 1400 кг в следующих условиях: а) автомобиль въезжает на холм под углом 10° к горизонту с постоянной скоростью 80 км/ч (рис. 7.9); б) автомобиль ускоряется от 90 до 110 км/ч за 6,0 с с целью обгона другого автомобиля. Будем считать, что сила трения, действующая на автомобиль, равна 700 Н.

Решение. а) Для движения с постоянной скоростью вверх по склону холма

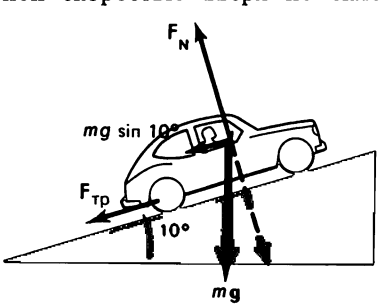

Рис. 7.9. К расчету мощности, необходимой для подъема автомобиля на холм (пример 7.10).

автомобилю требуется развить силу тяги, равную сумме силы трения и составляющей силы тяжести, параллельной склону холма и равной $mg \sin 10° = (1400 \text{ кг}) \times \times (9{,}8 \text{ м/с}^2)(0{,}174) = 2400$ Н. Поскольку $v = 80$ км/ч $= 22$ м/с, причем скорость параллельна силе **F**, имеем

$$P = Fv = (2400 \text{ Н} + 700 \text{ Н})(22 \text{ м/с}) =$$

$$= 6{,}8\cdot 10^4 \text{ Вт} = 91 \text{ л.с.}$$

б) Автомобиль ускоряется от 90 до 110 км/ч (или от 25,0 до 30,6 м/с). Таким образом, сила тяги автомобиля должна преодолеть сумму силы трения 700 Н и силы, необходимой для получения ускорения $a = (30{,}6 \text{ м/с} - 25{,}0 \text{ м/с})/(6{,}0 \text{ с}) = 0{,}93 \text{ м/с}^2$. Поскольку масса автомобиля равна 1400 кг, требуемая для ускорения сила равна $F = ma = (1400 \text{ кг})(0{,}93 \text{ м/с}^2) = 1300$ Н, так что результирующая сила будет 2000 Н. Учитывая, что средняя скорость равна $v = 27{,}8$ м/с, из (7.13) получаем необходимую среднюю мощность

$$\bar{P} = (2000 \text{ Н})(27{,}8 \text{ м/с}) =$$

$$= 5{,}6\cdot 10^4 \text{ Вт} = 75 \text{ л.с.}$$

Учитывая тот факт, что только 60–80% мощности двигателя передается на колеса автомобиля, из проведенных выше вычислений ясно, что двигатель мощностью 100–150 л.с. вполне годится для практического использования в автомобилях среднего класса. Как по экономическим (расход горючего), так и по экологическим (загрязнение окружающей среды) требованиям применение более мощных двигателей – это излишество, которое общество не должно поощрять[1].

Заключение

Консервативная сила зависит только от положения тела, на которое она действует; работа, совершаемая этой силой при перемещении тела из одного положения в другое, зависит только от этих двух положений и не зависит от пути перемещения. Работа, совершаемая консервативной силой, является механически обратимой, что не имеет места для неконсервативной силы, такой, как сила трения. Потенциальная энергия U может быть определена только для консервативных сил; в одномерном случае она связана с силой выражением $F = -dU/dx$.

Если на тело действуют только консервативные силы, то его полная механическая энергия E, определяемая как сумма кинетической и потенциальной энергий, сохраняется:

$$E = \text{КЭ} + U = \text{const}.$$

В случае же, когда на тело действуют также неконсервативные силы, в игру вступают кроме механической также и другие формы энергии (например, тепловая). Экспериментально установлено, что если учесть все формы энергии, то полная энергия будет оставаться неизменной. В этом состоит *закон сохранения энергии.*

Гравитационная сила, описываемая законом всемирного тяготения Ньютона, является консервативной силой. Потенциальная энергия частицы массой m, обусловленная полем тяготения Земли, дается выражением $U(r) = -GmM_З/r$, где $M_З$ – масса Земли, r – расстояние тела от центра Земли (разумеется, превосходящее радиус Земли или равное ему).

Мощность определяется как скорость, с которой совершается работа или с которой энергия преобразуется из одной формы в другую.

---

[1] Однако заметим, что производители автомобилей нередко указывают завышенное значение мощности двигателя по сравнению с тем, что потом проявляется при эксплуатации автомобиля.

Вопросы

1. Перечислите некоторые неконсервативные силы, встречающиеся в повседневной жизни, и объясните, почему они являются таковыми.

2. Вы поднимаете книги со стола на высокую полку. Перечислите силы, действующие при этом на книгу, и определите, какие из них являются консервативными, а какие нет.

3. Результирующая сила, действующая на частицу, консервативна и увеличивает ее кинетическую энергию на 300 Дж. Каково при этом изменение а) потенциальной энергии частицы; б) ее полной энергии?

4. Имеет ли физический смысл следующее утверждение: использование шестов из фибергласа в прыжках в высоту привело к росту результатов благодаря тому, что бо́льшая его гибкость дает дополнительную потенциальную энергию, преобразуемую в гравитационную потенциальную энергию? Объясните.

5. Имеется наклонная плоскость высотой h. Тело массой m скатывается (без начальной скорости) из верхней точки. Зависит ли скорость этого тела у основания наклонной плоскости от угла, который она составляет с горизонтом, если а) трение отсутствует; б) трение имеется?

6. Почему так утомительно с большой силой давить на твердую стенку, хотя при этом никакой работы не производится?

7. Проанализируйте движение простого колеблющегося маятника с точки зрения энергии в случаях, когда а) пренебрегается трением; б) трение учитывается. Объясните, почему старинные часы необходимо заводить.

8. Если уронить очень упругий мяч, сможет ли он подпрыгнуть на высоту, большую, чем та, на которой он находился?

9. Правильно ли утверждение, что камень, брошенный с некоторой начальной скоростью с вершины скалы в море, войдет в воду со скоростью, которая будет одна и та же как в случае, когда его бросают горизонтально, так и при броске под углом к горизонту? Объясните.

10. Спиральная пружина массой m покоится в вертикальном положении на столе. Сможет ли пружина, подпрыгнув, оторваться от стола, после того как вы сожмете ее, надавив сверху, а затем отпустите? Объясните свой ответ, используя закон сохранения энергии.

11. Что происходит с потенциальной энергией, которую имела вода в верхней части водопада, когда вода достигает его основания?

12. Опытные туристы предпочитают перешагивать через упавшее бревно, а не, наступив на него, спрыгивать с противоположной стороны. Объясните, почему.

13. Два наблюдателя находятся на разных платформах, которые движутся относительно друг друга со скоростью v. Они наблюдают за телом, которое тянут по шероховатой горизонтальной поверхности. Совпадут ли полученные этими наблюдателями значения а) кинетической энергии тела; б) полной работы, совершаемой над телом; в) механической энергии, перешедшей в тепловую из-за наличия трения? Не противоречит ли ответ на вопрос «в» ответам на вопросы «а» и «б»? Объясните.

14. а) Откуда берется кинетическая энергия автомобиля при равномерном его ускорении из состояния покоя? б) Как связать возрастание кинетической энергии с наличием силы трения, с которой дорога действует на шины автомобиля?

15. Зимой Земля приближается к Солнцу на кратчайшее расстояние. Когда гравитационная потенциальная энергия Земли достигает своего наибольшего значения?

16. Назовите состояния равновесия, в которых находится каждый из шариков на рис. 7.10.

17. Может ли полная механическая энергия $E = \text{КЭ} + U$ когда-либо быть отрицательной? Объясните.

18. а) Подробно опишите изменения скорости частицы, у которой на рис. 7.7 энергия равна E_3 и которая перемещается сначала из точки x_6 в точку x_5, а затем обратно в точку x_6. б) В каких точках кинетическая энергия частицы наибольшая, а в каких наименьшая?

19. Приведите примеры устойчивого, неустойчивого и безразличного равновесий.

20. В каком состоянии равновесия находится

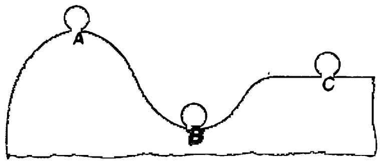

Рис. 7.10.

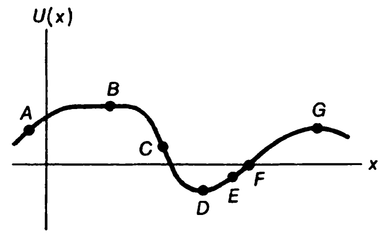

Рис. 7.11.

куб, когда он а) покоится на одной из граней; б) покоится на ребре?

21. На рис. 7.11 приведена кривая потенциальной энергии $U(x)$. а) В какой точке сила является наибольшей? б) Для каждой из обозначенных буквами точек укажите, в каком направлении действует сила: влево, вправо, или же она равна нулю. в) Какая точка соответствует состоянию равновесия и какого типа это равновесие?

22. Почему перегруженный автомобиль с трудом поднимается на крутой холм?

23. Предположим, что вы поднимаете чемодан с пола на стол. Зависит ли работа, совершаемая вами над чемоданом: а) от того, поднимаете ли вы его вертикально вверх, или по более сложному пути; б) от времени, которое вы на это затрачиваете; в) от высоты стола; г) от массы чемодана?

24. Ответьте на вопросы п. 23, заменив «работу» на «мощность».

25. Почему легче подниматься в гору по зигзагообразному пути, а не прямо к вершине?

Задачи

Раздел 7.1

1. Если потенциальная энергия равна $U = x^2 + 2xy + 4y^2z$, то чему будет равна сила $\mathbf{F}$?

2. (II) Покажите, что сила упругости идеальной пружины $F = -kx$ является консервативной.

3. (II) Сила упругости некоторой пружины записывается в виде $\mathbf{F} = (-kx + ax^2 + bx^4)\mathbf{i}$. а) Является ли эта сила консервативной? Объясните. б) Если эта сила консервативна, то найдите вид функции потенциальной энергии.

4. (II) Ядерная сила взаимодействия между двумя нейтронами в ядре приближенно описывается потенциалом Юкавы:

$$U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0},$$

где r – расстояние между нейтронами, а величины U_0 и $r_0 \approx 10^{-15}$ м являются постоянными. а) Найдите силу $F(r)$. б) Чему равно отношение $F(3r_0)/F(r_0)$? в) Рассчитайте это же отношение для силы взаимодействия двух заряженных частиц, для которых $U(r) = -C/r$, где C – постоянная. Почему силы Юкавы называют короткодействующими?

5. (II) Силу сопротивления воздуха можно считать пропорциональной скорости v тела: $F = -kv$. Консервативна ли такая сила? Объясните.

6. (III) Покажите, что сила $\mathbf{F} = F(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ неконсервативная; здесь $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ – единичный вектор в полярных координатах (приложение В), перпендикулярный $\hat{\mathbf{r}}$. (*Подсказка:* выберите конкретный путь.) В разд. 7.5 было показано, что сила $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$ консервативна.

Раздел 7.2

7. (I) С какой скоростью лосось должен выпрыгнуть из воды, если ему необходимо преодолеть водопад высотой 2,8 м? (Используйте закон сохранения энергии.)

8. (I) При прыжке в высоту (без помощи шеста) кинетическая энергия прыгуна переходит в гравитационную потенциальную энергию. Если прыгун отрывается от Земли со скоростью 5,0 м/с и преодолевает планку со скоростью 1,2 м/с, то на какую высоту при этом был поднят его ЦМ?

9. (I) В джунглях герой приключенческого фильма Тарзан разбегается до максимальной скорости 8,0 м/с и цепляется за лиану, свешивающуюся вертикально вниз с высокого дерева. На какую максимальную высоту поднимется Тарзан, раскачиваясь на лиане? Повлияет ли на ответ длина лианы?

10. (I) Тело массой m закреплено на конце пружины с коэффициентом жесткости k. Тело смещают на расстояние x_0, после чего оно начинает колебаться туда и обратно. Напишите формулу для полной механической энергии тела E (пренебрегая трением) в любой точке x, заключенной между $-x_0$ и x_0, через заданные величины.

11. (II) На столе помещена вертикально пружина с коэффициентом упругости 850 Н/м, которую сжимают на длину 0,400 м (массой пружины пренебрегите). а) Какую скорость может сообщить пружина шарику массой 0,3 кг, когда ее отпускают (шарик находится на конце пружины)? б) На какую высоту поднимется шарик из своего первоначального положения (когда пружина сжата)?

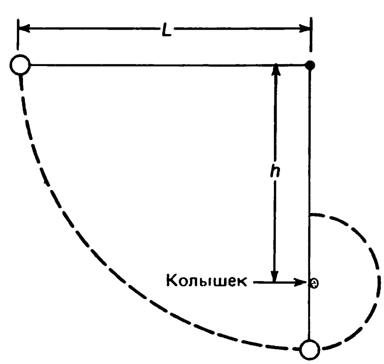

Рис. 7.12.

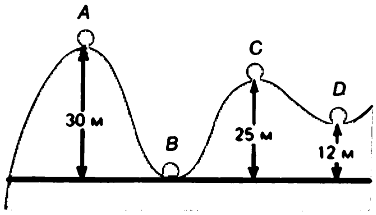

Рис. 7.13.

12. (II) К одному из концов шнура длиной L в горизонтальной плоскости привязан шарик, а другой конец шнура жестко закреплен (рис. 7.12). а) Если отпустить шарик, то какой будет его скорость в низшей точке траектории (см. рисунок)? б) На расстоянии h под гочкой закрепления шнура вбит небольшой колышек. Какова будет скорость шарика, когда он достигнет верхней точки своей круговой траектории вокруг колышка, если $h = 0{,}75L$?

13. (II) На рис. 7.13 изображен аттракцион, известный под названием «американские горы». Предполагая отсутствие трения, вычислите скорость любителя этого аттракциона в точках B, C и D, если известно, что в точке A его скорость равна 2,30 м/с.

14. (II) Футбольный мяч брошен с начальной скоростью 12,5 м/с под углом 30° к горизонту. а) Какова его скорость в высшей точке подъема? б) На какую высоту поднимется мяч? Для ответа на вопросы используйте закон сохранения энергии.

15. (II) Тело массой m подвешено снизу к вертикальной пружине с коэффициентом упругости k. а) Найдите расстояние, на которое тело опустится сразу после его прикрепления к пружине, если оно движется медленно и останавливается в положении равновесия? б) Если дать телу возможность свободно падать после закрепления, то каково будет максимальное растяжение пружины?

16. (III) Небольшое тело массой m без трения соскальзывает по желобу, изображенному на рис. 7.14. а) Если тело не должно отрываться от внутренней поверхности желоба даже в верхней точке его круговой части (радиусом r), то с какой минимальной высоты h_m оно должно быть отпущено (без начальной скорости)? б) Если тело отпустить с высоты $h = 0{,}80h_m$, то на какой высоте произойдет его отрыв от желоба (т.е. потеря контакта с его поверхностью)?

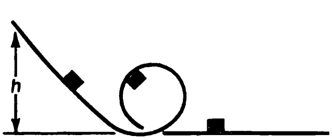

Рис. 7.14.

17. (II) Велосипедист собирается въехать на холм высотой 100 м и уклоном 10°. а) Считая массу велосипедиста вместе с машиной равной 80 кг, вычислите работу, которую необходимо совершить против силы тяжести. б) Если при каждом полном обороте педалей велосипед должен продвигаться вперед на 5,1 м, то какую среднюю силу нужно приложить к педалям по касательной к их движению по окружности? Трением и другими источниками потерь энергии пренебрегите. Педали вращаются по окружности диаметром 36 см.

18. (III) Частица массой m начинает движение из состояния покоя в верхней точке твердой сферы радиусом r и соскальзывает вниз без трения по ее поверхности (рис. 7.15). а) При каком значении угла θ частица сорвется со сферы? б) Если бы трение учитывалось, то как изменился бы угол отрыва – стал больше или меньше?

19. (III) В боровской модели атома водорода электрон удерживается на круговой орбите радиусом r вокруг ядра силой $F = -C/r^2$, где C – постоянная величина. Если электрон переходит с одной круговой орбиты радиусом $r = r_0$ на другую круговую орбиту радиусом $r = n^2 r_0$, где n – целое положительное число ($n > 1$), то чему будет равно изменение его полной механической энергии?

20. (III) Инженер рассчитывает пружину, которую необходимо поместить на дно шахты лифта, чтобы при обрыве троса лифта на высоте h над верхним концом пружины пассажиры при торможении не испытывали перегрузок больше $10g$. Пусть полная масса лифта вместе с пассажирами равна M. Каким должен быть при этом коэффициент жесткости пружины k?

21. (III) Покажите, что для того, чтобы шарик на рис. 7.12 совершил полный оборот вокруг колышка, должно выполняться условие $h \geqslant 0{,}60L$.

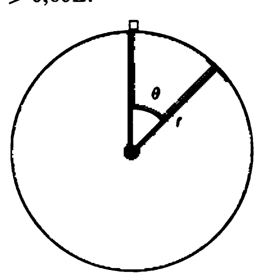

Рис. 7.15.

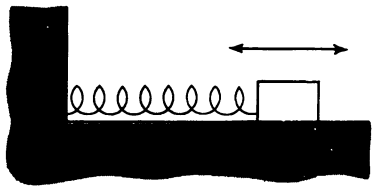

Рис. 7.16.

Раздел 7.3

22. (I) Ребенок массой 17 кг съезжает с горки высотой 4,6 м и оказывается внизу, имея скорость 2,2 м/с. Какое количество теплоты выделилось при этом?

23. (I) Бейсбольный мяч массой 145 г уронили с дерева высотой 22 м. а) С какой скоростью он ударится о Землю, если пренебречь сопротивлением воздуха? б) Если измеренное значение этой скорости равно 9,0 м/с, то чему была равна средняя сила сопротивления воздуха, действовавшая на шарик при падении?

24. (II) Лыжник, идущий по ровной лыжне со скоростью 12,6 м/с, достигает подножья горы, склон которой составляет угол 20° с горизонтом, а затем проезжает вверх по склону 11,4 м. Чему равен средний коэффициент трения лыж о склон?

25. (II) Лыжник скатывается с холма с нулевой начальной скоростью и проезжает 30 м вниз по склону, составляющему 18° с горизонтом. а) Чему равна скорость лыжника у подножья холма, если коэффициент трения равен 0,080? б) Если у подножья холма имеется горизонтальная площадка, покрытая снегом с тем же коэффициентом трения, то на какое расстояние по ней укатится лыжник? Используйте энергетические соображения.

26. (II) В аттракционе на рис. 7.13 кресло с любителем покататься проходит точку A со скоростью 1,2 м/с. Какая будет у него скорость в точке B, если средняя сила трения составляет одну пятую веса кресла с человеком? Пройденное при этом расстояние равно 70 м.

27. (III) Деревянный брусок массой 200 г укреплен на горизонтальной пружине (рис. 7.16). Брусок может скользить по столу с коэффициентом трения 0,40. На пружину действует сила 10 Н, которая сжимает ее на 18 см. Затем пружину с бруском отпускают. а) На какое расстояние от положения равновесия отклонится пружина при первом колебании? б) Какое расстояние пройдет брусок до полной остановки? в) Какое количество тепловой энергии будет произведено к этому моменту?

Раздел 7.5

28. (II) Найдите вторую космическую скорость выхода из области притяжения Солнца для тела, находящегося а) на поверхности Солнца ($R = 7{,}0 \cdot 10^5$ км, $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг); б) на расстоянии, равном среднему расстоянию от Солнца до Земли, т.е. $1{,}49 \cdot 10^8$ км. Сравните скорость в последнем случае со скоростью обращения Земли вокруг Солнца.

29. (II) Покажите, что выражение (7.9) для изменения гравитационной потенциальной энергии сводится к выражению (6.11): $\Delta U = mg \times (y_2 - y_1)$, справедливому для тел, находящихся вблизи поверхности Земли.

30. (II) Покажите, что изменение потенциальной энергии тела, перемещаемого с поверхности Земли на высоту h над ней, записывается

$$\Delta U = mgh/(1 + h/r_З),$$

где $r_З$ – радиус Земли; при этом величина h не обязательно мала.

31. (II) а) Покажите, что полная механическая энергия спутника массой m, обращающегося по орбите радиусом r вокруг Земли (масса Земли $M_З$), дается выражением

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GmM_З}{r}.$$

б) Покажите, что, хотя трение приводит к постепенному уменьшению E с течением времени, кинетическая энергия фактически должна возрастать (если только орбита остается круговой). в) Покажите, что $v = \sqrt{GM/r}$.

32. (II) Покажите, что вторая космическая скорость для любого спутника в $\sqrt{2}$ раз превышает его первую космическую (орбитальную) скорость.

33. (II) Расстояние между Землей и Солнцем в течение года изменяется в пределах $1{,}471 \cdot 10^8 - 1{,}521 \cdot 10^8$ км. Каким при этом будет общее изменение а) потенциальной энергии; б) кинетической энергии; в) полной энергии?

34. (II) Учитывая суточное вращение Земли (с частотой 1 об/сут), найдите скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить ракете, стартующей с экватора в направлении а) на восток; б) на запад; в) вертикально вверх, с тем чтобы ракета покинула поле притяжения Земли.

35. (II) а) Выведите формулу для максимальной высоты h, которую достигнет ракета, если запустить ее вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0, которая меньше второй космической. Выразите величину h через v_0, $r_З$, $M_З$ и G. б) На какую высоту поднимется ракета, если $v_0 = 8{,}2$ км/с? Пренебрегите сопротивлением воздуха и вращением Земли.

36. (II) а) Определите, как быстро меняется вторая космическая скорость v_{II} в зависимости от высоты r запуска ракеты вблизи Земли, т. е. найдите производную dv_{II}/dr. б) Найдите вторую космическую скорость спутника, обращающегося вокруг Земли по орбите на высоте 300 км, используя приближенное выражение $\Delta v \approx (dv/dr)\Delta r$.

37. (II) Метеор на высоте 720 км над поверхностью Земли имел скорость 85,1 м/с. После падения на Землю вертикально вниз он остановился, зарывшись в песок на глубину 3,25 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите: а) скорость метеора в момент времени непосредственно перед ударом о песок; б) работу, которую произвел песок при торможении метеора (масса метеора 575 кг); в) среднюю силу, действовавшую на метеор со стороны песка; г) количество произведенной тепловой энергии.

38. (II) Для того чтобы покинуть пределы Солнечной системы, межпланетный корабль должен преодолеть гравитационное притяжение как Земли, так и Солнца. Пренебрегая влиянием других небесных тел Солнечной системы, найдите: а) скорость, необходимую для того, чтобы выйти за пределы Солнечной системы; б) полную энергию, которая потребовалась бы для этого космическому кораблю массой $5{,}0 \cdot 10^5$ кг, стартующему с поверхности Земли.

39. (II) а) Предположим, что три тела массой соответственно m_1, m_2 и m_3 в начальный момент времени были удалены на бесконечно большое расстояние друг от друга. Затем они сблизились и заняли положения, указанные на рис. 7.17. Покажите, что работа, затрачиваемая на приведение их в эти положения, записывается в виде

$$W = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right).$$

б) Можно ли считать, что эта формула описывает потенциальную энергию системы тел? Или это формула для потенциальной энергии одного или двух тел, входящих в систему?

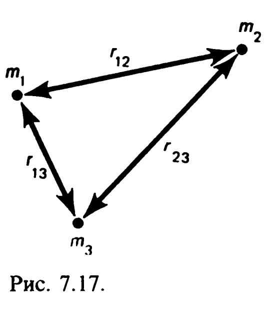

Рис. 7.17.

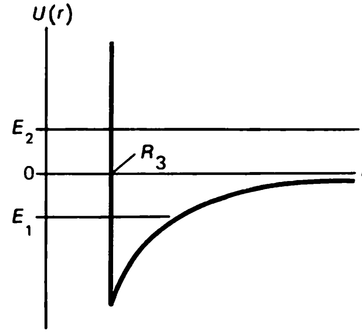

Рис. 7.18.

в) Равняется ли работа W энергии связи системы (энергия связи – это энергия, которая требуется для того, чтобы разнести тела на бесконечно большие расстояния)? Дайте объяснение.

40. (III) Сфера радиусом r_1 имеет концентрическую полость радиусом r_2. Предположим, что этот сферический слой толщиной $r_1 - r_2$ однородно заполнен веществом, полная масса которого равна M. Покажите, что гравитационная потенциальная энергия взаимодействия тела массой m с этим сферическим слоем на расстоянии r от его центра ($r > r_1$) дается выражением

$$U = -\frac{GmM}{r}.$$

* Раздел 7.6

***41.** (II) а) Покажите, что кривая потенциальной энергии для частицы, находящейся вблизи Земли и подверженной действию земного тяготения, имеет вид, изображенный на рис. 7.18. В частности, покажите, почему она почти вертикальна при $r = R_3$ (R_3 – радиус Земли). б) Опишите движение частицы, когда полная энергия равна E_1 и когда она равна E_2 (эти значения указаны на рисунке). в) Какая энергия соответствует второй космической скорости?

42. (III) Потенциальную энергию взаимодействия атомов в двухатомной молекуле можно записать в виде

$$U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}},$$

где r – расстояние между двумя атомами, а a и b – положительные постоянные. а) При каких значениях r функция $U(r)$ имеет минимум? максимум? б) При каких значениях r выполняется условие $U(r) = 0$? в) Постройте зависимость $U(r)$, когда r изменяется от нуля до достаточно больших значений, и укажите на графике все найденные выше характерные точки. г) Опишите движение одного атома относительно другого, когда $E < 0$ и когда $E > 0$. д) Пусть F – сила, с которой один атом действует на другой. Для каких значений r мы имеем $F > 0$, $F < 0$, $F = 0$? е) Найдите F как функцию величины r.

* 43. (III) *Энергия связи* системы из двух частиц определяется как энергия, необходимая для разделения обеих частиц из состояния, соответствующего минимуму энергии их взаимодействия, в состояние, соответствующее их бесконечному удалению друг от друга ($r = \infty$). Найдите энергию связи для молекулы в задаче 42.

Раздел 7.7

44. (I) Сколько времени потребуется для того, чтобы с помощью подъемного устройства мощностью 1,25 л.с. поднять пианино массой 325 кг в окно шестого этажа, расположенное на высоте 16 м над тротуаром?

45. (I) Покажите, что 1 л.с. = 735,5 Вт.

46. (I) Электроэнергию часто измеряют в киловатт-часах. Покажите, что киловатт-час (кВт·ч) действительно является единицей энергии и равен $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

47. (I) Футболист массой 80 кг, бегущий со скоростью 5 м/с, останавливается защитником другой команды в течение 1,0 с. а) Какова была первоначальная кинетическая энергия футболиста? б) Какая средняя мощность потребовалась, чтобы остановить его?

48. (I) Автомобилю для равномерного движения со скоростью 90 км/ч необходимо развить мощность 15 л.с. Найдите среднюю силу, действующую на автомобиль за счет трения и сопротивления воздуха.

49. (I) Толкатель ядра сообщает ядру массой 7,3 кг такое ускорение, что скорость ядра за 2,0 с становится равной 15 м/с. Какую среднюю мощность он для этого развил?

50. (II) Какую минимальную мощность (в л.с.) нужно развить, чтобы передвигать по полу ящик массой 200 кг со скоростью 1,22 м/с, если коэффициент трения равен 0,45?

51. (II) Альпинист массой 70 кг взбирается на вершину горы высотой 3120 м. Восхождение совершается в течение 4,0 ч со стартовой площадки, находящейся на высоте 1850 м. Вычислите: а) работу, совершаемую против силы тяжести; б) среднюю мощность, развиваемую альпинистом в ваттах и лошадиных силах; в) требуемую скорость поступления энергии, считая, что КПД человеческого организма составляет 15%.

52. (II) С какой скоростью должен въезжать велосипедист на склон холма с углом наклона 12°, чтобы сохранить развиваемую им мощность на уровне 0,20 л.с.? Пренебрегите трением и считайте, что масса велосипедиста вместе с велосипедом равна 85 кг.

53. (II) Насос должен поднимать 5,0 кг воды ежеминутно на высоту 4,2 м. Какого порядка должна быть мощность двигателя у насоса?

54. (II) Автомобиль массой 1200 кг замедляется от скорости 90 км/ч до скорости 70 км/ч примерно за 5,0 с, при этом рычаг коробки паредач находится в нейтральном положении. Какая приблизительно мощность (в лошадиных силах) необходима для того, чтобы автомобиль двигался с постоянной скоростью 80 км/ч?

55. (II) Велосипедист съезжает с холма, имеющего уклон 6°, с постоянной скоростью 7 км/ч. Считая полную массу велосипедиста вместе с велосипедом равной 75 кг, найдите мощность, которую нужно развить велосипедисту для того, чтобы с той же скоростью въехать на холм?

56. (II) Автомобиль массой 1250 кг может развить максимальную мощность 90 л.с. Какова крутизна склона, который автомобиль сумеет преодолеть с постоянной скоростью 60 км/ч, если результирующая сила трения равна 450 Н?

57. (II) Вода течет через плотину с расходом 750 кг/с и падает вертикально вниз на 130 м, прежде чем она ударяется о лопатки турбин. Вычислите: а) скорость воды непосредственно перед соударением с лопатками турбин; б) скорость, с которой механическая энергия падения передается лопаткам турбины. Считайте, что при соударении с лопатками вода теряет 80% своей скорости, причем 12% первоначальной энергии преобразуются в тепловую.

58. (III) Велосипедист, масса которого вместе с машиной равна 80 кг, может съезжать по уклону, составляющему относительно горизонта угол 4°, с постоянной скоростью 6,0 км/ч. Активно работая педалями, велосипедист может при спуске повысить эту скорость до 40 км/ч. Какой скорости может достичь велосипедист, развивая ту же мощность при подъеме вверх по этому же уклону? Считайте, что сила трения прямо пропорциональна скорости v, т.е. $F_{тр} = bv$, где b – постоянная величина.

59. (III) Положение частицы массой 280 г дается выражением $x = 6{,}2t^3 - 3{,}0t^2 - 88t$, где время t измеряется в секундах, а x – в метрах. Вычислите результирующую скорость, с которой должна совершаться над этой частицей работа а) в момент времени $t = 2{,}0$ с и б) в момент времени $t = 4{,}0$ с. в) Какой была скорость притока энергии (средняя входная мощность) за этот промежуток времени?