8 Сохранение импульса; системы многих тел и столкновения

Закон сохранения энергии, который обсуждался в предыдущей главе, лишь один из великих законов сохранения в физике. Импульс, момент импульса (или угловой момент) и электрический заряд также являются сохраняющимися величинами. Ниже мы обсудим эти величины, поскольку законы сохранения для них играют очень важную роль в науке. В настоящей главе мы рассмотрим импульс и его сохранение; законами сохранения импульса и энергии мы воспользуемся для анализа и решения важного класса задач, связанных со столкновениями тел.

Закон сохранения импульса широко применяется для описания движения двух и более тел. До сих пор наше изучение ограничивалось главным образом рассмотрением движения отдельной материальной точки (частицы). В этой главе мы рассмотрим задачу о движении двух и более материальных точек, а также движение протяженных тел, которые можно рассматривать как совокупность частиц. Для этого рассмотрения большое значение имеет понятие центра масс, к изучению которого мы теперь и приступим.

8.1. Центр масс

Как уже упоминалось, мы рассматривали до сих пор движение отдельной материальной точки. При описании движения протяженного тела (т. е. тела, имеющего линейные размеры) мы предполагали, что оно представляет собой материальную точку или что оно участвует только в поступательном движении. Однако реальные «протяженные» тела могут участвовать также во вращательном и других видах движения. Например, на рис. 8.1, *a* прыгунья в воду участвует только в поступательном движении (все части ее тела перемещаются по одинаковым траекториям), в то время как на рис. 8.1, *b* она участвует в поступательном и вращательном движении. Протяженное тело может колебаться, а различные составляющие его части могут при этом двигаться сложным образом (см., например, движение рук прыгуньи). Назовем движение, которое не является чисто поступательным, *общим движением*.

Можно показать, что даже если тело вращается или имеется система тел, движущихся относительно друг друга, то у тела (или группы тел) имеется точка, которая двигалась бы по той же траектории, что и материальная точка, если бы на нее действовала такая же результирующая сила. Эта точка называется **центром масс** (ЦМ). Общее движение протяженного тела или системы тел можно рассматривать как сумму поступательного движения их ЦМ и вращательного, колебательного или другого вида движения относительно ЦМ.

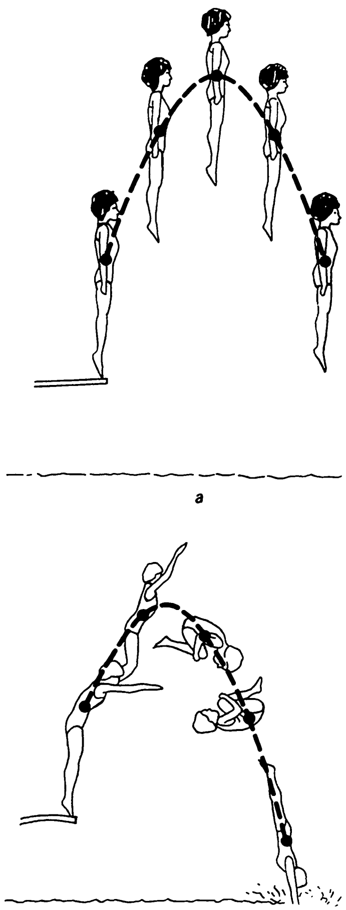


Рис. 8.1. Движение прыгуньи в воду. *а* – только поступательное движение; *б* – поступательное и вращательное движение.

В качестве примера рассмотрим движение центра масс прыгуньи в воду (рис. 8.1). Ее ЦМ движется по параболической траектории, если прыгунья вращается, как показано на рис. 8.1, *б*. Это та же параболическая траектория, по которой движется снаряд, когда на него действует лишь сила тяжести (это движение тела, брошенного под углом к горизонту, или баллистическое движение). Другие точки тела вращающейся прыгуньи движутся по более сложным траекториям.

Вычислим теперь положение ЦМ. Любое протяженное тело можно представить как совокупность очень маленьких частиц. Однако рассмотрим сначала систему, состоящую всего из двух частиц с массами соответственно m_1 и m_2. Выберем систему координат таким образом, чтобы обе части находились на оси x. Пусть координаты частиц равны x_1 и x_2 соответственно (рис. 8.2). Тогда положение $x_{ЦМ}$ центра масс системы запишется в виде

$$x_{ЦМ} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M},$$

где $M = m_1 + m_2$ – полная масса системы. Центр масс лежит на прямой, соединяющей частицы m_1 и m_2. Если массы частиц одинаковы ($m_1 = m_2 = m$), то их ЦМ лежит посередине между ними, так как $x_{ЦМ} = m(x_1 + x_2)/2m = (x_1 + x_2)/2$. Если масса одной из частиц больше другой (например, $m_1 > m_2$), то ЦМ расположен ближе к большей массе. Если вся масса сосредоточена в одной точке, например с координатой x_2, т. е. $m_1 = 0$, то, как и следовало ожидать, $x_{ЦМ} = (0x_1 + m_2x_2)/(0 + m_2) = x_2$.

Рассмотрим систему из n частиц, где n может быть очень большим; это может быть протяженное тело, которое мы рассматриваем как состоящее из n маленьких

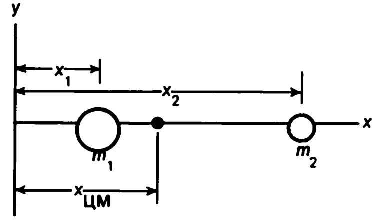


Рис. 8.2. Центр масс системы из двух частиц располагается на прямой, соединяющей эти две частицы.

частиц. Если n частиц расположены вдоль одной прямой (совпадающей с выбранной осью x), то положение ЦМ дается выражением

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – массы частиц, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – их координаты; символ $\sum_{i=1}^{n}$ означает суммирование по всем частицам, где индекс i принимает целые значения от 1 до n. (Во многих случаях мы будем писать просто $\sum m_i x_i$, опуская индексы суммирования от $i = 1$ до $i = n$.) Полная масса системы равна $M = \sum m_i$. В случае двух или трех измерений (как это имеет место для протяженного тела) координаты ЦМ запишутся в виде

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \tag{8.1}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты частицы массой m_i, а $M = \sum m_i$ – полная масса системы.

Исходя из практических соображений, обычно вычисляют координаты ЦМ [формула (8.1)], но иногда удобно (например, для получения общих выводов) записать (8.1) в векторном виде. Если $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ – радиус-вектор (вектор, проведенный из начала координат в точку, где находится частица) i-й частицы, а $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = x_{\text{ЦМ}}\mathbf{i} + y_{\text{ЦМ}}\mathbf{j} + z_{\text{ЦМ}}\mathbf{k}$ – радиус-вектор центра масс системы, то

$$\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}. \tag{8.2}$$

Протяженные тела во многих случаях удобно рассматривать как такие тела, в которых вещество является непрерывно распределенным. Иными словами, предполагается, что тело составлено из n частиц, причем n стремится к бесконечности. При этом в формулах (8.1) и (8.2) суммы заменяются интегралами:

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int x\,dm; \quad y_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int y\,dm; \quad z_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int z\,dm. \tag{8.3}$$

В векторном виде это выражение запишется следующим образом:

$$\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm. \tag{8.4}$$

Символ dm используется для формального описания бесконечно малого элемента массы; при расчетах он обычно записывается через геометрические (пространственные) переменные, что мы покажем в следующем разделе.

8.2. Нахождение положения центра масс

Рассмотрим, как можно вычислить положение ЦМ для некоторых систем частиц или тел.

Пример 8.1. Три частицы массой 2,50 кг каждая расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами, равными 2,00 и 1,50 м (рис. 8.3). Найдите положение центра масс системы.

Решение. Чтобы упростить расчеты, выберем систему координат так, как показано на рис. 8.3, где частица массой m_1 расположена в начале координат, а частица массой m_2 – на оси x. Тогда частица m_1 имеет координаты $x_1 = y_1 = 0$, а у частицы m_2 имеем $x_2 = 2{,}0$ м, $y_2 = 0$; координаты частицы m_3 равны $x_3 = 2{,}0$ м, $y_3 = 1{,}5$ м. Таким образом, из формулы (8.1) находим

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{(2{,}50\ \text{кг})(0) + (2{,}50\ \text{кг})(2{,}00\ \text{м})}{3\,(2{,}50\ \text{кг})} + \frac{(2{,}50\ \text{кг})(2{,}00\ \text{м})}{3\,(2{,}50\ \text{кг})} = 1{,}33\ \text{м},$$

$$y_{\text{ЦМ}} = \frac{(2{,}50\ \text{кг})(0) + (2{,}50\ \text{кг})(0)}{7{,}50\ \text{кг}} + \frac{(2{,}50\ \text{кг})(1{,}50\ \text{м})}{7{,}50\ \text{кг}} = 0{,}50\ \text{м}.$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}$ и положение ЦМ показаны на рис. 8.3.

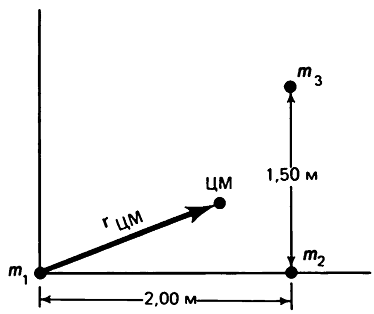


Рис. 8.3. Пример 8.1.

У однородных тел симметричной формы, таких, как сферы, цилиндры или тела прямоугольной формы, ЦМ располагается в геометрическом центре тела. Для того чтобы проиллюстрировать правильность этого утверждения, рассмотрим однородный круговой цилиндр (например, твердый диск). Мы предполагаем, что ЦМ будет расположен в центре круга. Поэтому выберем систему координат таким образом, чтобы ее начало совпало с этой точкой, а ось z направим перпендикулярно плоскости диска (рис. 8.4). При вычислении суммы $\sum m_i x_i$ в формуле (8.1) учтем, что если в точке с координатой $+x_i$ сосредоточена некоторая масса, то такая же масса сосредоточена и в точке с координатой $-x_i$. Это приведет к взаимному сокращению всех членов суммы, и, следовательно, $x_{\text{ЦМ}} = 0$; аналогично получаем $y_{\text{ЦМ}} = 0$. В вертикальном (z) направлении ЦМ должен лежать посередине

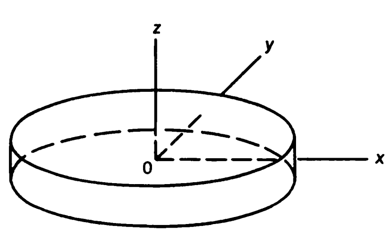


Рис. 8.4. Цилиндр с началом координат, помещенным в его геометрический центр.

между центрами окружностей верхнего и нижнего оснований диска, поскольку если мы выберем начало координат в этой точке, то любому количеству массы, сосредоточенной в слое с координатой $+z_i$, соответствует такое же количество массы в слое с координатой $-z_i$; поэтому $z_{\text{цм}} = 0$. Для других однородных тел симметричной формы можно провести аналогичное доказательство и получить, что ЦМ должен располагаться на оси симметрии. Если тело симметричной формы *неоднородно*, то приведенные выше аргументы теряют силу. Например, ЦМ диска, утяжеленного с одной стороны, располагается не в геометрическом центре, а ближе к утяжеленной стороне.

Пример 8.2. Определим положение ЦМ однородного конуса высотой h и радиусом основания R.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы начало отсчета совпадало с вершиной конуса, а ось z была направлена вдоль оси симметрии (рис. 8.5). При этом $x_{\text{цм}} = y_{\text{цм}} = 0$, поскольку, согласно приведенным выше соображениям, ЦМ должен располагаться на оси симметрии. Чтобы найти координату $z_{\text{цм}}$, разобьем конус на бесконечное число цилиндров высотой dz; один из этих цилиндров показан на рис. 8.5. Масса каждого бесконечно малого цилиндра равна $dm = \rho\, dV = \rho\pi r^2 dz$, где ρ – плотность вещества (масса единицы объема), которая постоянна, поскольку мы считаем, что конус однородный, и $dV = \pi r^2 dz$ – объем очень низкого цилиндра. Выполним интегрирование, используя формулы (8.3):

$$z_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int z\, dm = \frac{1}{M}\int_0^h z\rho\pi r^2\, dz.$$

Так как r (радиус любого бесконечно малого цилиндра) связан с z отношением $r/z = R/h$, т. е. $r = Rz/h$, мы имеем

$$z_{\text{цм}} = \frac{1}{M}\int_0^h \frac{\rho\pi R^2}{h^2} z^3\, dz = \frac{\rho\pi R^2}{Mh^2}\frac{z^4}{4}\bigg|_0^h = \frac{\rho\pi R^2 h^2}{4M}.$$

Полная масса конуса M равна плотности ρ, умноженной на полный объем конуса $\pi R^2 h/3$; следовательно, $M = \rho\pi R^2 h/3$ и

$$z_{\text{цм}} = \frac{3}{4}h.$$

Таким образом, ЦМ расположен на высоте $(3/4)h$ от вершины конуса, или на расстоянии $(1/4)h$ от его основания.

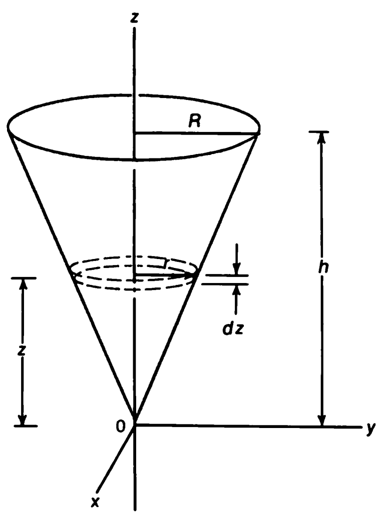


Рис. 8.5. Положение центра масс (ЦМ) однородного конуса.

Чтобы найти положение ЦМ совокупности протяженных тел, можно использовать формулы (8.1), где m_i – масса, а x_i, y_i, z_i – координаты ЦМ каждого из тел. Для доказательства этого рассмотрим два протяженных тела A и B. Допустим, что масса тела A равна M_A и оно состоит из n_A частиц, а тело B имеет массу m_B и состоит из n_B частиц; полное число частиц равно $n = n_A + n_B$. Из формулы (8.1) получаем следующее выражение для координаты $x_{\text{ЦМ}}$:

$$Mx_{\text{ЦМ}} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \sum_{i=1}^{n_A} m_i x_i + \sum_{i=1}^{n_B} m_i x_i,$$

где $M = M_A + M_B$ – полная масса системы. Два члена в правой части представляют собой суммы по частицам, принадлежащим по отдельности телу A и телу B. Но из (8.1) мы видим, что для каждого тела можно написать соотношения

$$\sum_{i=1}^{n_A} m_i x_i = M_A x_{A\text{ЦМ}}, \qquad \sum_{i=1}^{n_B} m_i x_i = M_B x_{B\text{ЦМ}}.$$

Подставляя эти соотношения в предыдущую формулу, получаем

$$Mx_{\text{ЦМ}} = M_A x_{A\text{ЦМ}} + M_B x_{B\text{ЦМ}},$$

или

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{M_A x_{A\text{ЦМ}} + M_B x_{B\text{ЦМ}}}{M}.$$

Последнее выражение – это не что иное, как формула (8.1) для двух тел. Те же рассуждения, что и выше, можно применить к координатам y и z, причем в рассмотрение можно включить большее число тел. Таким образом, мы видим, что ЦМ системы нескольких протяженных тел можно найти, рассматривая каждое тело как частицу, вся масса которой сосредоточена в ее центре масс.

Пример 8.3. Найдем ЦМ однородного плоского тела, имеющего форму прямого угла и небольшую толщину (рис. 8.6).

Решение. Представим это тело в виде двух прямоугольников: прямоугольника A размером 2,06 × 0,20 м и прямоугольника B размером 1,48 × 0,20 м. В системе координат с началом в точке О, как показано на рис. 8.6, координаты ЦМ прямоугольника A равны $x_A = 1{,}03$ м, $y_A = 0{,}10$ м, а у прямоугольника B $x_B = 1{,}96$ м, $y_B = -0{,}74$ м. Масса прямоугольника A равна $M_A = (2{,}06\ \text{м})(0{,}20\ \text{м})(t)(\rho) = (0{,}412\ \text{м}^2)(\rho t)$, где ρ и t – соответственно плотность и толщина тела. Масса прямоугольника B равна $(1{,}48\ \text{м})(0{,}20\ \text{м})(\rho t) = (0{,}296\ \text{м}^2)(\rho t)$. Следовательно, полная масса $M = (0{,}708\ \text{м}^2)(\rho t)$. Таким образом,

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{M_A x_A + M_B x_B}{M} = \frac{(0{,}412\ \text{м}^2)(1{,}03\ \text{м}) + (0{,}296\ \text{м}^2)(1{,}96\ \text{м})}{(0{,}708\ \text{м}^2)} = 1{,}42\ \text{м};$$

мы видим, что здесь в числителе и знаме-

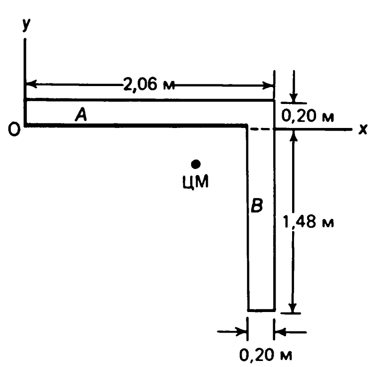


Рис. 8.6. Пример 8.3.

нателе произведения ρt сократились. Аналогично

$$y_{ЦМ} = \frac{(0{,}412\ м^2)(0{,}10\ м)+(0{,}296\ м^2)(-0{,}74\ м)}{(0{,}708\ м^2)} = -0{,}25\ м.$$

Центр масс находится приблизительно в точке, показанной на рис. 8.6 и обозначенной ЦМ.

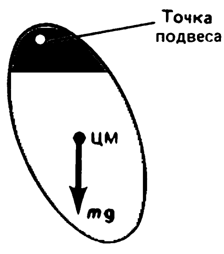


Рис. 8.7. Определение положения ЦМ тела неправильной формы.

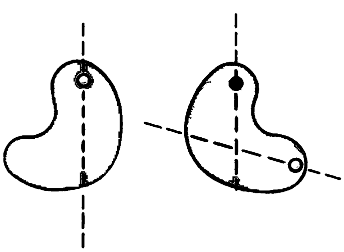


Рис. 8.8. Нахождение положения ЦМ тела.

Следует заметить, что в последнем примере ЦМ располагается *вне* тела. Другим примером может быть бублик, у которого ЦМ находится в центре полости.

Для тел неправильной формы часто бывает трудно выполнить суммирование в формулах (8.1) или интегрирование в формулах (8.3). Однако с помощью изложенного ниже метода его можно найти из эксперимента. Рассмотрим плоское однородное тело, положение ЦМ которого известно, например предмет овальной формы на рис. 8.7. Это тело подвешено в точке, расположенной вблизи его края (пусть оно подвешено на гвозде); в положении, изображенном на рис. 8.7, ЦМ тела смещен в сторону от положения равновесия. Можно считать, что вся масса тела сосредоточена в ЦМ, т.е. мы имеем математический маятник (рис. 6.9), и точно так же, как маятник может находиться в покое только в положении, когда его груз находится на вертикальной линии под точкой подвеса, протяженное тело, свободно закрепленное в одной из своих точек, будет в покое, только если его ЦМ расположится прямо под точкой подвеса.

Этот факт можно использовать для определения ЦМ любого тела неправильной формы, т.е. можно считать, что его ЦМ находится на проходящей через точку подвеса вертикальной линии ниже этой точки. Если тело двумерное или у него есть плоскость симметрии, то необходимо просто закрепить тело по очереди в двух различных точках и в каждом положении равновесия провести вертикальную линию через точку подвеса. Центр масс тела будет лежать на пересечении этих линий (рис. 8.8). Если тело подвесить в третьей точке, то вертикальная линия, проведенная через точку подвеса, также пройдет через ЦМ. Если у тела нет плоскости симметрии, то ЦМ можно найти, закрепляя тело по крайней мере в трех точках, не лежащих в одной плоскости.

8.3. Центр масс и поступательное движение

Важная роль понятия центра масс, как мы упомянули в начале настоящей главы, состоит в том, что во многих случаях движение ЦМ системы частиц (или протяженного тела) можно описать простым способом, поскольку оно связано с равнодействующей всех сил, приложенных к системе. Покажем это. Рассмотрим движение системы, состоящей из n частиц с общей массой M, которая, как мы предполагаем, сохраняется постоянной. Из формулы (8.2) имеем

$$M\mathbf{r}_{ЦМ} = \sum m_i \mathbf{r}_i.$$

Продифференцировав это соотношение по времени, получим

$$M = \frac{d\mathbf{r}_{ЦМ}}{dt} = \sum m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt},$$

или

$$M\mathbf{v}_{ЦМ} = \sum m_i \mathbf{v}_i, \tag{8.5}$$

где $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ – скорость i-й частицы массой m_i, а $\mathbf{v}_{ЦМ}$ – скорость движения ЦМ. Дифференцируя (8.5) еще раз по времени, находим

$$M\frac{d\mathbf{v}_{ЦМ}}{dt} = \sum m_i \mathbf{a}_i,$$

где $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$ – ускорение i-й частицы. Здесь $d\mathbf{v}_{ЦМ}/dt = \mathbf{a}_{ЦМ}$ – ускорение ЦМ. Согласно второму закону Ньютона, $m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i$, где $\mathbf{F}_i$ – результирующая сила, действующая на i-ю частицу. Следовательно,

$$M\mathbf{a}_{ЦМ} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i. \tag{8.6}$$

Таким образом, *произведение полной массы системы на ускорение ее центра масс равно векторной сумме всех сил, действующих на систему*. Заметим, что наша система из n частиц могла быть системой из n частиц, составляющих одно или несколько протяженных тел.

Силы $\mathbf{F}_i$, действующие на частицы системы, могут быть двух типов: 1) силы, вызванные телами, не принадлежащими системе (например, сила тяжести Земли), которые мы называем *внешними силами*, и 2) силы, с которыми одни частицы, принадлежащие системе, действуют на другие частицы этой же системы (например, электрические и гравитационные силы, или силы, обусловленные упругими связями между различными частицами системы); такие силы называются *внутренними силами*. Согласно третьему закону Ньютона, внутренние силы рассматриваются «парами»; если одна частица действует на другую с некоторой силой, то вторая частица действует на первую с силой, равной по величине, но противоположной по направлению. При суммировании всех сил в формуле (8.6) эти внутренние силы попарно сократятся. Таким образом, в правой части выражения (8.6) останутся только внешние силы, и, следовательно,

$$M\mathbf{a}_{ЦМ} = \mathbf{F}_{внешн}, \tag{8.7}$$

где $\mathbf{F}_{внешн}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему, т. е. *результирующая сила*, действующая на систему. Поскольку выражение (8.7) то же самое, что и второй закон Ньютона для частицы, можно заключить, что *центр масс системы частиц (или протяженного тела массой М) движется как отдельная частица массой М, на которую действует сила, равная равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему (или тело).* Это полезный вывод. Из него следует, что система движется так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ЦМ и все внешние силы были бы приложены в этой точке. Таким образом, поступательное движение любого тела или любой системы тел можно рассматривать как движение частицы. (В действительности в предыдущих главах мы так и поступали.) Эта теорема упрощает анализ движения сложных систем или протяженных тел (таких, как на рис. 8.1,*б*). Несмотря на то что движение различных частей системы может быть очень сложным, для решения многих задач достаточно знать лишь то, как движется ЦМ системы. На следующем примере мы покажем, что с помощью этой теоремы можно весьма просто решать некоторые задачи.

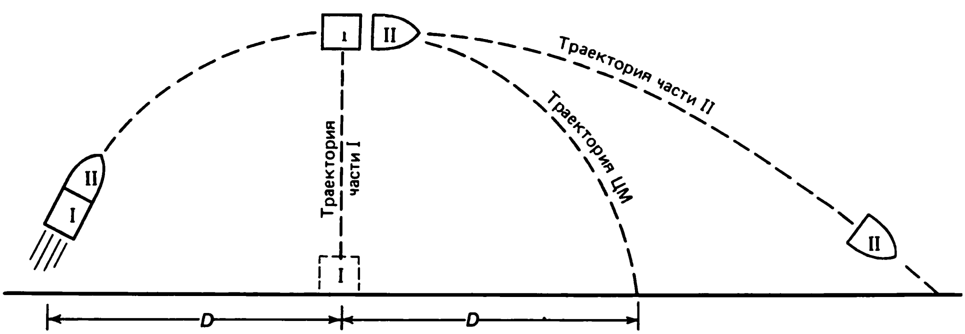


Рис. 8.9. Пример 8.4.

Пример 8.4. Ракета запускается в воздух, как показано на рис. 8.9. В верхней точке траектории, находящейся на расстоянии D по горизонтали от точки запуска, она разделяется на две равные по массе части I и II. Часть I падает вертикально вниз на Землю. Где приземлится часть II? Считайте, что $\mathbf{g} = \text{const}$.

Решение. Центр масс ракеты движется по той же траектории, что и тело, брошенное под углом к горизонту, на которое действует только сила тяжести. Следовательно, ЦМ ракеты достигнет Земли в точке, удаленной от точки запуска на расстояние $2D$. Поскольку массы частей I и II одинаковы, ЦМ расположен посредине между ними. Следовательно, часть II приземлится на расстоянии $3D$ от точки запуска. (Если части I будет сообщен дополнительный импульс вверх или вниз, вместо того чтобы предоставить ей возможность свободно падать только под действием силы тяжести, ответ будет несколько более сложным.)

8.4. Импульс и его связь с силой

Импульс (количество движения) p материальной точки определяется как произведение ее массы m на скорость $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \tag{8.8}$$

Импульс – векторная величина, поскольку это произведение скаляра на вектор; его направление совпадает с направлением скорости $\mathbf{v}$, а его величина равна $p = mv$. Так как скорость $\mathbf{v}$ зависит от системы отсчета, необходимо всегда указывать систему отсчета. Единица измерения импульса равна единице измерения массы, умноженной на единицу измерения скорости; в системе единиц СИ импульс измеряется в единицах кг·м/с. Импульс $\mathbf{p}$ следует отличать от момента импульса (углового момента), который мы рассмотрим в гл. 9.

В повседневной жизни мы тоже пользуемся словом *импульс* в том же смысле, как мы его определили выше.

В соответствии с определением (8.8) импульс у быстро движущегося автомобиля будет больше, чем у медленно движущегося автомобиля той же массы. Импульс тяжелого грузовика больше, чем у небольшого автомобиля, движущегося с той же скоростью. Чем больше у тела импульс, тем труднее его остановить и тем серьезнее будут последствия, если его остановка будет вызвана ударом или столкновением. Более вероятно, что футболист будет сбит с ног, если с ним столкнется игрок другой команды, бегущий с высокой скоростью, чем если он столкнется с более легким или медленнее бегущим игроком. И тяжелый, быстро едущий грузовик нанесет больший ущерб при аварии, чем медленно движущийся более легкий автомобиль.

Для того чтобы изменить импульс тела, на него необходимо подействовать силой независимо от того, увеличиться должен импульс или уменьшиться (как в случае остановки тела) или должно измениться его направление. Первоначально Ньютон вывел второй закон с помощью понятия импульса (сам Ньютон называл произведение mv количеством движения). В переводе на современный язык второй закон можно сформулировать следующим образом: скорость изменения импульса материальной точки пропорциональна результирующей силе, приложенной к ней. Аналитическая запись этого закона имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{F}$ – результирующая сила, приложенная к материальной точке. Из формулы (8.9) нетрудно получить запись второго закона в виде $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, которой мы пользовались ранее. Для этого предположим, что масса m постоянна, и запишем ускорение в виде $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Таким образом,

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Ньютоновская формулировка (8.9) является более общей, чем знакомая нам ранее ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), поскольку она включает в себя случай переменной массы. Примеры, в которых масса изменяется, встречаются редко; мы их рассмотрим в разд. 8.12 (ракеты, масса которых уменьшается при сгорании топлива) и в гл. 39 (теория относительности).

Формула (8.9) записана для отдельной материальной точки. Рассмотрим систему из n частиц полной массой $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Предположим, что импульсы частиц равны $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$, $\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{p}_n = m_n\mathbf{v}_n$, где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ – скорости отдельных частиц. Тогда *полный импульс* системы $\mathbf{P}$ запишется следующим образом:

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n = \sum \mathbf{p}_i. \tag{8.10}$$

Из выражения (8.5) ($M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}} = \sum m_i\mathbf{v}_i$) мы имеем

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}. \tag{8.11}$$

Таким образом, *полный импульс системы частиц равен произведению полной массы системы М и скорости ЦМ системы.* Иначе говоря, *импульс протяженного тела равен произведению массы тела и скорости его ЦМ.*

Если продифференцировать обе части равенства (8.11) по времени, то при условии, что M постоянна, получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \tag{8.12}$$

где $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – результирующая внешняя сила, приложенная к системе; здесь при выводе мы использовали выражение (8.7). Формула (8.12) – это **второй закон Ньютона для системы частиц**. Она эквивалентна выражению (8.9) для отдельной частицы и справедлива для любой конечной системы частиц. Формулу (8.12) можно также применять с целью описания систем, масса которых изменяется, однако при этом необходимо соблюдать некоторую осторожность (этот вопрос мы обсудим ниже в настоящей главе).

Пример 8.5. Из шланга вытекает вода со скоростью 50 м/с и расходом 5,0 кг/с. Ударяясь о стену, вода останавливается. (Отражением струи от стены пренебрегаем.) Какова сила ее действия на стену?

Решение. Каждую секунду вода с импульсом (5,0 кг)·(50 м/с) = 250 кг·м/с тормозится и приходит в состояние покоя. Чтобы импульс воды изменился от этой величины до нуля, необходимо приложить силу, предполагаемую постоянной, которая равна по величине

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{0 - 250\ \text{кг}\cdot\text{м/с}}{1{,}0\ \text{с}} = -250\ \text{Н}.$$

Знак минус указывает на то, что сила, приложенная к воде, должна быть направлена противоположно начальной скорости воды. Чтобы остановить воду, стена действует на нее с силой 250 Н; но по третьему закону Ньютона с такой же силой 250 Н вода действует на стену.

8.5. Сохранение импульса

В случае когда результирующая внешняя сила, действующая на систему частиц, равна нулю, выражение (8.12) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \text{или} \quad \mathbf{P} = \text{const} \quad [\mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0]. \tag{8.13}$$

Таким образом:

Когда результирующая внешняя сила, действующая на систему, равна нулю, импульс системы остается постоянным.

Это **закон сохранения импульса**. Его можно также сформулировать следующим образом: *полный импульс замкнутой системы тел сохраняется постоянным*. Под **замкнутой системой** мы понимаем систему, на которую не действуют никакие внешние силы – в ней действуют только силы взаимодействия между частицами системы.

Важная роль понятия импульса, как и в случае энергии, состоит в том, что при достаточно общих условиях импульс сохраняется. Хотя закон сохранения импульса, как мы видели, следует из второго закона Ньютона, он имеет, по существу, более общий характер, чем законы Ньютона. В микроскопическом мире атомов второй закон Ньютона не выполняется, а великие законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и электрического заряда продолжают выполняться, что подтверждается всеми проводимыми экспериментальными проверками. Именно поэтому законы сохранения рассматриваются как более фундаментальные, чем законы Ньютона.

Рассмотрим в качестве примера лобовое соударение (столкновение) двух бильярдных шаров (рис. 8.10). Хотя после соударения импульс каждого из шаров изменяется, *сумма* их импульсов до и после соударения остается одной и той же. Если $m_1\mathbf{v}_1$ – импульс шара 1 и $m_2\mathbf{v}_2$ – импульс шара 2, измеренные до соударения, то полный импульс этих двух шаров до соударения равен $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. После соударения скорость и импульс каждого шара изменятся. Обозначим скорости и импульсы шаров после соударения соответствующими буквами со штрихом, т. е. для каждого шара мы имеем $m_1\mathbf{v}'_1$ и $m_2\mathbf{v}'_2$. Тогда

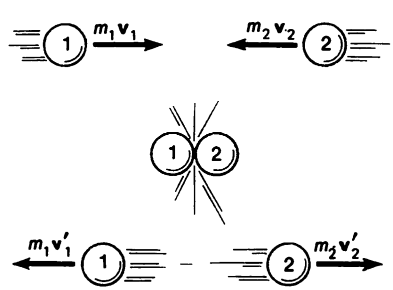


Рис. 8.10. При соударении двух шаров импульс сохраняется.

полный импульс после соударения равен $m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2$. Независимо от того, чему равны скорости и массы рассматриваемых тел, установлено, что полный импульс системы до соударения шаров совпадает с полным импульсом системы после соударения, причем несущественно, было ли оно лобовым или нет:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 \qquad \text{[соударение]}. \tag{8.14}$$

Иными словами, полный импульс двух шаров сохраняется. Формулу (8.14) можно переписать в виде

$$m_1\mathbf{v}'_1 - m_1\mathbf{v}_1 = -(m_2\mathbf{v}'_2 - m_2\mathbf{v}_2).$$

Отсюда следует, что если импульс одного шара уменьшится на некоторую величину, то импульс другого увеличится на такую же величину. Полный импульс системы, таким образом, остается постоянным.

Пример 8.6. Железнодорожный вагон массой 10 000 кг, движущийся со скоростью 24,0 м/с, сталкивается с таким же вагоном, находящимся в покое. Если после столкновения вагоны сцепятся, то чему будет равна при этом их общая скорость?

Решение. Вычислим начальный импульс системы:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (10\,000 \text{ кг})(24{,}0 \text{ м/с}) + (10\,000 \text{ кг})(0 \text{ м/с}) = 2{,}40\cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

После столкновения полный импульс останется таким же, но распределится между вагонами. Поскольку оба вагона оказываются сцепленными, они будут двигаться с одной и той же скоростью, которую мы обозначим через v'. Таким образом,

$$(m_1 + m_2)v' = 2{,}40\cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м/с},$$

$$v' = \frac{2{,}40\cdot 10^5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}}{2{,}00\cdot 10^4 \text{ кг}} = 12 \text{ м/с}.$$

Закон сохранения импульса полезно применять, в частности, когда мы имеем дело со сравнительно простыми системами, например при столкновениях и некоторых типах взрывов. Скажем, движение ракеты, которое, как мы показали в гл. 4, можно понять исходя из действия и противодействия, можно также объяснить на основе сохранения импульса: до запуска ракеты полный импульс системы, состоящей из ракеты и запаса топлива, равен нулю. После включения двигателей, когда из ракеты стали выходить газы, полный импульс системы не изменился, т. е. импульс истекающих газов, направленный вниз, в точности компенсируется импульсом ракеты, направленным вперед. Аналогично можно объяснить отдачу ружья и движение лодки при выбрасывании груза.

Пример 8.7. Рассчитайте скорость отдачи винтовки массой 4,0 кг, которая выстреливает пулю массой 0,050 кг со скоростью 280 м/с.

Решение. Полный импульс системы сохраняется. Обозначим скорость после выстрела буквой v со штрихом v'. Таким образом, мы имеем

$$m_{\text{пуля}}v_{\text{пуля}} + m_{\text{винт}}v_{\text{винт}} = m_{\text{пуля}}v'_{\text{пуля}} + m_{\text{винт}}v'_{\text{винт}},$$

$$0 + 0 = (0{,}050 \text{ кг})(280 \text{ м/с}) + (4{,}0 \text{ кг})(v'_{\text{винт}}),$$

$$v'_{\text{винт}} = -3{,}5 \text{ м/с}.$$

Поскольку масса винтовки много больше массы пули, ее скорость много меньше, чем скорость пули. Знак минус у $v'_{\text{винт}}$ указывает на то, что скорость (и импульс) винтовки направлена в противоположную сторону относительно скорости пули. Заметим, что это *векторная сумма* импульсов, которая сохраняется.

Если на систему действует отличная от нуля внешняя сила, то закон сохранения импульса не будет выполняться. Однако в некоторых случаях в систему можно включить другие тела таким образом, что при этом снова будет выполняться закон сохранения импульса. Например, если рассмотреть падающую глыбу, то импульс глыбы не сохраняется: он будет увеличиваться по мере падения глыбы на Землю. Увеличение импульса глыбы обусловлено действием внешней силы, в данном случае силы тяжести Земли. Однако если мы учтем вместе с рассматриваемой глыбой Землю, то получим систему, полный импульс которой в инерциальной системе отсчета сохраняется. Разумеется, это означает, что Земля движется навстречу падающей на нее глыбе. Однако, поскольку масса Земли велика, ее скорость, направленная вверх, очень мала.

8.6. Столкновения и импульс силы

В предыдущем разделе мы показали на примерах, что закон сохранения импульса весьма удобно использовать для описания столкновительных процессов. Со столкновениями (или соударениями) мы часто встречаемся в повседневной жизни, например удары теннисной ракеткой, бейсбольной битой или клюшкой для гольфа по мячу, соударение двух бильярдных шаров или железнодорожных вагонов, удар молотком по гвоздю. На атомном и субатомном уровнях ученые изучают строение атомов, ядер и природу действующих в этом микромире сил с помощью тщательного изучения столкновений атомов и ядер.

Что мы подразумеваем под столкновением? Взаимодействие между двумя телами называется столкновением, если оно происходит за очень короткое время и силы взаимодействия между сталкивающимися телами при этом столь велики, что можно пренебречь всеми остальными силами. Обычно время столкновения много меньше по сравнению со временем нашего наблюдения, так что мы можем четко различать состояния до столкновения и после, когда силы, возникающие при столкновении, не действуют. При игре в теннис, например, существуют определенные периоды до и после каждого соударения мяча с ракеткой, во время которых мяч свободно движется как тело, брошенное под углом к горизонту, под действием сил тяжести и сопротивления воздуха. Однако, когда ракетка ударяет по мячу, эти силы играют незна-

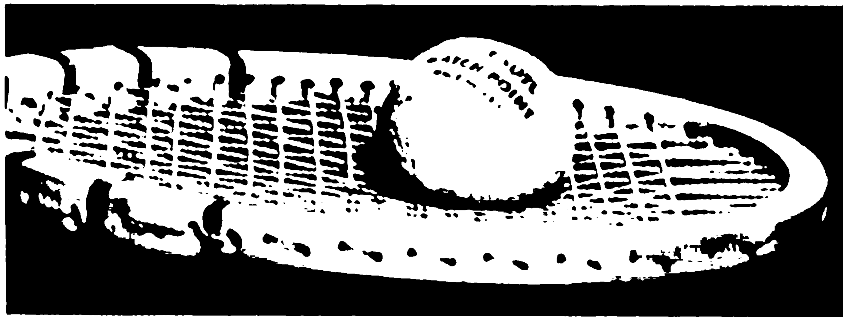


Рис. 8.11. Удар теннисной ракетки по мячу. Обратите внимание на деформацию как ракетки, так и мяча благодаря действию большой силы со стороны мяча на ракетку и со стороны ракетки на мяч. (Фото выполнено Рус Кинн, Photo Researchers, Inc.)

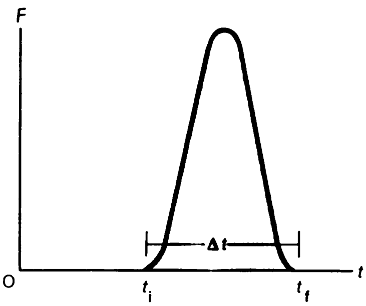


Рис. 8.12. Зависимость силы от времени при типичном столкновении.

чительную роль; резкое изменение характера движения мяча обусловлено почти целиком действующей на него весьма короткое время, но очень большой силой со стороны ракетки. Резкое изменение движения по крайней мере одного из тел (а нередко и обоих тел) характерно для большинства соударений. Из-за больших сил взаимодействия оба тела при столкновении деформируются и во многих случаях значительно (рис. 8.11).

Рассмотрим теперь процесс столкновения более подробно. До сих пор мы предполагали, что массы частиц сохраняются постоянными и ни одна из скоростей не близка к скорости света, так что релятивистскими эффектами можно пренебречь (гл. 39). Рассмотрим движение ЦМ каждого из тел, участвующих в столкновении. Импульс ЦМ тела будем обозначать через **p**.

Когда происходит столкновение между простыми телами, сила взаимодействия за очень короткое время обычно нарастает от нулевого значения в момент контакта до очень большой величины, а затем вновь резко спадает до нулевого значения. На рис. 8.12 приведена типичная зависимость величины силы, с которой одно тело действует на другое при столкновении, от времени. Интервал времени $\Delta t = t_f - t_i$, где t_i – «начальный» момент времени (когда начала действовать сила) и t_f – «конечный» момент времени (когда сила перестала действовать), обычно можно определить с большой точностью (как правило, он очень короткий).

Из второго закона Ньютона следует, что *результирующая* сила, действующая на тело, равна скорости изменения его импульса:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

(Эта формула применима *к каждому* из участвующих в столкновении тел.) В течение бесконечно малого временного интервала dt импульс изменяется на величину

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt.$$

Проинтегрировав это равенство по времени, в течение которого происходит столкновение, получим

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{p_i}^{p_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt,$$

где $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ – импульсы тела соответственно перед столкновением и после него. Интеграл от силы по времени, в течение которого она действует, называется **импульсом силы J**:

$$\mathbf{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt.$$

Таким образом, изменение импульса тела $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ равно импульсу силы, действующей на него:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{J}. \tag{8.15}$$

Единицы измерения импульса силы и импульса совпадают, т.е. в системе СИ мы имеем единицы кг·м/с (или Н·с). Поскольку $\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\, dt$, импульс силы J равен площади под кривой, описывающей зависимость величины силы F от t (рис. 8.12).

Формула (8.15) справедлива, только если $\mathbf{F}$ является равнодействующей всех сил, действующих на тело. Она справедлива для любой равнодействующей силы $\mathbf{F}$, причем импульсы $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ точно соответствуют моментам времени t_i и t_f. Особенно полезным понятие импульса силы оказывается при рассмотрении так называемых *импульсных сил*; это силы, характер изменения которых во времени аналогичен изображенному на рис. 8.12, когда сила имеет очень большую величину в течение очень короткого интервала времени, вне которого она, по существу, равна нулю. Для большинства столкновений импульсная сила значительно превышает любую из действующих на тело сил, так что изменение импульса тела в процессе столкновения мы можем считать обусловленным действием только импульсной силы. Для такой импульсной силы интервал времени, по которому проводится интегрирование в (8.15), не обязательно должен совпадать с промежутком времени от t_i до t_f, поскольку сила $\mathbf{F}$, по существу, равна нулю за пределами интервала $\Delta t = t_f - t_i$. (Разумеется, если выбранный интервал времени слишком велик, то становится существенным влияние других сил, например полет теннисного мяча после выполнения удара ракеткой, когда он медленно падает под действием силы тяжести.)

В некоторых случаях удобно использовать среднюю силу $\bar{\mathbf{F}}$, действующую во время столкновения. Она определяется как такая постоянная сила, которая действует в течение того же промежутка времени $\Delta t = t_f - t_i$, что и реальная сила, создает тот же импульс силы и, следо-

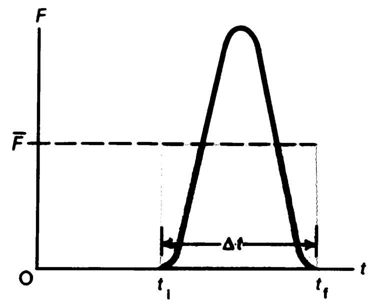


Рис. 8.13. Средняя сила $\bar{F}$ за промежуток времени Δt создает тот же импульс силы ($\bar{F}\Delta t$), что и реально действующая сила.

вательно, то же изменение импульса. Таким образом,

$$\bar{\mathbf{F}}\,\Delta t = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt.$$

На рис. 8.13 указана величина средней силы $\bar{\mathbf{F}}$, соответствующей импульсной силе на рис. 8.12. Площадь прямоугольника $\bar{\mathbf{F}}\Delta t$ равна площади под кривой, описывающей зависимость импульсной силы от времени.

Пример 8.8. а) Вычислите импульс силы, который испытал человек массой 70 кг, приземлившись на твердую землю после прыжка с высоты 5,0 м. Найдите при этом среднюю силу, действовавшую на ноги человека, если он приземлился б) на прямых и в) на согнутых ногах. Предположим, что в случае п. «а» ЦМ тела во время удара о землю перемещается на 1,0 см, а в случае п. «б» на 50 см.

Решение. а) Поскольку сила F нам не известна, по формуле

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\,dt$$

мы не можем вычислить импульс силы. Поэтому воспользуемся тем фактом, что импульс силы равен изменению импульса тела. После того как человек достигнет земли, прыгая с высоты 5,0 м, его скорость можно найти с помощью кинематического уравнения в случае равнопеременного движения [формула (2.9в)], записанного для вертикального (вдоль оси y) направления, с ускорением $a = g = 9{,}8$ м/с^2 и начальной скоростью $v_0 = 0$:

$$v = \sqrt{2a(y - y_0)} = \sqrt{2(9{,}8\ \text{м/с}^2)(5{,}0\ \text{м})} = 9{,}9\ \text{м/с}.$$

После соударения с землей импульс тела быстро спадает до нулевого значения (рис. 8.14). Следовательно, импульс силы, действующей на человека во время приземления, равен

$$J = \bar{F}\,\Delta t = \Delta p = p_f - p_i = 0 - (70\ \text{кг})(9{,}9\ \text{м/с}) = -690\ \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Знак минус указывает здесь на то, что сила должна быть направлена противоположно начальному импульсу.

б) Прежде чем остановиться, ЦМ замедляется от скорости 9,9 м/с до нуля и проходит расстояние $D = 1{,}0\cdot 10^{-2}$ м. Средняя скорость ЦМ за этот промежуток времени равна (9,9 м/с + 0 м/с)/2 =

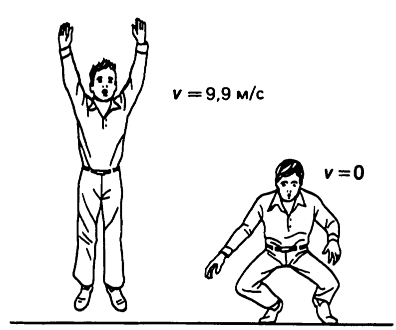


Рис. 8.14. Положение тела человека, когда действует импульс силы (пример 8.8).

$= 5{,}0$ м/с, так что время соударения составляет $\Delta t = D/\bar{v} = (1{,}0 \cdot 10^{-2}$ м$)/$ $/(5{,}0$ м/с$) = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ с. При этом средняя результирующая сила равна

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{690\ \text{Н} \cdot \text{с}}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{с}} = 3{,}5 \cdot 10^5\ \text{Н}.$$

Эта средняя результирующая сила $\bar{F}$ (направленная вверх) равна разности направленной вверх средней силы F_1, действующей на ноги человека со стороны земли, и действующей вниз **силы тяжести** mg, т. е. $\bar{F} = F_1 - mg$. Таким образом, $F_1 = \bar{F} + mg = 3{,}5 \cdot 10^5$ Н $+ 690$ Н $\approx 3{,}5 \times 10^5$ Н.

в) Решение аналогично решению в п. «б», за исключением того, что теперь $D = 0{,}50$ м; следовательно, $\Delta t = (0{,}50$ м$)/(5{,}0$ м/с$) = 0{,}10$ с и

$$\bar{F} = (690\ \text{Н} \cdot \text{с})/(0{,}10\ \text{с}) = 6{,}9 \cdot 10^3\ \text{Н}.$$

Тогда средняя сила, действующая вверх на ноги человека, равна $\bar{F}_1 = 6{,}9 \cdot 10^3$ Н $+ 690$ Н $= 7{,}6 \cdot 10^3$ Н. Ясно, что сила, действующая на ступни и ноги, значительно меньше в том случае, когда ноги согнуты в коленях. Действительно, максимальная сила, которую выдерживает кость ноги (табл. 11.2), не столь велика, чтобы она выдержала вычисленную в п. «б» силу. Поэтому несомненно, что при таком приземлении человек сломал бы ногу; этого не случилось бы в условиях приземления п. «в».

8.7. Сохранение импульса и энергии при столкновениях

Для большинства столкновительных процессов нам обычно неизвестно, как изменяется во времени сила взаимодействия при столкновении. Тем не менее мы все же можем определить некоторые детали движения после столкновения, если нам известна динамика движения до столкновения; в этом нам помогают законы сохранения импульса и энергии. Мы по-прежнему придерживаемся разумного предположения о том, что импульсные силы, действующие во время столкновения, значительно превосходят остальные силы.

Рассмотрим два тела, масса одного из которых равна m_1, а другого m_2. Пусть импульсы каждого из этих тел равны соответственно $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ до столкновения и $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ после столкновения (рис. 8.15). Штрихами отметим величины, которые относятся к моменту времени *после* столкновения. Пусть в процессе столкновения в любой момент времени тело 1 действует на тело 2 с силой $\mathbf{F}$; при этом по третьему закону Ньютона тело 2 действует на тело 1 с силой $-\mathbf{F}$. Мы предполагаем, что в течение очень короткого времени столкновения импульсная сила $\mathbf{F}$ значительно превосходит любые другие (внешние) силы, так что в очень хорошем приближении силу $\mathbf{F}$ можно рассматривать как результирующую. Следовательно, изменение импульса тела 2 запишется в виде

$$\Delta\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt,$$

а для тела 1 мы имеем

$$\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\,dt.$$

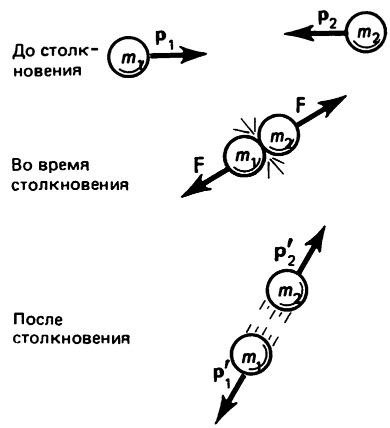


Рис. 8.15. Столкновение двух тел. Импульсы тел до столкновения равны соответственно $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, а после столкновения равны $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$. В процессе столкновения в любой момент времени каждое тело действует на другое с силой, равной и противоположно направленной силе, с которой другое тело действует на первое.

Сравнивая два этих выражения, находим

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2).$$

Перегруппировка слагаемых в последнем выражении дает

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'. \tag{8.16}$$

Таким образом, полный импульс до столкновения в точности равен полному импульсу после столкновения. *Полный импульс сохраняется*. Разумеется, мы пришли к закону сохранения импульса, который, как мы теперь видим, с высокой точностью выполняется, даже когда действуют внешние силы (требуется только, чтобы эти внешние силы были значительно меньше, чем импульсная сила, действующая в течение времени столкновения). Изменение импульса, обусловленное силой взаимодействия при столкновении, столь велико по сравнению с изменением импульса за счет внешних сил, что последним можно пренебречь. В случае когда внешние силы значительны, необходимо проявлять осторожность; при этом величины, входящие в формулу (8.16), следовало бы рассматривать непосредственно до столкновения и непосредственно после него, поскольку, если величины $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ измерять задолго до столкновения и спустя длительное время после столкновения, они могут существенно измениться под действием внешних сил вследствие того, что интеграл $\int \mathbf{F}\,dt = \Delta \mathbf{p}$ за большой промежуток времени изменит свое значение. Примером этого (уже упоминавшимся выше) может служить действие силы тяжести на летящий теннисный мяч после удара по нему ракеткой. Таким образом, мы можем применить закон сохранения импульса к столкновению только в том случае, когда импульсные силы значительно больше, чем внешние. Мы считаем, что это условие выполняется для рассматриваемых здесь столкновений (на самом деле именно так мы определяем само понятие столкновения). Следует заметить, что мы должны не только определить импульсы в моменты времени, непосредственно примыкающие к времени столкновения, так чтобы внешние силы не могли повлиять существенно на импульсы, но и быть уверенными также в том, что измеренные нами скорости получены только после того, как импульсные силы между телами прекратили свое действие.

Согласно закону сохранения энергии, полная энергия рассматриваемых нами двух тел будет также сохраняться при столкновении. Но поскольку при столкновении энергия может переходить в различные формы, этот закон не всегда используется. Однако в некоторых столкновениях сохраняется полная *кинетическая* энергия двух частиц; такие столкновения называют **упругими**, и для них можно написать следующее равенство:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

[упругое столкновение]. (8.17)

Разумеется, в течение короткого времени, когда два тела находятся в контакте, кинетическая энергия частично (или полностью) мгновенно переходит в потенциальную энергию (упругую, электрическую или какую-либо иную). Однако полная кинетическая энергия до столкновения в точности равна полной кинетической энергии после столкновения.

Столкновения, происходящие на атомном уровне, т. е. столкновения между атомами, ядрами и элементарными частицами, во многих случаях можно считать упругими. Однако в макроскопическом мире, с которым мы имеем дело повседневно, упругое столкновение - это практически недостижимый идеальный случай, который никогда полностью не реализуется[1)], поскольку в процессе столкновения по крайней мере небольшая часть энергии всегда переходит в тепловую энергию (возможно, также в энергию звука или другие аналогичные формы энергии). Тем не менее столкновение двух упругих твердых (т. е. обладающих очень малой деформацией) шаров, таких, как бильярдные шары, можно считать упругим, и это столкновение нередко рассматривают в качестве примера упругого столкновения.

8.8. Упругие столкновения в одном измерении

Применим теперь законы сохранения импульса и кинетической энергии к лобовому упругому столкновению двух частиц, так что все движение происходит вдоль

[1)] Это связано с чрезвычайно большим числом степеней свободы у макроскопических тел, а также с отсутствием для них условий квантования энергии.- *Прим. ред.*

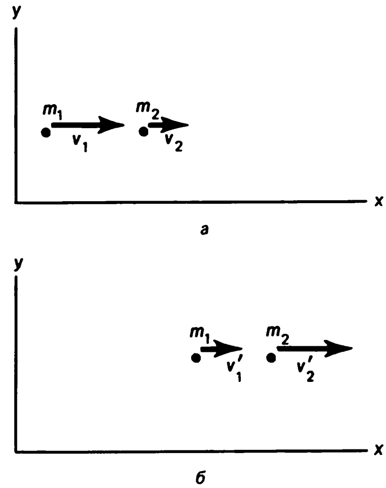


Рис. 8.16. **Две частицы, одна из которых имеет массу m_1, а другая m_2. *а*–до столкновения; *б*–после столкновения.**

одной линии. Для общности предположим, что обе частицы первоначально двигались со скоростями v_1 и v_2 вдоль оси x (рис. 8.16, *а*); после столкновения их скорости стали равны v_1' и v_2' (рис. 8.16, *б*). При любом значении $v>0$ частица движется вправо (координата x возрастает), в то время как при $v<0$ частица движется влево и координата x уменьшается.

Из закона сохранения импульса имеем

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.$$

Поскольку столкновение предполагается упругим, кинетическая энергия также сохраняется:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Таким образом, мы имеем два уравнения для двух неизвестных. Если заданы массы и начальные скорости частиц, то мы можем найти скорости этих частиц v_1' и v_2' после столкновения. Ниже мы выполним этот расчет для некоторых частных случаев, но прежде всего получим полезную теорему. Для этого перепишем первое уравнение, выражающее закон сохранения импульса, в виде

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2), \tag{8.18а}$$

а второе уравнение, выражающее закон сохранения кинетической энергии,–в виде

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

или

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2). \tag{8.18б}$$

Разделив затем уравнение (8.18б) на (8.18а) (в предположении, что $v_1 \neq v_1'$ и $v_2 \neq v_2'$)[1], получим

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \,. \tag{8.18в}$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \,. \tag{8.19}$$

Это и есть теорема, которую мы стремились доказать. Она представляет собой интересный результат: относительная скорость двух частиц после столкновения в точности равна их относительной скорости до столкновения; это верно для любого лобового упругого столкновения независимо от того, какие массы имеют частицы.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи лобового упругого столкновения. Будем считать при этом, что значения v_1, v_2, m_1 и m_2 нам известны и нас интересуют скорости v_1' и v_2' частиц после столкновения.

1. Частицы с одинаковыми массами ($m_1 = m_2$). Из закона сохранения импульса имеем

$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \,.$$

Поскольку неизвестных величин две, необходимо еще одно уравнение. Можно было бы использовать закон сохранения кинетической энергии, но проще применить уравнение (8.19), согласно которому относительные скорости частиц до и после столкновения одинаковы:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \,.$$

Сумма этих двух уравнений дает

$$v_2' = v_1 \,,$$

а их разность –

$$v_1' = v_2 \,.$$

Таким образом, в результате столкновения частицы обмениваются скоростями; частица 2 приобретает после столкновения скорость, которую имела частица 1 до столкновения, и наоборот. Если частица 2 первоначально покоилась ($v_2 = 0$), то мы имеем

$$v_2' = v_1 \,, \qquad v_1' = 0.$$

Иными словами, частица 1 полностью теряет свою скорость и останавливается, в то время как частица 2 приобретает скорость, которую имела частица 1 до столкновения. Этот эффект хорошо известен опытным игрокам на бильярде.

---

[1] Заметим, что уравнениям (8.18а) и (8.19б), выражающим законы сохранения импульса и кинетической энергии, удовлетворяет следующее решение $v_1' = v_1$ и $v_2' = v_2$. Это решение правильное, но оно не очень интересно. Оно соответствует случаю, когда столкновение вообще отсутствует, т.е. обе частицы проходят мимо друг друга.

2. Частица 2 первоначально покоится ($v_2 = 0$). Эта ситуация часто встречается на практике, когда движущееся тело сталкивается с неподвижным. Объединяя уравнение сохранения импульсов с полученными выше соотношениями для v'_2 и v'_1, получаем

$$v'_2 = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right), \qquad v'_1 = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

Представляют интерес некоторые частные случаи:

а. $v_2 = 0$, $m_1 = m_2$. Здесь мы имеем $v'_2 = v_1$ и $v'_1 = 0$. Этот случай рассмотрен выше в п. 1, и мы приходим к тому же результату: если сталкиваются частицы одинаковой массы, одна из которых первоначально покоилась, то скорость налетающей частицы полностью передается покоившейся частице.

б. $v_2 = 0$, $m_1 \gg m_2$. Это случай, когда очень массивная налетающая частица сталкивается с легкой покоящейся частицей. Используя приведенные выше соотношения, имеем

$$v'_2 \approx 2v_1, \qquad v'_1 \approx v_1.$$

Таким образом, скорость массивной налетающей частицы практически не изменяется, в то время как первоначально покоившаяся легкая частица приобретает скорость, равную удвоенной скорости налетающей частицы. Например, скорость массивного шара при игре в кегли практически не изменяется при столкновении со значительно более легкими кеглями.

в. $v_2 = 0$, $m_1 \ll m_2$. Движущееся легкое тело сталкивается с очень массивным покоящимся телом. В этом случае

$$v'_2 \approx 0, \qquad v'_1 \approx -v_1.$$

Массивное тело практически остается в покое, тогда как очень легкое налетающее тело отскакивает практически с той же по величине (но противоположно направленной) скоростью, которую оно имело до столкновения. Например, если теннисный мяч сталкивается в «лоб» с покоящимся шаром для игры в кегли, то шар практически не «почувствует» этого, в то время как мяч «отразится» от него почти с не изменившейся по величине скоростью, как если бы он столкнулся с твердой неподвижной стенкой.

Нетрудно показать (см. задачу 50), что для любого лобового упругого столкновения выполняются следующие соотношения:

$$v'_2 = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right), \tag{8.20а}$$

$$v'_1 = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right). \tag{8.20б}$$

Разумеется, эти общие соотношения не следует стараться запомнить: при необходимости их всегда можно быстро вывести из законов сохранения. При решении многих задач проще всего исходить из условий, характерных именно для данной задачи, и повторить вывод с самого начала, как это было сделано в рассмотренных выше частных случаях; продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 8.9. Протон массой 1,01 а. е. м. (атомная единица массы), движущийся со скоростью $3{,}60 \cdot 10^4$ м/с, испытывает лобовое упругое столкновение с первоначально покоящимся ядром гелия (He) ($m_{\mathrm{He}} = 4{,}00$ а. е. м.). Чему равны скорости протона и ядра гелия после столкновения?

Решение. В разд. 4.3 мы показали, что 1 а. е. м. $= 1{,}6606 \cdot 10^{-27}$ кг, но нам это соотношение единиц не понадобится. Мы имеем $v_2 = v_{\mathrm{He}} = 0$, $v_1 = v_{\mathrm{p}} = 3{,}60 \times 10^4$ м/с. Требуется найти скорости v'_{p} и v'_{He} после столкновения. Запишем закон сохранения импульса:

$$m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}} + 0 = m_{\mathrm{p}} v'_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{He}} v'_{\mathrm{He}}.$$

Из закона сохранения кинетической энергии имеем

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}'^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}'^2.$$

Первое уравнение дает

$$v'_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{p}} - \left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{p}}}\right) v'_{\mathrm{He}}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим

$$(v'_{\mathrm{He}})^2 - (v'_{\mathrm{He}})\left(\frac{2m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{He}}}\right) = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения:

$$v'_{\mathrm{He}} = 0, \qquad v'_{\mathrm{He}} = \frac{2m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{He}}} = 1{,}45 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Этим скоростям соответствуют скорости протона

$$v'_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{p}} - \left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{p}}}\right) v'_{\mathrm{He}} = v_{\mathrm{p}} = 3{,}60 \cdot 10^4 \text{ м/с}$$

и

$$v'_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{p}} - \left(\frac{m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{p}}}\right)\left(\frac{2m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{He}}}\right) = -0{,}597 v_{\mathrm{p}} = -2{,}15 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Первое решение $v'_{\mathrm{He}} = 0$, $v'_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{p}}$ соответствует отсутствию столкновения. Интерес представляет именно второе решение: $v'_{\mathrm{He}} = 1{,}45 \cdot 10^4$ м/с, $v'_{\mathrm{p}} = -2{,}15 \cdot 10^4$ м/с. Заметим, что протон изменяет направление своего движения после столкновения, причем величина его скорости меньше первоначальной.

Пример 8.10. В ядерном реакторе происходит высвобождение нейтронов (и энергии), когда ядра[1)] урана ($_{92}\mathrm{U}^{235}$) испытывают деление (распад на части). Процесс деления происходит с заметной скоростью лишь при условии, что ядра $_{92}\mathrm{U}^{235}$ сталкиваются с очень медленно движущимися нейтронами. Нейтроны, испущенные в предшествующих актах деления, движутся быстро; поэтому для поддержания цепной реакции нейтроны должны быть быстро замедлены, прежде чем они покинут топливные урановые стержни. Вещество, используемое для замедления нейтронов, называется *замедлителем*. Какое вещество (или класс веществ) наилучшим образом отвечает этой цели?

[1)] Левый нижний индекс 92 указывает число протонов в ядре, правый верхний индекс 235 указывает полное число нуклонов (протонов и нейтронов) и примерно совпадает с массой ядра, выраженной в а.е.м. (см. гл. 42 в т. 2 настоящей книги).

Решение. Можно считать, что атомы замедлителя практически покоятся. Это означает, что $v_2 = 0$, если принять, что скорость нейтрона равна v_1; данный случай соответствует рассмотренному нами выше случаю 2. В частности, мы показали, что если m_2 (масса атомов замедлителя) будет значительно больше (или значительно меньше) массы нейтрона m_1, то скорость нейтрона не будет заметно уменьшена. Но если замедлитель изготовить из вещества, у которого атомная масса близка к массе нейтрона ($m_1 \approx m_2$), то скорость нейтрона после лобового столкновения уменьшится фактически до нуля ($v'_1 \approx 0$). У самого легкого атома, а именно у атома водорода ${}_1H^1$, масса почти точно совпадает с массой нейтрона; таким образом, водород был бы идеальным замедлителем. К сожалению, обычный водород имеет сильную тенденцию к поглощению нейтронов и потому бесполезен для целей замедления. Однако изотоп водорода, у которого масса вдвое больше (${}_1H^2$, так называемый *дейтерий*, или *тяжелый водород*) не поглощает большого количества нейтронов и потому является практически наилучшим замедлителем. Обычно атомы дейтерия вводят в состав молекул воды H_2O, которая в этом случае называется тяжелой водой. В качестве замедлителя часто используется также углерод (${}_6C^{12}$), масса которого не слишком велика, причем он обладает рядом других практических преимуществ. Этому вопросу посвящена задача 51.

*8.9. Упругие столкновения в двух и трех измерениях

Законы сохранения импульса и энергии можно применить также к столкновениям в двух или трех измерениях. В этих случаях приходится учитывать векторный характер импульса. Чаще всего рассматриваются два случая столкновений: 1) одна частица (называемая налетающей частицей или снарядом) ударяется в другую частицу, находившуюся первоначально в покое (называемую мишенью), и 2) начальные импульсы обеих частиц направлены вдоль одной прямой (обычно навстречу друг другу). В любом случае, если столкновение не является лобовым, конечные импульсы (после столкновения) будут направлены иначе, чем начальные, так что столкновение является, по существу, двумерным, поскольку траектории обеих частиц будут лежать в плоскости, определяемой начальным и конечным импульсами (см. вопрос 29).

Рассмотрим упругое столкновение первого типа: налетающая частица сталкивается с неподвижной мишенью. (Предположение о неподвижности мишени не является слишком ограничивающим, поскольку система отсчета определяется нашим выбором, и мы всегда ее можем выбрать таким образом, чтобы $v_2 = 0$.) Такие столкновения являются типичными для экспериментов в атомной и ядерной физике. Налетающие частицы, образовавшиеся вследствие радиоактивного распада или разгона в ускорителе на высокие энергии, сталкиваются с покоящимся ядром - мишенью.

На рис. 8.17 показано лобовое столкновение налетающей частицы 1 (массой m_1), движущейся вдоль оси x, с покоящейся частицей 2 (массой m_2). После их столкновения эти частицы, например бильярдные шары, рас-

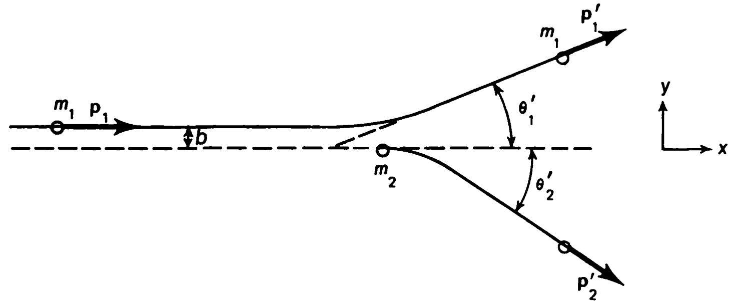


Рис. 8.17. Налетающая частица 1 сталкивается с частицей 2 (мишенью); прицельный параметр равен b. После столкновения частицы разлетаются с импульсами соответственно $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ под углами θ'_1 и θ'_2.

ходятся под углами θ'_1 и θ'_2 относительно направления первоначального движения частицы 1 (оси x). Если частицы электрически заряжены или же являются ядерными частицами, то они могут начать отклоняться еще до непосредственного столкновения между собой благодаря силе (электрической или ядерной), действующей между ними. (Можно представлять себе, например, два магнита ориентированных таким образом, что они отталкивают друг друга; когда один из них движется по направлению к другому, второй будет удаляться от него прежде, чем они придут в соприкосновение друг с другом.)

Расстояние b на рис. 8.17 называется *прицельным параметром*. Эта величина определяется как расстояние по перпендикуляру между первоначальной траекторией налетающей частицы и параллельной ей линией, проходящей через центр частицы-мишени; величина b является мерой отклонения столкновения от лобового (при $b = 0$ оно является лобовым).

Применим теперь законы сохранения импульса и кинетической энергии к упругому столкновению, такому, как на рис. 8.17. Согласно закону сохранения кинетической энергии (с учетом $v_2 = 0$), мы имеем

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2. \quad (8.21а)$$

Пусть как начальный, так и конечный импульсы расположены в плоскости xy. Поскольку импульс является векторной величиной, его сохранение означает неизменность его проекций по осям x и y. Таким образом, в направлении оси x имеем

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2. \quad (8.21б)$$

Поскольку вдоль оси y движение первоначально отсутствует, составляющая полного импульса вдоль оси y равна нулю:

$$0 = m_1 v'_1 \sin\theta'_1 + m_2 v'_2 \sin\theta'_2. \quad (8.21в)$$

Таким образом, мы имеем три независимых уравнения[1].

[1] Заметим, что уравнения (8.21б) и (8.21в) справедливы даже в том случае, когда столкновение является неупругим и кинетическая энергия сохраняется.

Это значит, что мы можем найти самое большее три неизвестные величины. Если заданы m_1, m_2, v_1 (а в общем случае и v_2, если оно не равно нулю), то мы не можем однозначно определить четыре конечных значения v'_1, v'_2, θ'_1 и θ'_2, т.е. при определенных значениях трех из них четвертое (например, θ'_2) может быть произвольным. Однако если мы измерим одну из этих величин (например, θ'_1), то остальные три могут быть найдены с помощью записанных выше трех уравнений. При этом следует быть уверенным в том, что все скорости и углы измеряются значительно раньше (или значительно позже) столкновения, так чтобы сила между частицами еще не начала (или уже перестала) действовать.

Пример 8.11. Протон, движущийся со скоростью $8{,}2\cdot10^5$ м/с, упруго сталкивается с покоящимся протоном водородной мишени. Согласно наблюдению, один из протонов отклонился на 60° от направления движения налетающего протона. Под каким углом будет наблюдаться второй протон, и каковы будут скорости обоих протонов после столкновения?

Решение. Поскольку $m_1 = m_2$, уравнения (8.21а)–(8.21в) принимают соответственно вид

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2,$$
$$v_1 = v'_1\cos\theta'_1 + v'_2\cos\theta'_2,$$
$$0 = v'_1\sin\theta'_1 + v'_2\sin\theta'_2,$$

где $v_1 = 8{,}2\cdot10^5$ м/с и $\theta'_1 = 60°$ заданы. Во втором и третьем уравнениях перенесем члены, содержащие v'_1, в левую часть и возведем оба уравнения в квадрат:

$$v_1^2 - 2v_1v'_1\cos\theta'_1 + v_1'^2\cos^2\theta'_1 = v_2'^2\cos^2\theta'_2,$$
$$v_1'^2\sin^2\theta'_1 = v_2'^2\sin^2\theta'_2.$$

Складывая два последних уравнения и используя тождество $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, получаем

$$v_1^2 - 2v_1v'_1\cos\theta'_1 + v_1'^2 = v_2'^2.$$

Подставляя в это уравнение выражение $v_2'^2 = v_1^2 - v_1'^2$, полученное из первого уравнения, находим

$$2v_1'^2 = 2v_1v'_1\cos\theta'_1,$$

или

$$v'_1 = v_1\cos\theta'_1 = (8{,}2\cdot10^5\ \text{м/с})(\cos 60°) = 4{,}1\cdot10^5\ \text{м/с}.$$

Для нахождения v'_2 используем вновь первое уравнение (закон сохранения кинетической энергии):

$$v'_2 = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2} = 7{,}1\cdot10^5\ \text{м/с}.$$

Наконец, из третьего уравнения имеем

$$\sin\theta'_2 = -\frac{v'_1}{v'_2}\sin\theta'_1 = -\left(\frac{4{,}1\cdot10^5\ \text{м/с}}{7{,}1\cdot10^5\ \text{м/с}}\right)(0{,}866) = -0{,}50,$$

откуда находим $\theta'_2 = -30°$. (Знак минус здесь означает лишь то, что частица 2

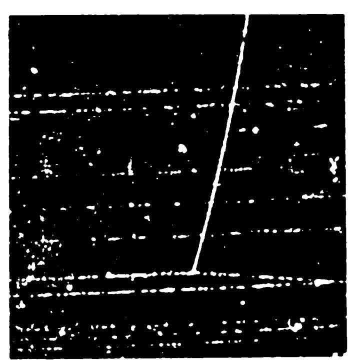


Рис. 8.18. Фото столкновения протона с протоном в пузырьковой камере, наполненной водородом (этот прибор позволяет сделать видимыми траектории элементарных частиц). Множество линий представляют собой траектории входящих в камеру протонов, которые могут столкнуться с протонами водорода в пузырьковой камере. (С разрешения Брукхейвенской национальной лаборатории.)

движется под углом ниже оси x, когда частица 1 движется выше оси x, как показано на рис. 8.17). Пример рассмотренного здесь столкновения изображен на фото, полученном в пузырьковой камере (рис. 8.18). Заметим, что после столкновения частиц обе траектории направлены друг к другу под прямым углом. Можно показать, что это утверждение сохраняет силу и в общем случае любых (отличных от лобовых) столкновений двух частиц одинаковых масс, одна из которых до столкновения находилась в покое (см. задачи).

Поскольку при анализе скоростей и направлений движения сталкивающихся частиц силы сами по себе не рассматриваются, этот анализ иногда называют кинематикой столкновений.

*8.10. Система отсчета, связанная с центром масс (СЦМ)

В любом столкновении, будь оно упругим или неупругим, когда внешними силами можно пренебречь, полный импульс $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ сохраняется, т. е. вектор $\mathbf{P}$ один и тот же как до столкновения, так и после него. Это утверждение сохраняет силу в любой системе координат и в любой системе отсчета, которую мы захотим выбрать. Однако, несмотря на сохранение самого вектора $\mathbf{P}$, его величина зависит от выбора системы отсчета.

Столкновения можно рассматривать во многих системах отсчета. Однако среди них имеется система отсчета, в которой такой анализ провести наиболее просто: в этой системе отсчета полный импульс $\mathbf{P}$ равен нулю. Такая система отсчета называется *системой центра масс* (СЦМ), поскольку в ней центр масс двух сталкивающихся частиц, определяемый выражением

$$\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

должен оставаться в покое. Это следует из того, что, согласно определению СЦМ, полный импульс двух частиц в этой системе

$$\mathbf{P}_{\text{ЦМ}} = (m_1 + m_2)\frac{d\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \left(m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right) = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

должен быть равен нулю:

$$m_1\mathbf{v}_1^* + m_2\mathbf{v}_2^* = 0 \qquad \text{[СЦМ]}.$$

Звездочкой здесь и далее обозначаются величины, рассматриваемые в СЦМ.

В системе центра масс, которую мы рассмотрим здесь лишь кратко, две частицы движутся навстречу друг другу с равными по величине и противоположно направленными импульсами ($\mathbf{p}_1^* = -\mathbf{p}_2^*$), поскольку $\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = \mathbf{P} = 0$. Если столкновение упругое и лобовое, то обе частицы «отражаются» друг от друга и удаляются в направлениях, откуда они пришли, с теми же величинами скоростей.

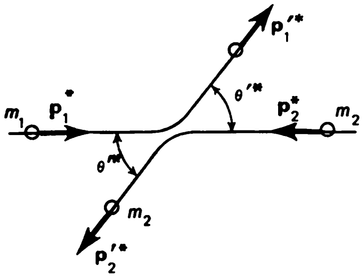


Рис. 8.19. Упругое столкновение в СЦМ: $p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$.

Если столкновение не лобовое, то частицы сохраняют те же самые скорости, что и до столкновения, но отражаются под некоторым углом θ'^*. Как показано на рис. 8.19, частицы движутся в противоположных направлениях (поскольку $\mathbf{p}_1'^* + \mathbf{p}_2'^* = \mathbf{P}'^* = 0$), так что направление движения частиц после столкновения определяется всего лишь одним углом θ'^*. Даже если столкновение неупругое, по-прежнему $\mathbf{p}_1'^* = -\mathbf{p}_2'^*$, т. е. импульсы после столкновения равны по величине и противоположны по направлению. При упругом столкновении величины импульсов не изменяются, и мы имеем $p_1^* = p_2^* = p_1'^* = p_2'^*$. Как при упругих, так и при неупругих столкновениях в этой системе отсчета импульсы не зависят от угла, как это имеет место в других системах отсчета (например, на рис. 8.17). Траектория в конечном состоянии является, по существу, одномерной, хотя и повернута на угол θ'^* от линии первоначального движения. Таким образом, в СЦМ картина столкновений характеризуется высокой степенью симметрии, и поэтому анализ движения в ней осуществить проще, чем в любой другой системе отсчета.

Система центра масс позволяет не только получить наиболее простое кинематическое описание столкновений, но в этой системе проще всего выглядят и теории, развитые физиками для объяснения ядерных сил. По этим причинам (а также ввиду различия лабораторных систем отсчета) столкновения ядерных и других элементарных частиц общепринято рассматривать в СЦМ. Хотя некоторые физические эксперименты с элементарными частицами действительно проводятся в СЦМ (к ним относятся, в частности, эксперименты на накопительных кольцах, где частицы заставляют двигаться навстречу друг другу с равными по величине, но противоположно направленными импульсами), многие эксперименты выполняются в условиях, когда одна из частиц (мишень) покоится, а другая (налетающая) частица с высокой скоростью сталкивается с ней; этот случай показан на рис. 8.17. Последняя ситуация типична для обычных лабораторных установок, и соответствующую систему отсчета, в которой одна частица (мишень) покоится, называют, как правило, *лабораторной системой отсчета* (лаб. системой отсчета). Результаты измерений, полученные в лаб. системе отсчета, можно по определенным правилам перевести в СЦМ. Этот вопрос рассматривать здесь подробно мы не будем, а оставим его для задач.

*8.11. Неупругие столкновения

Столкновения, в которых кинетическая энергия частиц не сохраняется, называются *неупругими столкновениями*. В таких столкновениях часть начальной кинетической энергии преобразуется в другие формы энергии, например в тепловую или потенциальную, так что после столкновения полная кинетическая энергия оказывается меньше, чем до столкновения. Может быть и обратная картина, когда при столкновении высвобождается потенциальная энергия (такая, как химическая или ядерная); в этом случае полная кинетическая энергия после столкновения может быть больше исходной. Если в результате столкновения два тела «слипаются», т. е. движутся далее как одно целое, то такие столкновения называются *полностью неупругими*. Примерами могут служить два сталкивающихся пластилиновых шара или два железнодорожных вагона, сцепляющихся в ходе столкновения (пример 8.6). При неупругом столкновении кинетическая энергия не обязательно полностью превращается в другие формы энергии. Так, в примере 8.6 мы видели, что, когда движущийся железнодорожный вагон сталкивается с покоящимся, сцепленная пара продолжает движение с определенной кинетической энергией. Несмотря на то что в неупругих столкновениях кинетическая энергия не сохраняется, полная энергия сохраняется; сохраняется также и вектор полного импульса.

Пример 8.12. Какая часть начальной кинетической энергии переходит в тепловую или другие формы энергии в полностью неупругом столкновении, рассмотренном в примере 8.6?

Решение. Первоначально кинетическая энергия была равна $(1/2)m_1v_1^2 = (1/2) \times$ $\times$ $(10\,000$ кг$)(24{,}0$ м/с$)^2 = 2{,}88 \cdot 10^6$ Дж. После столкновения полная кинетическая энергия составляет $(1/2)(20\,000$ кг$) \times$ $\times$ $(12{,}0$ м/с$)^2 = 1{,}44 \cdot 10^6$ Дж. Следовательно, энергия, преобразованная в другие формы, равна $2{,}88 \cdot 10^6$ Дж $- 1{,}44 \cdot 10^6$ Дж $=$ $= 1{,}44 \cdot 10^6$ Дж.

Пример 8.13. *Баллистический маятник* – это устройство, предназначенное для измерения скорости летящего тела (например, пули). Тело массой m «выстреливается» в большой брусок (из дерева или другого материала массой M), подвешенный подобно маятнику. (Величина M, как правило, несколько больше m). В результате столкновения центр масс баллистического маятника (вместе с застрявшим в нем телом) отклоняется вверх на максимальную высоту h (рис. 8.20). Найдите соотношение между начальной скоростью тела v и высотой h.

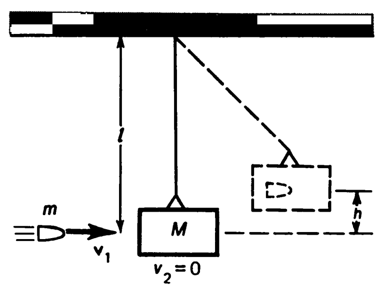


Рис. 8.20. Баллистический маятник.

Решение. Решать эту задачу будем в два этапа, а именно рассмотрим сначала само столкновение, а затем последующее движение маятника от вертикального положения до высоты h. На первом этапе решения предположим, что время столкновения очень мало, так что налетающее тело остановится по времени раньше, чем брусок заметно сдвинется из своего первоначального положения, в котором его ЦМ находится строго под точкой подвеса. Поскольку результирующая внешняя сила отсутствует, полный импульс сохраняется:

$mv_1 = (m + M)v'$;

здесь v' – скорость бруска (вместе с застрявшим в нем телом) сразу после столкновения, т. е. до того, как они заметно сдвинутся. Как только маятник начинает двигаться, возникает результирующая внешняя сила (сила тяжести, стремящаяся вернуть маятник в его исходное вертикальное положение). Поэтому при решении второй части задачи мы не сможем применить закон сохранения импульса. Однако в этом случае мы сможем использовать закон сохранения механической энергии, поскольку сразу после столкновения кинетическая энергия полностью преобразуется в гравитационную потенциальную энергию[1], когда маятник достигает своей максимальной высоты h. Следовательно,

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh.$$

Отсюда находим $v' = \sqrt{2gh}$. (Почему при этом работа, совершаемая силой натяжения нити, поддерживающей маятник, равна нулю?) Объединяя записанные нами выше два выражения, приходим к окончательному результату:

$$v_1 = \frac{m + M}{m} v' = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}\,.$$

При получении этого результата нам пришлось учитывать соответствующие обстоятельства и использовать подходящие законы сохранения: в первой части решения мы могли использовать только закон сохранения импульса, поскольку столкновение является неупругим и механическая энергия в нем не сохраняется; во второй части справедлив закон сохранения механической энергии, но не импульса. Если во время замедления налетающей частицы в бруске маятник заметно сдвигается, то в течение первого этапа *действует* внешняя сила, так что закон сохранения импульса не выполняется, и это необходимо учитывать.

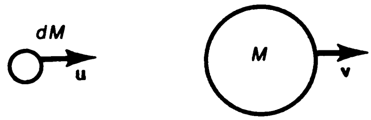
*8.12. Системы с переменной массой

Рассмотрим теперь системы, массы которых изменяются. Такие системы можно рассматривать как своего рода неупругое столкновение. В этом случае проще всего обратиться к формуле (8.12): $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$, где $\mathbf{P}$ – полный импульс системы, а $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – результирующая внешняя сила, действующая на систему. Необходимо очень тщательно определять систему и учитывать все изменения ее импульса. Важным примером систем с переменной массой являются ракеты, которые движутся вперед за счет выбрасывания назад сгоревших газов; при этом ракета ускоряется силой, действующей на нее со стороны газов. Масса M ракеты во время движения уменьшается, т. е. $dM/dt < 0$. Другой пример систем с переменной массой представляет собой погрузка сыпучих или иных материалов на транспортерную ленту конвейера; при этом масса M нагруженного конвейера возрастает, т. е. $dM/dt > 0$.

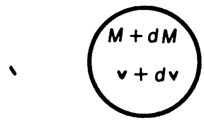
Общий случай системы с переменной массой можно исследовать на примере системы, изображенной на рис. 8.21. В некоторый момент времени t система имеет

---

[1] При этом неявно предполагается, что трением в точке подвеса и другими потерями механической энергии можно пренебречь.– *Прим. ред.*



а $\mathbf{P} = M\mathbf{v} + dM\mathbf{u}$, в момент времени t



б $\mathbf{P} = (M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, в момент времени $t + dt$

Рис. 8.21. *а* – в момент времени t тело массой dM близко к тому, чтобы войти в систему массой M; *б* – в момент времени $t + dt$ тело массой dM вошло в систему.

массу M и импульс $M\mathbf{v}$; по направлению к ней движется со скоростью $\mathbf{u}$ небольшое (бесконечно малое) тело массой dM, которое находится в состоянии, близком к тому, чтобы войти в рассматриваемую систему. Для простоты будем называть этот процесс «столкновением». За бесконечно малый промежуток времени dt к массе системы M добавится масса dM. Таким образом, через время dt масса нашей системы изменится от M до $M + dM$. (Заметим, что dM может быть отрицательной величиной, например для ракеты, летящей вперед за счет выброшенных газов.)

Для того чтобы применить формулу $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$ (8.12), необходимо рассмотреть определенную фиксированную систему частиц. Иными словами, изменение импульса $d\mathbf{P}$ мы должны рассматривать у одних и тех же частиц как до столкновения, так и после него. *Полную систему* мы определим как включающую в себя массы M и dM. Тогда в исходном состоянии, т. е. в момент времени t, ее полный импульс равен $M\mathbf{v} + \mathbf{u}\,dM$. В момент времени $t + dt$ (после того как масса dM присоединилась к массе M) скорость системы в целом становится равной $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, а ее полный импульс равен $(M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Таким образом, изменение импульса $d\mathbf{P}$ запишется в виде

$$d\mathbf{P} = (M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (M\mathbf{v} + \mathbf{u}\,dM) =$$

$$= M\,d\mathbf{v} + \mathbf{v}\,dM + dM\,d\mathbf{v} - \mathbf{u}\,dM.$$

При этом в соответствии с формулой (8.12) имеем

$$\mathbf{F}_{\text{внешн}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{M\,d\mathbf{v} + \mathbf{v}\,dM - \mathbf{u}\,dM}{dt},$$

или

$$\mathbf{F}_{\text{внешн}} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{u} - \mathbf{v})\frac{dM}{dt}. \tag{8.22a}$$

При написании этих формул мы опустили слагаемое $dM\,d\mathbf{v}/dt$, поскольку в пределе бесконечно малых величин оно равно нулю. Заметим, что разность $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ есть не что иное, как скорость $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ тела массой dM относительно скорости тела M. Таким образом,

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

– это скорость, с которой масса dM входит в систему с точки зрения наблюдателя, связанного с массой M. Уравнение (8.22а) можно переписать теперь в виде

$$M\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dM}{dt}. \tag{8.22б}$$

Первое слагаемое в правой части $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ описывает внешнюю силу, действующую на систему в целом (в случае ракеты в нее следует включить силу тяжести и силу сопротивления воздуха). В нее *не* входит сила, с которой тело массой dM действует на тело массой M в результате их столкновения, поскольку для системы в целом (полной системы) эта сила является внутренней. Второе слагаемое в правой части $\mathbf{v}_{\text{отн}}(dM/dt)$ описывает скорость, с которой импульс передается системе (или уносится из нее) благодаря добавлению к ней или выносу из нее массы. Это слагаемое можно поэтому рассматривать как своего рода силу, которая обусловлена добавлением (или выбрасыванием) массы и действует на систему массой M. Для ракеты это слагаемое называют силой *реактивной тяги*, так как оно описывает силу, возникающую в результате выбрасывания продуктов сгорания и действующую на ракету.

Пример 8.14. Полностью заправленная топливом ракета имеет массу 21 000 кг, из которых 15 000 кг приходится на топливо. Расход топлива в процессе сгорания составляет 190 кг/с, а скорость вылета продуктов сгорания относительно ракеты равна 2800 м/с. При условии что ракету запускают вертикально вверх, вычислите: а) силу реактивной тяги, действующую на ракету; б) результирующую силу, действующую на ракету в момент запуска, а также в момент, предшествующий полному выгоранию топлива; в) скорость ракеты в момент выгорания топлива. Мы пренебрежем сопротивлением воздуха и будем считать, что ускорение свободного падения постоянно и равно $g = 9{,}80$ м/с^2.

Решение. а) Сила реактивной тяги равна

$$v_{\text{отн}}\frac{dM}{dt} = (2800 \text{ м/с})(190 \text{ кг/с}) = 5{,}3\cdot 10^5 \text{ Н}.$$

б) Внешняя сила $F_{\text{внешн}}$ равна $Mg = (2{,}1\cdot 10^4 \text{ кг})(9{,}80 \text{ м/с}^2) = 2{,}1\cdot 10^5$ Н в начальный момент и $(6{,}0\cdot 10^3 \text{ кг}) \times (9{,}80 \text{ м/с}^2) = 5{,}9\cdot 10^4$ Н к моменту выгорания топлива. Следовательно, в момент поджига топлива результирующая сила равна

$$5{,}3\cdot 10^5 \text{ Н} - 2{,}1\cdot 10^5 \text{ Н} = 3{,}2\cdot 10^5 \text{ Н} \quad \text{(поджиг)},$$

тогда как непосредственно перед выгоранием она равна

$$5{,}3\cdot 10^5 \text{ Н} - 5{,}9\cdot 10^4 \text{ Н} = 4{,}7\cdot 10^5 \text{ Н} \quad \text{(выгорание)}.$$

После выгорания результирующая сила равна, разумеется, силе тяжести, действующей на ракету без топлива, т.е. $-5{,}9\cdot 10^4$ Н.

в) Из (8.22б) имеем

$$dv = \frac{F_{\text{внешн}}}{M}dt + v_{\text{отн}}\frac{dM}{M},$$

где $F_{\text{внешн}} = -Mg$, причем M – масса ракеты, зависящая от времени. Поскольку скорость $v_{\text{отн}}$ постоянная, это уравнение

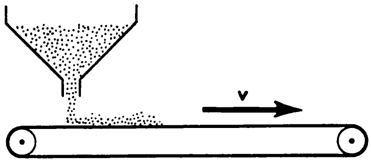


Рис. 8.22. Гравий высыпается на ленту транспортера из бункера.

нетрудно проинтегрировать:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_0^t g\,dt + v_{\text{отн}}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M},$$

откуда находим

$$v = v_0 - gt + v_{\text{отн}}\ln\frac{M}{M_0}.$$

Здесь v – скорость, а M – масса ракеты в любой момент времени t. Заметим, что $v_{\text{отн}}$ – отрицательная величина (в нашем случае равная -2800 м/с), поскольку она направлена в сторону, противоположную направлению движения; величина $\ln(M/M_0)$ также отрицательна вследствие того, что $M_0 > M$; поэтому у последнего слагаемого, обусловленного силой тяги, знак положительный, и эта сила способствует увеличению скорости. Время, необходимое для полного выгорания топлива (массой 15 000 кг), при условии его расхода 190 кг/с составляет

$$t = \frac{1{,}50\cdot 10^4\ \text{кг}}{190\ \text{кг/с}} = 79{,}0\ \text{с}.$$

Если принять $v_0 = 0$, то

$$v = -(9{,}80\ \text{м/с}^2)(79\ \text{с}) + (-2800\ \text{м/с})\left(\ln\frac{6000\ \text{кг}}{21\,000\ \text{кг}}\right) = 2830\ \text{м/с},$$

поскольку $\ln(6/21) = -\ln 3{,}50 = -1{,}25$.

Пример 8.15. Из бункера на ленту транспортера высыпается гравий со скоростью 75,0 кг/с (рис. 8.22). Какая сила необходима для того, чтобы обеспечить движение ленты с постоянной скоростью $v = 2{,}20$ м/с? Трением пренебречь.

Решение. Будем считать, что бункер находится в покое, т. е. $u = 0$, а лента транспортера пришла в движение, как только начали высыпать гравий, так что $dM/dt = 75{,}0$ кг/с. Поскольку лента перемещается с постоянной скоростью ($dv/dt = 0$), из уравнения (8.22а) имеем

$$F_{\text{внешн}} = M\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dM}{dt} = 0 - (0 - 2{,}20\ \text{м/с})(75{,}0\ \text{кг/с}) = 165\ \text{Н}.$$

Если бы трением не пренебрегалось, то следовало бы написать $F_{\text{внешн}} = F_{\text{двиг}} - F_{\text{тр}} = 165$ Н, где $F_{\text{двиг}}$ – сила тяги, развиваемая двигателем; знак минус перед $F_{\text{тр}}$ указывает на то, что трение всегда препятствует движению.

Заключение

Центр масс (ЦМ) системы частиц или протяженного тела (которое можно рассматривать как предельный случай непрерывного распределения вещества) определяется следующим образом:

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i x_i}{M},\qquad y_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i y_i}{M},\qquad z_{\text{ЦМ}} = \frac{\sum m_i z_i}{M},$$

или

$$x_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int x\,dm,\quad y_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int y\,dm,\quad z_{\text{ЦМ}} = \frac{1}{M}\int z\,dm;$$

здесь M – полная масса системы. Важная роль центра масс системы состоит в том, что эта точка движется подобно частице массой M, на которую действует та же результирующая внешняя сила $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$. Для системы частиц (или протяженного тела) это записывается математически в виде второго закона Ньютона:

$$M\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = \mathbf{F}_{\text{внешн}},$$

где M – полная масса системы (тела), $\mathbf{a}_{\text{ЦМ}}$ – ускорение центра масс системы, $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ – полная (результирующая) внешняя сила, действующая на все части системы. Это же уравнение может быть записано через полный импульс системы $\mathbf{P} = \sum m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}.$$

Если результирующая внешняя сила, действующая на систему, равна нулю, то полный импульс системы сохраняется постоянным. В этом и состоит *закон сохранения импульса*. Его можно сформулировать иначе: полный импульс изолированной системы частиц является постоянным.

Закон сохранения импульса очень полезен при рассмотрении целого класса явлений, называемых *столкновениями*. При столкновении два (или более) тела взаимодействуют друг с другом в течение очень короткого времени; при этом сила, действующая между ними в течение этого времени, очень велика по сравнению с любыми другими действующими силами. *Импульс* такой силы, действующий на тело, определяется следующим образом:

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}\, dt;$$

он равен изменению импульса тела:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{f}} - \mathbf{p}_{\text{i}} = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{J}.$$

Импульс сохраняется при любом столкновении. Полная энергия тоже сохраняется, но этот закон приносит пользу лишь в случае, когда в преобразовании участвует только кинетическая энергия. В этом случае кинетическая энергия сохраняется и столкновение называется *упругим*; в противном случае (если кинетическая энергия не сохраняется) столкновение называется *неупругим*.

Вопросы

1. Почему ЦМ трубки длиной 1 м находится посередине трубки, а для вашей руки или ноги это не так?

2. Покажите на рисунке, как смещается ваш ЦМ, когда вы меняете положение с лежачего на сидячее.

3. Опишите способ аналитического определения ЦМ произвольной тонкой пластинки треугольной формы.

4. Станьте у края открытой двери так, чтобы ноги стояли по обе стороны двери, а живот и кончик носа касались края двери. Попытайтесь стать на цыпочки, не отрывая от двери живота и кончика носа. Почему это не получается?

5. Почему труднее сесть из лежачего положения, когда ваши колени согнуты, чем когда ваши ноги вытянуты вперед?

6. Почему невозможно подняться со стула непосредственно из положения «с прямой спи-

ной», а необходимо предварительно наклониться вперед?

7. Объясните, почему однородный прямоугольный брусок можно поместить на стол только так, чтобы над столом выступало не больше половины его длины?

8. Почему вы стремитесь отклониться назад, когда несете в руках тяжелый груз?

9. Проанализируйте движение катушки с ниткой (рис. 8.23), когда вы тянете нитку а) прямо

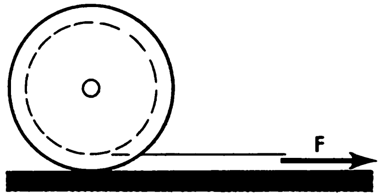


Рис. 8.23. Катушка ниток.

вверх; б) горизонтально. Как повлияет на движение катушки сила, с которой вы будете тянуть нить?

10. Если импульс центра масс тела может измениться лишь под действием внешней силы, то каким образом внутренняя сила, развиваемая двигателем, может ускорять автомобиль?

11. Каким образом можно изменять направление движения ракеты, когда она находится далеко в космическом пространстве в условиях вакуума?

12. Может ли тело иметь импульс и не иметь при этом энергии? А наоборот может быть? Объясните.

13. Мы утверждаем, что импульс сохраняется. Однако большинство движущихся тел в конце концов замедляется и останавливается. Объясните.

14. Два бруска массами m_1 и m_2, соединенные пружиной, покоятся на столе в отсутствие трения с его поверхностью. Бруски удаляют друг от друга путем растяжения пружины и высвобождают. Опишите последующее движение брусков.

15. Ракета, движущаяся в воздухе по параболической траектории, внезапно разрывается на множество частей (осколков). Что можно сказать о движении этой «системы» осколков?

16. Кинетические энергии легкого и тяжелого тела одинаковы. У какого из них больше импульс?

17. Что происходит с импульсом человека в момент, когда он спрыгивает с дерева на землю?

18. С помощью закона сохранения импульса объясните, каким образом передвигается в воде рыба, совершая маховые движения хвостом?

19. Почему, когда вы отпускаете надутый шар, он начинает летать по комнате?

20. По одной из легенд один богач, имевший при себе мешок с золотыми монетами, однажды замерз и умер, оказавшись на поверхности заледеневшего озера. Он не смог достичь берега, поскольку лед был очень гладкий и трение отсутствовало. Что следовало бы сделать богачу, чтобы спасти свою жизнь, если бы он не был столь жадным?

21. Если бы падающий мяч испытал упругое столкновение с полом, то отразился бы он на исходную высоту? Объясните.

22. Согласно выражению (8.15), чем короче время столкновения, тем больше должна быть сила при данном импульсе силы и, следовательно, больше деформация тела, на которое действует сила. Объясните на основе этого принцип действия «воздушного мешка» - устройства пассивной безопасности, которое надувается во время столкновения автомобилей и уменьшает возможность разрушения техники и гибели людей.

23. В каком случае на тело будет действовать больший импульс силы - когда приложенная сила мала или когда она велика?

24. Каким образом сила может привести к нулевому значению импульса тела за конечный промежуток времени, если сама эта сила отлична от нуля по крайней мере в течение части этого промежутка времени?

25. Какой вариант столкновения автомобилей вы считаете более опасным (в смысле возможных повреждений) для находящихся в них пассажиров - когда автомобили после столкновения разлетаются в стороны или когда они продолжают движение как единое целое? Объясните.

26. Очень упругий мяч отпускают с высоты h, и он падает на твердую стальную плиту, укрепленную на земле, так что мяч отскакивает от плиты со скоростью, почти равной его начальной. а) Сохраняется ли импульс мяча на всех стадиях этого процесса? б) Если считать мяч и землю одной системой, то во время каких стадий процесса импульс сохраняется? в) Ответьте на вопрос «б», если вместо мяча будет кусок замазки, падающий на стальную плиту и прилипающий к ней?

27. Поток воды на гидроэлектростанции направляется так, чтобы с высокой скоростью попасть на лопатки турбин, которые связаны с валом, вращающим электрический генератор. Как, по вашему мнению, следует конструировать лопатки - чтобы вода полностью останавливалась при соприкосновении с ними или чтобы она отражалась при этом назад?

***28.** Наблюдения показывают, что в процессе β-распада электрон и ядро отдачи часто не разъединяются, а движутся как одно целое. С помощью закона сохранения импульса в двух измерениях объясните, почему при этом обязательно испускается по крайней мере еще одна частица.

***29.** Используя закон сохранения (вектора) импульса, покажите, что столкновение двух частиц происходит в плоскости, если а) одна из частиц первоначально покоилась; б) две частицы имеют импульсы в одном (или противоположных) направлении.

***30.** При каких начальных условиях возможно (и возможно ли вообще) столкновение двух частиц, которое потребовало бы трехмерного описания? Объясните. Рассмотрите также случай столкновения в СЦМ.

***31.** Объясните, каким образом СЦМ может находиться в покое, когда два сталкивающихся тела движутся.

32. Можно ли выбрать систему отсчета, в которой ЦМ двух сталкивающихся тел движется со скоростью, превышающей скорость каждого из тел?

Задачи

Разделы 8.1 и 8.2

1. (I) Расстояние между атомом углерода ($m = 12$ а. е. м.) и атомом кислорода ($m = 16$ а. е. м.) в молекуле CO равно $1{,}13 \times 10^{-10}$ м. На каком удалении от атома кислорода расположен центр масс этой молекулы?

2. (I) Определите положение центра масс а) вытянутой руки; б) руки, согнутой под прямым углом; используйте при этом табл. 8.1.

3. (I) Пользуясь данными табл. 8.1, найдите высоту над поверхностью земли центра масс тела человека ростом 1,75 м.

4. (I) Центр масс незагруженного автомобиля массой 1500 кг расположен на расстоянии 3,10 м от передней оси. Как изменится это расстояние, если в автомобиль сядут пять пассажиров: двое на переднее сидение на расстоянии 2,60 м от переднего края автомобиля, а трое на заднее сидение на расстоянии 3,85 м от переднего края. Масса каждого пассажира предполагается равной 65 кг.

5. (II) Вычислите, насколько ниже медианы торса будет находится ЦМ прыгуна в высоту, когда он находится в такой фазе прыжка, что его ноги и руки располагаются вертикально, а шея и туловище – горизонтально. Будет ли этот ЦМ находиться вне тела? При решении используйте табл. 8.1.

6. (II) Квадратная однородная платформа размером 30 × 30 м и массой 7400 кг используется в качестве парома, перевозящего автомобили через реку в направлении на север. а) Где будет располагаться ЦМ загруженного тремя автомобилями парома, если каждый автомобиль имеет массу 1400 кг и находится соответственно в северо-восточном, юго-восточном и

Таблица 8.1. Положения центров масс различных частей тела среднего мужчины[1]

Расстояние от пола до суставов, % полного роста	Суставы (●) (соединения)
91,2	Позвонок у основания черепа
81,2	Плечевой сустав
52,1	Тазобедренный сустав
28,5	Коленный сустав
4,0	Лодыжка

Расстояние от пола до центра масс различных частей тела (×), % полного роста		Процент массы тела
Голова	93,5	6,9
Туловище и шея	71,1	46,1
Верхняя часть рук	71,7	6,6
Нижняя часть рук	55,3	4,2
Кисти рук	43,1	1,7
Верхняя часть ног (бедра)	42,5	21,5
Нижняя часть ног	18,2	9,6
Ступни	1,8	3,4
	58,0	100,0

[1] Данные приведены из «Справочника по биоастронавтике» (НАСА, Вашингтон, округ Колумбия).

юго-западном углах парома? б) Если автомобиль в юго-западном углу парома получит ускорение 1,80 м/с^2 в направлении на север, то где окажется ЦМ парома через 4,0 с?

7. (II) Имеется тонкий однородный провод в виде полуокружности радиусом r. Найдите ЦМ провода в системе отсчета с началом в центре «полной» окружности.

8. (II) Три сферы радиусами r_0, $2r_0$ и $3r_0$ помещены одна за другой и соприкасаются друг с другом так, что их центры расположены на одной прямой линии, проходящей через центр второй сферы радиусом $r = 2r_0$. Где находится ЦМ такой системы?

9. (III) Определите ЦМ однородной тонкой полукруглой пластины.

10. (III) Найдите положение ЦМ однородной треугольной пирамиды, у которой все четыре треугольные грани имеют одинаковые ребра длиной s.

Раздел 8.3

11. (I) Массы Земли и Луны равны соответственно $5{,}98\cdot10^{24}$ и $7{,}36\cdot10^{22}$ кг; расстояние между этими планетами около $3{,}80\cdot10^{8}$ м. а) Где расположен ЦМ этой системы? б) Что можно сказать о движении системы Земля–Луна, а также о движении по отдельности каждой из этих планет относительно Солнца?

12. (I) Два тела массой по 35 кг имеют скорости (в метрах в секунду) $\mathbf{v}_1 = 12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}_2 = -20\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$. Определите импульс ЦМ этой системы.

13. (II) а) Если в примере 8.4 (рис. 8.9) положить $m_{II} = 3m_I$, то где тогда приземлится тело массой m_{II}? б) Ответьте на этот же вопрос в случае, когда $m_I = 3m_{II}$.

14. (II) На гладкой ледяной поверхности стоят девушка и юноша; массы их равны соответственно 50 и 70 кг, а расстояние между ними составляет 8,0 м. а) На каком расстоянии от девушки расположен их общий ЦМ? б) Если оба возьмутся за концы веревки и юноша, дернув за веревку, переместится на расстояние 2,2 м, то на каком расстоянии от девушки он окажется? в) На какое расстояние переместился бы юноша, если бы он столкнулся с девушкой?

15. (II) Воздушный шар, наполненный гелием, вместе с кабиной имеет массу M и покоится относительно Земли. Пассажир вылезает из кабины и начинает спускаться по веревке, свешивающейся с шара, со скоростью v относительно шара. С какой скоростью и в каком направлении (относительно Земли) будет двигаться при этом шар? Что произойдет, если пассажир остановится?

16. (III) Платформа длиной 20 м и массой 200 кг движется со скоростью 6,0 м/с по горизонтальным рельсам без трения. Человек массой 75 кг начинает движение из одного конца платформы к другому в направлении ее движения со скоростью 2,5 м/с относительно платформы. На какое расстояние переместится платформа за то время, которое требуется человеку для перехода из одного ее конца до другого?

Раздел 8.4

17. (I) Импульс частицы (в системе СИ) дается выражением $\mathbf{p} = 4{,}0t^2\,\mathbf{i} - 2{,}6\mathbf{j} - 3{,}9t\,\mathbf{k}$. Как зависит от времени сила, действующая на частицу?

18. (II) Воздушная масса, движущаяся с ураганной скоростью 200 км/ч, ударяется в стену строения размером 30 м × 20 м, причем за каждую секунду ураган приносит воздушную массу $5{,}4\cdot10^4$ кг. Вычислите результирующую силу, действующую на стену, если сразу после удара вся воздушная масса останавливается.

19. (II) Чему равен импульс воробья массой 50 г, летящего со скоростью 15 м/с? Каков будет его импульс спустя 12 с, если на него действует сила сопротивления воздуха $2{,}0\times10^{-2}$ Н?

20. (II) Сила, действующая на частицу массой m, дается формулой $\mathbf{F} = 26\mathbf{i} - 12t^2\,\mathbf{j}$ (в ньютонах). Каково будет изменение импульса частицы за промежуток времени от 1,0 до 3,0 с?

21. (II) Бейсбольный мяч массой 145 г, движущийся вдоль оси x со скоростью 30 м/с, ударяется о забор под углом 45° и отскакивает вдоль оси y с той же самой по величине скоростью. Запишите изменение импульса мяча через единичные векторы по осям координат.

22. (II) Ракета массой 7200 кг движется в космическом пространстве со скоростью 150 м/с в направлении к Солнцу. Предположим, что понадобилось изменить направление движения на 30°, и это можно осуществить лишь за счет кратковременного выброса продуктов сгорания в направлении, перпендикулярном первоначальному движению. Если газы из ракеты выбрасываются со скоростью 2400 м/с, то какая масса газов должна быть при этом выброшена?

Раздел 8.5

23. (I) Защитник массой 140 кг при игре в хоккей, движущийся со скоростью 3,0 м/с, встречает нападающего массой 90 кг, набравшего скорость 7,5 м/с, и применяет к нему силовой прием. Какова будет совместная скорость этой пары непосредственно после столкновения?

24. (I) Покоящееся атомное ядро испытывает радиоактивный распад на альфа-частицу и меньшее ядро. Какова будет скорость этого ядра отдачи, если скорость альфа-частицы $6{,}2 \times 10^5$ м/с? Считайте, что масса исходного ядра в 57 раз больше массы альфа-частицы.

25. (I) Открытый товарный вагон массой 12 000 кг движется по горизонтальному железнодорожному полотну без трения с постоянной скоростью 15,0 м/с. Внезапно начинает идти снег, падающий вертикально вниз, который заполняет вагон со скоростью 3,00 кг/мин. Чему будет равна скорость вагона через час?

26. (I) Товарный вагон массой 10 000 кг движется по горизонтальному железнодорожному полотну без трения с постоянной скоростью 22 м/с. В вагон забрасывается дополнительный груз массой 5000 кг. Чему после этого будет равна скорость вагона?

27. (II) Пуля массой 44 г попадает в деревянный брусок массой 15,4 кг на горизонтальной поверхности прямо напротив ствола оружия. Коэффициент динамического трения между бруском и поверхностью равен 0,28. После застревания пули брусок, прежде чем остановиться, проходит расстояние 18,0 м. Найдите начальную скорость пули при вылете из ствола.

28. (II) В результате взрыва покоящийся предмет разделяется на два фрагмента, один из которых приобретает вдвое большую кинетическую энергию. Каково отношение масс этих фрагментов? У какого из них масса больше?

29. (II) Частица массой m, движущаяся со скоростью v_0 вдоль оси x, внезапно «выстреливает» треть своей массы в направлении оси y со скоростью $2v_0$. Запишите вектор скорости оставшейся части, выразив его через единичные векторы **i**, **j** и **k**.

30. (II) Распад нейтрона на протон, электрон и антинейтрино (так называемый бета-распад) является примером трехчастичного процесса. Используя тот факт, что импульс – векторная величина, покажите, что если нейтрон первоначально покоился, то векторы всех трех распадных частиц должны лежать в одной плоскости. В том случае, когда распадных частиц будет больше трех, это не справедливо.

31. (II) Два груза массами m_1 и m_2 связаны между собой растянутой пружиной и лежат на гладком столе без трения. Грузы отпускают. а) Существует ли результирующая внешняя сила, действующая на систему? б) Найдите отношение скоростей грузов v_1/v_2. в) Чему равно отношение их кинетических энергий? г) Как будет двигаться ЦМ этой системы? д) Как изменятся ответы на поставленные выше вопросы, если вы учтете трение?

32. (II) Радиоактивное покоящееся ядро распадается на другое ядро, электрон и нейтрино. Последние две частицы испускаются под прямым углом друг к другу и имеют импульсы соответственно $8{,}6 \cdot 10^{-23}$ и $6{,}2 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с. Каковы величина и направление импульса ядра отдачи?

33. (II) Двухступенчатая ракета массой 940 кг движется со скоростью $6{,}2 \cdot 10^3$ м/с относительно Земли. Затем происходит запланированный взрыв, в результате которого ракета разделяется на две части одинаковой массы, движущиеся с относительной скоростью $2{,}4 \cdot 10^3$ м/с вдоль линии первоначального движения ракеты. а) Чему равны и как направлены скорости каждой части сразу после взрыва? б) Какое количество энергии выделилось при взрыве? (*Подсказка*: сравните величины кинетической энергии до и после взрыва системы.)

34. (III) Снаряд массой 300 кг, выпущенный с начальной скоростью 130 м/с под углом 45° к горизонту, в верхней точке своей траектории распадается на три части одинаковой массы. Две из них сразу после взрыва продолжают лететь с одинаковыми скоростями (одна падает вертикально вниз, другая движется горизонтально). Если взрыв добавляет каждому из фрагментов $5{,}0 \cdot 10^5$ Дж кинетической энергии, то какой будет скорость третьего фрагмента сразу после взрыва?

Раздел 8.6

35. (I) Теннисный мяч при сильной подаче может отлететь от ракетки со скоростью 65 м/с. Чему равна средняя сила, действующая на мяч во время удара, если масса мяча равна 0,060 кг, а время контакта с ракеткой составляет 0,030 с? Достаточна ли эта сила для того, чтобы приподнять над землей человека средних размеров?

36. (I) Бейсбольный мяч массой 0,145 кг, которому сообщили скорость 35 м/с, отбивается битой и летит обратно со скоростью 50 м/с. Пусть время контакта между битой и мячом составляет $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ с. Вычислите силу их взаимодействия, считая ее постоянной.

37. (II) Космонавт, масса которого в скафандре равна 150 кг, отталкивается ногами от стенок космического корабля массой 2200 кг и приобретает скорость 2,5 м/с. а) Каково при этом изменение скорости корабля? б) Если отталкивание длится 0,40 с, то какова средняя сила взаимодействия между астронавтом и кораблем? Используйте систему отсчета, связанную с кораблем до отталкивания. в) Какова

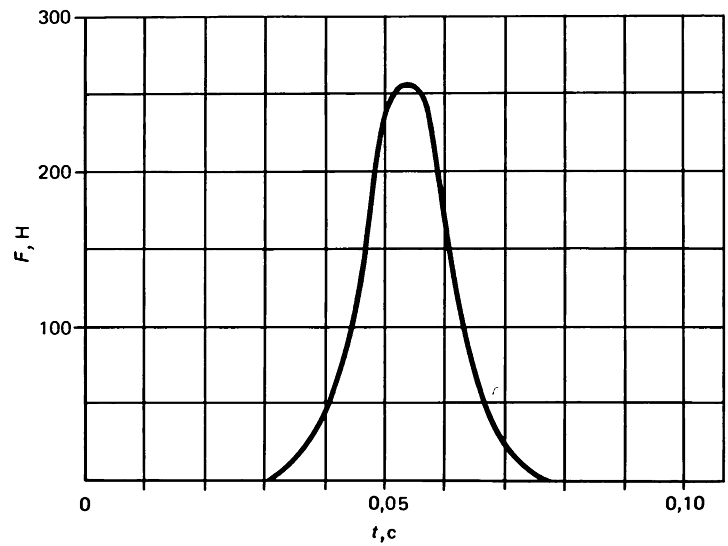


Рис. 8.24.

кинетическая энергия отдельно астронавта и корабля после отталкивания?

38. (II) Теннисный мяч массой m, летящий со скоростью v, ударяется о стенку под углом 45° и отражается от нее с той же скоростью и под тем же углом. Какой импульс получила при этом стенка?

39. (II) Вода ударяет в лопасти турбины генератора так, что скорость частиц воды после отражения имеет ту же величину, но обратное направление. Если удельный расход воды составляет 60 кг/с, а скорость потока равна 16 м/с, то чему равна средняя сила, действующая на лопасти?

40. (II) а) Молекула массой m, имеющая скорость v, ударяется о стенку сосуда под прямым углом и отражается с той же скоростью. Чему равна средняя сила, с которой молекула действует на стенку во время столкновения, если время столкновения равно Δt? б) Ответьте на тот же вопрос, если о стенку ударяются много молекул того же типа, что и в п. «а», причем время столкновения со стенкой равно t и усреднение следует вести по достаточно продолжительному времени.

41. (II) Предположим, что сила, действующая на теннисный мяч массой 0,060 кг, зависит от времени так, как показано на рис. 8.24. Пользуясь графическим методом, оцените а) величину полного импульса, сообщаемого мячу; б) скорость мяча после удара, считая, что до удара он находился в покое.

42. (II) Сила, действующая на пулю, описывается зависимостью $F = 480 - 1{,}6 \cdot 10^5\, t$ в течение интервала времени от $t = 0$ до $t = 3{,}0 \cdot 10^{-3}$ с; в этой формуле t измеряется в секундах, а сила F – в ньютонах. а) Постройте график зависимости силы F от времени t на указанном промежутке времени. б) Пользуясь графическим методом, оцените импульс, полученный пулей. в) Вычислите аналитически (посредством интегрирования) импульс, полученный пулей. г) Если в результате пуля приобретает скорость 320 м/с, то какова должна быть масса пули?

43. (III) С какой максимальной высоты может прыгнуть человек массой 60 кг, с тем чтобы избежать перелома кости голени, имеющей поперечное сечение $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ м^2? Пренебрегите сопротивлением воздуха и считайте, что ЦМ человека перемещается на расстояние 0,60 м из положения стоя в положение сидя (при амортизации прыжка). Предположите, что максимальное давление, которое может выдержать кость (сила, приходящаяся на единицу площади; см. разд. 11.4), составляет $170 \cdot 10^6$ Н/м^2.

44. (III) Весы отградуированы так, что они дают нулевые показания, когда на них помещается большая плоская кювета. На кювету с высоты $h = 3{,}0$ м направляется поток воды с расходом массы $R = 0{,}20$ кг/с. Найдите: а) выражение для показаний весов как функции времени t; б) показание весов в момент времени $t = 15$ с. в) Ответьте на те же вопросы, но для случая, когда на весы помещают высокий узкий цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения $A = 20$ см^2.

Раздел 8.8

45. (I) Два бильярдных шара с одинаковыми массами испытывают абсолютно упругое

столкновение. Если скорость первого шара до столкновения была 2,0 м/с, а второго 3,0 м/с, причем скорость второго шара была направлена противоположно скорости первого, то чему будут равны их скорости после столкновения?

46. (II) Шар массой 0,60 кг ударяется о второй шар, первоначально покоящийся, причем предполагается, что удар является лобовым и абсолютно упругим. Второй шар при этом отскакивает со скоростью, равной половине начальной скорости первого шара до соударения. а) Чему равна масса второго шара? б) Какая доля первоначальной кинетической энергии первого шара передастся при соударении второму шару?

47. (II) Шар массой m испытывает лобовое упругое соударение с другим шаром (покоившимся до удара) и отлетает от него в противоположную первоначальному движению сторону со скоростью, равной одной трети начальной. Чему равна масса второго шара?

48. (II) Покоящаяся частица массой m_2 испытывает лобовое соударение с частицей массой m_1, движущейся со скоростью v_1. Какой должна быть масса m_1 (в единицах m_2) при данном значении v_1, чтобы налетающая частица имела наибольшие возможные значения: а) скорости; б) кинетической энергии; в) импульса? Ответьте на те же вопросы применительно к наименьшему возможному значению этих величин. Считайте, что столкновение является упругим.

49. (II) Груз массой $m = 2{,}0$ кг скользит вниз по наклонной плоскости с углом 30° и высотой 3,6 м. У основания наклонной плоскости он сталкивается с другим грузом массой $M = 6{,}0$ кг, покоящимся на горизонтальной плоскости (рис. 8.25). Если столкновение происходит упруго, а трением можно пренебречь, то чему будут равны а) скорости обоих грузов после столкновения; б) высота, на которую вернется меньший из грузов вверх по наклонной плоскости?

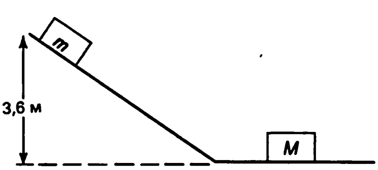


Рис. 8.25.

50. (II) Покажите, что в общем случае при любом лобовом одномерном упругом столкновении скорости после него имеют следующие значения:

$$v'_2 = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

и

$$v'_1 = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

51. (II) Рассмотрите пример 8.10. Определите долю кинетической энергии, потерянной нейтроном ($m_1 = 1{,}01$ а. е. м.) при упругом лобовом столкновении со следующими ядрами: а) $_1H^1$ ($m = 1{,}01$ а. е. м.); б) $_1H^2$ (тяжелый водород, или дейтерий, $m = 2{,}01$ а. е. м.); в) $_6C^{12}$ ($m = 12{,}00$ а. е. м.); г) $_{82}Pb^{208}$ (свинец, $m = 208$ а. е. м.). Обсудите пригодность каждого из этих ядер в качестве замедлителя в ядерном реакторе (пример 8.10).

52. (III) Какую максимальную массу m может иметь частица в задаче 49 (рис. 8.25), чтобы после соударения с частицей массой M и последующего подъема и спуска по наклонной плоскости она вновь испытала соударение с частицей массой M?

53. (III) Груз массой 3,5 кг скользит по поверхности стола без трения со скоростью 8,0 м/с по направлению к другому (покоящемуся) грузу массой 6,0 кг. Ко второму грузу прикреплена пружина (подчиняющаяся закону Гука с коэффициентом упругости $k = 750$ Н/м) таким образом, что при соударении обоих грузов пружина сжимается (рис. 8.26). а) Каково при этом максимальное сжатие пружины? б) Чему равны конечные скорости грузов после соударения? в) Было ли соударение упругим?

***Раздел 8.9**

***54.** (II) Частица массой m, движущаяся со скоростью v, упруго соударяется с покоящейся частицей-мишенью массой $2m$ и отражается (рассеивается) под углом 90° относительно направления ее первоначального движения. а) Под каким углом будет двигаться мишень после соударения? б) Каковы конечные скорости обеих частиц? в) Какая доля начальной кинетической энергии налетающей частицы передается частице-мишени?

***55.** (II) Два бильярдных шара с одинаковыми массами движутся под прямым углом друг к другу и сталкиваются в начале системы координат xy. Одна из частиц двигалась до этого со скоростью 3,0 м/с вверх вдоль оси y, другая – вправо вдоль оси x со скоростью 4,8 м/с. После столкновения второй шар движется вдоль положительного направления оси y. В каком направлении движется после соударения

Рис. 8.26.

первый шар и чему равны при этом скорости обоих шаров?

*56. (II) Бильярдный шар массой $M_A = 0{,}40$ кг сталкивается с покоящимся шаром массой $M_B = 0{,}60$ кг. В результате этого упругого столкновения шар А отклоняется от направления своего движения на 30°, а шар В – на 53°. Каково отношение скоростей шаров после столкновения?

*57. (II) Покажите, что при упругом столкновении между двумя частицами равной массы, рассмотренном в примере 8.11 (одна из частиц до столкновения покоится), сумма углов, образуемых скоростями после столкновения с направлением начальной скорости, всегда равна 90°, т.е. $\theta_1' + \theta_2' = 90°$. Считайте, что столкновение не является лобовым.

*58. (III) Нейтрон упруго сталкивается с покоящимся ядром гелия, масса которого в четыре раза превосходит массу нейтрона; ядро гелия после столкновения регистрируется под углом $\theta_2' = 36°$ относительно направления движения нейтрона. Найдите соответствующий угол θ_1' для нейтрона, а также скорости нейтрона v_n' и ядра гелия v_{He}' после столкновения. Начальную скорость нейтрона принять равной $6{,}8 \cdot 10^5$ м/с.

*59. (III) Покажите, что при упругом столкновении налетающей частицы массой m_1 с покоящейся частицей-мишенью массой m_2 угол отклонения (рассеяния) θ_1' налетающей частицы а) может принимать любые значения от 0 до 180° при $m_1 < m_2$, причем б) его максимальное значение φ определяется выражением $\cos^2\varphi = 1 - (m_2/m_1)^2$ при $m_1 > m_2$.

*Раздел 8.10

*60. (I) Прежде чем столкнуться, две частицы с массами m_1 и m_2 движутся в одном и том же направлении со скоростями соответственно v_1 и v_2. Чему равна скорость движения их центра масс?

*61. (II) Найдите скорость ЦМ частицы 2 (т.е. величины $v_2'^*$ и $\theta_2'^*$) после столкновения, описанного в примере 8.11.

*62. (II) В лаб. системе отсчета частица с импульсом $m_1 v_1$ сталкивается с покоящейся частицей массой $m_2 (v_2 = 0)$. а) Покажите, что скорость СЦМ относительно лаб. системы отсчета равна $\mathbf{v}_{ЦМ} = m_1\mathbf{v}_1/(m_1 + m_2)$. б) Покажите, что скорость любой частицы в СЦМ дается выражением $\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{ЦМ}$, где $\mathbf{v}_i$ – скорость этой частицы в лаб. системе отсчета, причем индекс i принимает значение либо 1, либо 2.

*63. (II) При столкновении протона с протоном в СЦМ полная кинетическая энергия равна $3{,}2 \cdot 10^{-10}$ Дж. Какую кинетическую энергию имел налетающий протон в лаб. системе отсчета, в которой второй протон покоился?

*64. (III) Снаряд выпущен из орудия со скоростью 450 м/с под углом 45°. После 60 с полета он разлетается на три осколка с одинаковыми массами и одинаковыми скоростями относительно скорости снаряда, которую он имел непосредственно перед взрывом. Наблюдатель на земле видит, как один из осколков падает вертикально на землю, тогда как второй движется горизонтально непосредственно после взрыва. На каком расстоянии от точки выстрела упадет третий осколок?

*Раздел 8.11

*65. (II) Метеор массой около 10^8 кг сталкивается с Землей ($M_З = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг) при скорости около 15 м/с и застревает в толще Земли. а) Какова скорость «отдачи», полученная Землей? б) Какая доля кинетической энергии метеора перешла в кинетическую энергию Земли? в) На какую величину изменилась кинетическая энергия Земли в результате этого столкновения?

*66. (II) Орел массой $m_1 = 6{,}6$ кг, летящий со скоростью $v_1 = 12{,}4$ м/с, сталкивается с другим орлом массой $m_2 = 8{,}3$ кг, летящим со скоростью $v_2 = 9{,}1$ м/с в перпендикулярном первому орлу направлении. После столкновения они летят вместе как одно целое; в каком направлении и с какой скоростью это будет происходить?

*67. (II) В результате взрыва тело распадется на две части, масса одной из которых в 1,5 раза больше другой. Какую кинетическую энергию преобретает каждая часть, если в процессе взрыва выделилась энергия 4500 Дж?

*68. (II) а) Получите формулу для доли потерянной кинетической энергии (ΔКЭ/КЭ) для баллистического маятника в примере 8.13. б) Вычислите эту величину для случая $m = 10{,}0$ г и $M = 105$ г.

*69. (II) В результате полностью неупругого столкновения между двумя телами с одинаковыми массами и одинаковыми начальными скоростями v до столкновения оба тела начинают двигаться со скоростью $v/3$. Чему был равен угол между направлениями их скоростей до столкновения?

***70.** (III) Определите точность приближения в задаче о баллистическом маятнике, когда мы пренебрегли движением груза массой M во время столкновения. Используйте обозначения, применяемые в примере 8.13 и на рис. 8.20, и предположите, что налетающая частица равномерно замедляется внутри маятника на расстоянии d. Найдите: а) время столкновения Δt; б) степень несохранения импульса $\Delta\mathbf{p}$ благодаря действию результирующей внешней силы во время столкновения; в) величину, на которую вычисленное значение скорости пули будет отклоняться от истинного значения, если использовать соотношение, приведенное в примере 8.13.

*Раздел 8.12

***71.** (II) Пусть в примере 8.15 лента транспортера испытывает тормозящее действие силы трения 140 Н. Найдите необходимую выходную мощность (в лошадиных силах) двигателя как функцию времени, начиная с момента $t = 0$, когда гравий начинает высыпаться на ленту, до момента времени $t = 3$ с, когда гравий начнет ссыпаться с конца ленты, расположенного в 20 м от дна бункера.

***72.** (II) а) Покажите, что мощность, развиваемая силой, действующей на ленту транспортера (см. задачу 71), равна $P = v^2(dM/dt) = 2(d/dt)$КЭ; иными словами, покажите, что энергия сообщается этой ленте со скоростью, которая *в два раза* превосходит скорость изменения ее кинетической энергии (с учетом возрастания ее массы). б) На что расходуется вторая половина сообщенной энергии?

***73.** (II) Рассмотрите товарный вагон из задачи 25, который медленно заполняется снегом. а) Найдите зависимость скорости вагона от времени. б) Используя формулы (8.22), найдите скорость вагона по прошествии 60 мин. Совпадает ли этот результат с более простым расчетом (задача 25), выполненным с помощью разд. 8.5?

***74.** (II) В реактивный двигатель самолета поступает 100 кг воздуха, которые сгорают ежесекундно вместе с 4,2 кг топлива. Продукты сгорания в виде газов выбрасываются из сопла со скоростью 550 м/с (относительно самолета). Если самолет движется со скоростью 270 м/с, то чему равны а) результирующая сила тяги двигателя; б) развиваемая двигателем мощность (в лошадиных силах)?

***75.** (II) На ракете, находящейся на высоте 6400 км от Земли и удаляющейся от нее со скоростью 1850 м/с, запускаются двигатели, которые выбрасывают газы со скоростью 1200 м/с (относительно ракеты). Каков должен быть расход газов (в килограммах в секунду), если масса ракеты к этому моменту достигла значения 25 000 кг, чтобы получить ускорение 1,7 м/с^2?

***76.** (II) Ракету массой 2500 кг необходимо разогнать при старте с ускорением 3,0g. С какой скоростью следует выбрасывать газы, если их расход составляет 30 кг/с?

77. (II) Сани, наполненные песком, скользят без трения под уклон 30°. Песок высыпается из отверстия со скоростью 2,0 кг/с. Если движение начинается из состояния покоя с полной массой 40,0 кг, то какое время понадобится на то, чтобы сани прошли расстояние 120 м по наклонной плоскости?