9 Вращательное движение тела вокруг оси

До сих пор мы рассматривали поступательное движение отдельных частиц или систем частиц. В этой и последующих главах мы перейдем к рассмотрению вращательного движения. Хотя объектом изучения будут и системы, состоящие из конечного числа частиц, в основном мы будем говорить о движении твердых тел. Под *твердым телом* мы понимаем тело, имеющее определенную форму, которая сохраняется неизменной, т. е. составляющие тело частицы остаются в неизменном положении относительно друг друга (сохраняют постоянное относительное расположение). В действительности любое тело под действием внешних сил способно испытать деформации или начать колебаться, но обычно эти эффекты очень малы, и понятие идеально твердого тела широко используется как хорошее приближение во многих случаях.

Движение твердого тела (как это упоминалось ранее и будет доказано в гл. 10) можно рассматривать как сумму поступательного движения его ЦМ и вращательного движения относительно оси, проходящей через его ЦМ. Поступательное движение уже было детально рассмотрено нами, так что в данной главе мы сосредоточим внимание на чисто вращательном движении. *Чисто вращательное движение* – это такое движение тела, при котором все его точки движутся по окружностям (как, например, точка P вращающегося колеса на рис. 9.1, *а*), причем все центры окружностей лежат на одной линии,

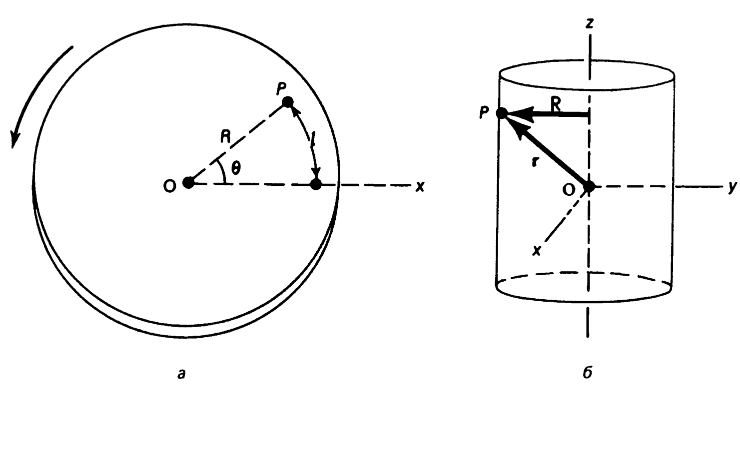


Рис. 9.1. *а* – вид сверху на колесо, вращающееся против часовой стрелки относительно оси (перпендикулярной плоскости рисунка), проходящей через центр колеса O. *б* – различие между векторами **r** и **R** для точки P, лежащей на боковой поверхности цилиндра, вращающегося вокруг оси z.

называемой **осью вращения**. Будем считать, что в инерциальной системе отсчета ось вращения неподвижна и что она не обязательно должна проходить через ЦМ тела.

9.1. Угловые переменные

Мы собираемся рассматривать трехмерное твердое тело, вращающееся относительно закрепленной оси. При этом удобно использовать величину R, которая представляет собой расстояние *по перпендикуляру от оси вращения до рассматриваемой точки или частицы*. Мы ввели это новое обозначение, чтобы отличить R от r, поскольку через r будем по-прежнему обозначать величину радиуса-вектора частицы относительно начала некоторой системы координат[1]. Разница между этими величинами показана на рис. 9.1, *б*. В частном случае, когда мы имеем дело с плоским, очень тонким телом, таким, как диск, если начало системы координат находится в плоскости тела на оси вращения (в центре диска для рассматриваемого примера), величина R будет совпадать с r.

Каждая частица тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, движется по окружности радиусом R, центр которой лежит на оси вращения. Линия, проведенная перпендикулярно оси вращения к любой точке тела, за одинаковые промежутки времени поворачивается на один и тот же угол θ. Чтобы определить положение тела или угол, на который оно повернется, угол θ для каждой такой линии будем отсчитывать от некоторой опорной линии, например от оси x (рис. 9.1, *а*). Частица, принадлежащая телу (например, P на рис. 9.1, *а*), перемещается на угол θ и проходит при этом расстояние l, измеряемое вдоль ее траектории, которая представляет собой окружность. Углы принято измерять в градусах, но математические выражения, описывающие вращательное движение, выглядят проще, если измерять углы в *радианах*. Один *радиан* (рад) определяется как угол, стягиваемый дугой, длина которой равна радиусу окружности. (Например, на рис. 9.1, *а* частица P находится на расстоянии R от оси вращения и проходит расстояние l вдоль дуги окружности; если $l = R$, то угол θ точно равен 1 рад.) В общем случае любой угол θ (в радианах) определяется выражением

$$\theta = l/R, \tag{9.1}$$

где R – радиус окружности, а l – длина дуги, стягиваемой углом θ. Радианы можно связать с градусами следующим

[1] В некоторых книгах вместо R используется буква ρ. Мы используем ρ для обозначения плотности (массы единицы объема). Поэтому, чтобы избежать путаницы, будем обозначать расстояние от точки до оси вращения буквой R.

образом. Полная окружность соответствует углу 360°, что, разумеется, должно соответствовать дуге, длина которой равна длине окружности $l = 2\pi R$. Тогда угол, соответствующий полной окружности, равен $\theta = l/R = 2\pi R / R = 2\pi$ рад; отсюда находим, что

$$360° = 2\pi \text{ рад}.$$

Следовательно, один радиан равен $360°/2\pi = 360°/6{,}28 = 57{,}3°$.

Пример 9.1. Зрение некоторых птиц устроено так, что они могут различать предметы, которые разнесены на минимальный угол $3 \cdot 10^{-4}$ рад (запишите этот угол в градусах). Какой наименьший по величине предмет птица может разглядеть на Земле, пролетая на высоте 100 м?

Решение. Из формулы (9.1) следует, что $l = R\theta$. Строго говоря, l – это длина дуги, но для малых углов длина хорды, стягивающей дугу, приближенно совпадает с длиной дуги[1]. Так как $R = 100$ м и $\theta = 3 \cdot 10^{-4}$ рад, находим l:

$$l = (100 \text{ м})(3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}) = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

Если бы угол был задан в градусах, необходимо было бы сначала перевести его в радианы, а затем провести аналогичный расчет.

Следует заметить, что в этом примере мы воспользовались тем, что радиан является безразмерным, поскольку он представляет собой отношение двух длин.

Угловая скорость определяется по аналогии с линейной скоростью, но вместо линейного перемещения используется угловое. Пусть углы θ_1 и θ_2 – это угловые положения тела в моменты времени соответственно t_1 и t_2. Тогда величина **средней угловой скорости** (обозначается греческой буквой ω (омега)) определяется как

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

где $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ – угловое перемещение тела за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$. Определим величину **мгновенной угловой скорости** как предел этого отношения при $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{9.2}$$

Угловая скорость измеряется, как правило, в радианах в секунду (рад/с). Заметим, что все точки тела вращаются с одной и той же угловой скоростью. Это следует из того факта, что все точки за одинаковые промежутки времени поворачиваются на один и тот же угол.

Угловое ускорение по аналогии с линейным ускорением определяется как отношение изменения угловой

[1] Даже для таких углов, как 15°, ошибка в этом приближении составляет лишь 1%; но для больших по сравнению с этим углов ошибка быстро возрастает.

скорости к промежутку времени, за которое это изменение произошло. Пусть ω_1 и ω_2 – величины мгновенной угловой скорости в моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Тогда величина **среднего углового ускорения**, обозначаемого греческой буквой α (альфа), определяется как

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Определим величину **мгновенного углового ускорения** как предел этого отношения при $\Delta t \to 0$:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (9.3)$$

Поскольку угловая скорость ω одинакова для всех точек вращающегося тела, из выражения (9.3) следует, что угловые ускорения α всех точек тела также одинаковы. Если угловая скорость ω измеряется в радианах в секунду, а время t – в секундах, то угловое ускорение измеряется в радианах в секунду в квадрате (рад/с^2).

Каждая частица или точка вращающегося твердого тела в любой момент времени имеет линейную скорость v и линейное ускорение a. Для любой частицы линейные величины v и a можно связать с угловыми величинами ω и α вращающегося тела как целого. Рассмотрим частицу, расположенную на расстоянии R от оси вращения. Если тело вращается с угловой скоростью ω, то линейная скорость любой частицы тела будет направлена по касательной к описываемой ею круговой траектории. Величину линейной скорости v можно вычислить по формуле (9.1). Для этого запишем формулу в виде $l = R\theta$ и продифференцируем ее по времени, учитывая тот факт, что линейная скорость равна $v = dl/dt$. Таким образом, мы имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = R\frac{d\theta}{dt},$$

$$v = R\omega; \qquad (9.4)$$

здесь мы воспользовались тем, что для любой рассматриваемой частицы радиус равен $R = \mathrm{const}$, поскольку каждая частица тела вращается по окружности постоянного радиуса. Таким образом, хотя угловые скорости ω всех точек вращающегося тела в любой момент времени одинаковы, линейная скорость v больше у тех точек, которые отстоят дальше от оси вращения.

Угловое ускорение α связано с касательным (тангенциальным) линейным ускорением $a_{\text{т}}$ частицы следующим образом:

$$a_{\text{т}} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt},$$

$$a_{\text{т}} = R\alpha. \qquad (9.5)$$

Здесь мы воспользовались формулой (9.4). В выражении (9.5) R – радиус окружности, по которой вращается частица, а индекс Т в обозначении a_T указывает на то, что ускорение «тангенциальное», так как рассматриваемое здесь ускорение направлено по касательной к окружности. Полное линейное ускорение частицы записывается в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_c,$$

где $\mathbf{a}_c$ – радиальная составляющая линейного ускорения, т. е. «центростремительное» ускорение, направленное к центру окружности, по которой вращается частица. В гл. 3 было показано, что $a_c = v^2/R$; переписывая эту формулу с помощью (9.4) через угловую скорость ω, получаем

$$a_c = v^2/R = \omega^2 R. \qquad (9.6)$$

Выражения (9.4)–(9.6) связывают угловые величины, описывающие вращение тела, с линейными величинами, описывающими движение каждой частицы тела.

Иногда полезно выразить угловую скорость через частоту вращения f. Под частотой мы будем понимать число полных оборотов (об), сделанных в секунду. Один оборот (например, колеса) соответствует углу 2π радиан, и, таким образом, 1 об/с = 2π рад/с; следовательно, в общем случае частота f дается формулой

$$f = \omega/2\pi$$

или

$$\omega = 2\pi f.$$

Пример 9.2. Чему равна линейная скорость точки на краю вращающейся с постоянной частотой 33 об/мин грампластинки, если ее диаметр равен 30 см?

Решение. Найдем сначала угловую скорость пластинки, выразив ее в радианах в секунду: частота вращения f = 33 об/мин = (33 об)/(60 с) = 0,55 об/с; следовательно, $\omega = 2\pi f$ = 3,5 рад/с. Поскольку радиус R пластинки равен 0,15 м, скорость v на краю пластинки равна

$$v = R\omega = (0{,}15\ \text{м})(3{,}5\ \text{рад/с}) = 0{,}52\ \text{м/с}.$$

Пример 9.3. Каково ускорение пылинки на краю диска в примере 9.2?

Решение. Из примера 9.2 ω = 3,5 рад/с и v = 0,52 м/с. Поскольку ω = const, $\alpha = 0$, так что $a_T = 0$. Из (9.6) имеем $a_c = \omega^2 R$ = = (3,5 рад/с)^2 (0,15 м) = 1,8 м/с^2; или a_c = = v^2/R = (0,52 м/с)^2/(0,15 м) = 1,8 м/с^2, т. е мы получили то же значение.

Пример 9.4. Ротор центрифуги, находившейся в покое и завращавшейся затем с ускорением, через 5,0 мин достигает частоты вращения 20 000 об/мин. Чему равно среднее угловое ускорение ротора?

Решение.

$$\omega = (20\,000\ \text{об/мин})\left(\frac{2\pi\ \text{рад/об}}{60\ \text{с/мин}}\right) = 2100\ \text{рад/с}.$$

Это конечная угловая скорость, а поскольку начальная угловая скорость равна нулю, среднее угловое ускорение будет равно

$$\bar{\alpha} = \frac{2100\ \text{рад/с} - 0}{300\ \text{с}} = 7{,}0\ \text{рад/с}^2.$$

9.2. Кинематические уравнения для вращательного движения с постоянным угловым ускорением

В гл. 2 мы привели важные уравнения (2.9), которые связывают между собой ускорение, скорость и перемещение в случае движения с постоянным линейным ускорением. Эти уравнения были получены из определений линейной скорости и линейного ускорения в предположении, что ускорение постоянно. Определения угловой скорости и углового ускорения аналогичны определениям линейной скорости и линейного ускорения, необходимо только заменить перемещение x на угол θ, линейную скорость v на угловую скорость ω, а линейное ускорение a на угловое ускорение α. Таким образом, уравнения для угловых переменных при постоянном угловом ускорении будут аналогичны уравнениям (2.9), если заменить x на θ, v на ω и a на α, и их можно вывести таким же способом, как уравнения (2.9). Выпишем эти уравнения вместе с их линейными аналогами:

Угловые	**Линейные**		
$\omega = \omega_0 + \alpha t,$	$v = v_0 + at$	[постоянные α, a],	(9.7а)
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	[постоянные α, a],	(9.7б)
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta,$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	[постоянные α, a].	(9.7в)

Заметим, что для простоты мы выбрали начальные условия таким образом, что $\theta_0 = 0$ (также $x_0 = 0$). В этих уравнениях ω_0 – угловая скорость в момент времени $t = 0$, а θ и ω – соответственно угловое перемещение и угловая скорость в момент времени t. Поскольку угловое ускорение постоянно, то $\alpha = \bar{\alpha}$. Эти уравнения справедливы также в случае движения с постоянной угловой скоростью; при этом $\alpha = 0$, и мы имеем $\omega = \omega_0$, $\theta = \omega_0 t$ и $\bar{\omega} = \omega$.

Пример 9.5. Сколько оборотов совершит ротор центрифуги из примера 9.4 за время своего ускорения? Считайте, что ротор вращается с постоянным угловым ускорением.

Решение. Из примера 9.4 известно, что $\omega_0 = 0$, $\omega = 2100$ рад/с, $\alpha = \bar{\alpha} = 7{,}0$ рад/с^2 и $t = 300$ с. Воспользуемся уравнением (9.7б) или (9.7в); первое из них дает

$$\theta = 0 + \frac{1}{2}(7{,}0\ \text{рад/с}^2)(300\ \text{с})^2 = 3{,}2\cdot 10^5\ \text{рад}.$$

Чтобы найти полное число оборотов, разделим угол θ на 2π и получим $5{,}0\cdot 10^4$ оборотов. (Чтобы не ошибиться в том, делить или умножать на 2π, полезно помнить, что радианов всегда больше, чем оборотов, так как 2π рад = 1 об).

Пример 9.6. Требуется получить уравнения (9.7а) и (9.7б) с помощью математических выкладок.

Решение. Поскольку $\alpha = d\omega/dt$, причем $\alpha = \text{const}$, мы можем написать

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha\, dt,$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

или $\omega = \omega_0 + \alpha t$, что совпадает с уравнением (9.7а). Используя затем определение угловой скорости: $\omega = d\theta/dt$, которое можно переписать в виде $d\theta = \omega\, dt = (\omega_0 + \alpha t)\, dt$, после интегрирования получаем

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\, dt, \qquad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

Последнее уравнение есть не что иное, как уравнение (9.7б).

9.3. Векторные свойства угловых величин

Такие линейные величины, как перемещение, скорость и ускорение, являются векторами. В этом разделе мы покажем, что угловая скорость и угловое ускорение тоже должны рассматриваться как векторы; угловое же перемещение θ не является вектором.

Сначала убедимся в том, что угловое перемещение не может быть вектором. Одним из свойств векторов является то, что сложение любых двух векторов дает один и тот же результат независимо от того, в каком порядке их складывают. Иными словами, если мы имеем два вектора $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, то

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1.$$

[Это коммутативный закон сложения; см. формулу (3.1а)]. Предположим теперь, что мы поворачиваем книгу на угол $\theta_1 = 90°$ вокруг оси x, а затем поворачиваем ее на угол $\theta_2 = 90°$ вокруг оси y (рис. 9.2, *а*). Если вместо этого вначале повернуть книгу на угол $\theta_2 = 90°$ вокруг оси y, а потом на угол $\theta_1 = 90°$ вокруг оси x (рис. 9.2, *б*), то для обоих случаев мы *не* получим один и тот же результат!

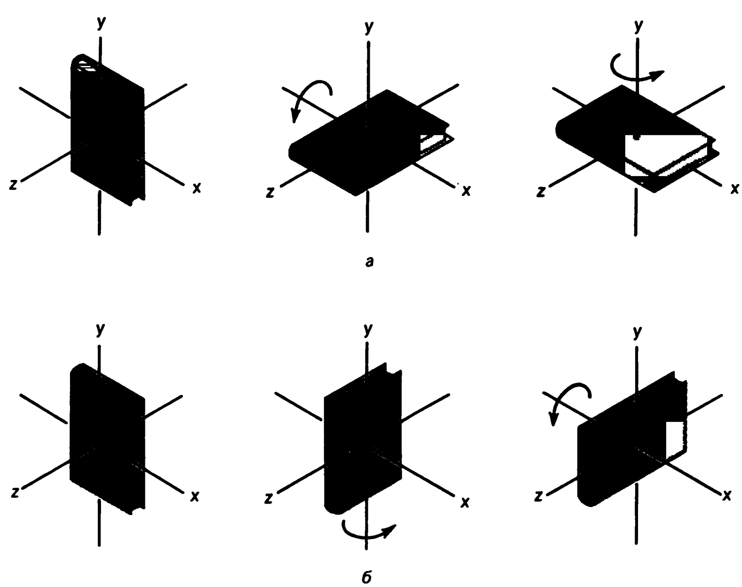


Рис. 9.2. Книга поворачивается на 90° против часовой стрелки: *а* – вокруг оси x и затем вокруг оси y; *б* – вокруг оси y и затем вокруг оси x.

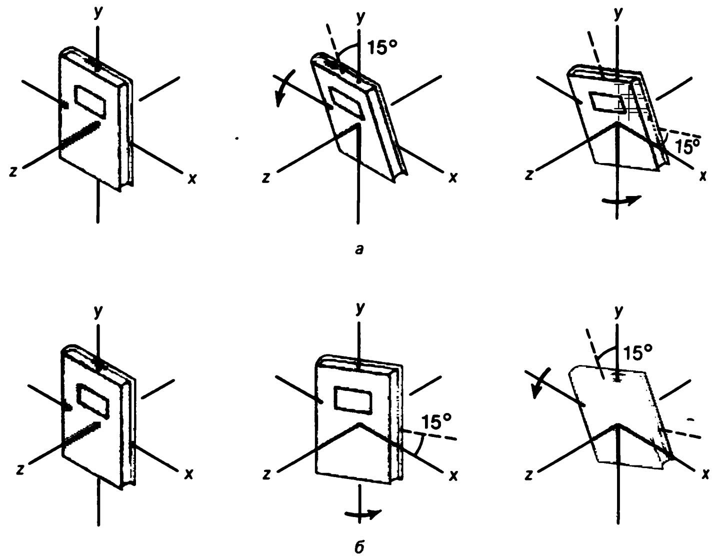


Рис. 9.3. Книга поворачивается на угол 15° против часовой стрелки: *а* – вокруг оси x и затем вокруг оси y; *б* – вокруг оси y и затем вокруг оси x.

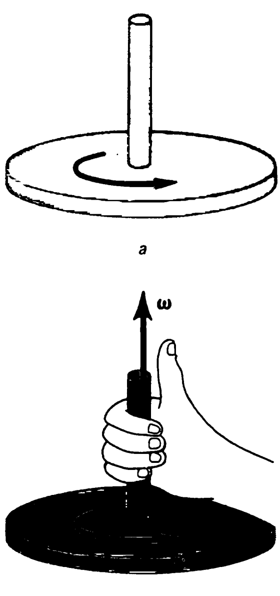


Рис. 9.4. *а* – вращающийся диск; *б* – правило правой руки для определения направления угловой скорости ω.

Иными словами, $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 \neq \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$. Следовательно, θ не может быть вектором.

Рассмотрим теперь поворот на угол $\theta_1 = 15°$ вокруг оси x и на угол $\theta_2 = 15°$ вокруг оси y. В этом случае приближенно (но не точно) $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ равняется $\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$ (рис. 9.3). Однако в пределе бесконечно малых углов поворота равенство $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$ является точным. Мы получим один и тот же результат при сложении двух бесконечно малых поворотов независимо от очередности, в которой они производятся. Следовательно, бесконечно малые углы поворота $d\theta$ представляют собой векторы, в то время как конечные углы поворота таковыми не являются.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ должна быть также вектором, поскольку произведение вектора $d\boldsymbol{\theta}$ на скаляр $1/dt$ есть вектор:

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta}/dt.$$

Аналогично, поскольку $\boldsymbol{\omega}$ – вектор, угловое ускорение тоже является вектором:

$$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt.$$

Мы показали, что $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ – векторы. Но как направлены эти векторы? Рассмотрим вращающийся диск, показанный на рис. 9.4, *а*. Линейные скорости различных частиц диска направлены по-разному. Единственным направлением в пространстве, связанным с вращательным движением, является направление вдоль оси вращения, перпендикулярное реальному движению. Выберем поэтому ось вращения за направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. На самом деле такое определение направления $\boldsymbol{\omega}$ все еще неоднозначно, поскольку **ω** может иметь два направления вдоль оси вращения (вверх или вниз на рис. 9.4, *а*). Поэтому мы воспользуемся соглашением, называемым *правилом правой руки*, которое заключается в следующем: если пальцы правой руки охватывают ось вращения в направлении вращения, то отогнутый большой палец укажет направление вектора **ω**. Это иллюстрирует рис. 9.4, *б*. Следует отметить, что направление вектора **ω** совпадает с направлением поступательного движения правого винта, когда он поворачивается в направлении вращения. Таким образом, если диск на рис. 9.4, *б* вращается против часовой стрелки, то вектор **ω** направлен вверх, как показано на рис. 9.4, *б*; если же диск вращается по часовой стрелке, то вектор направлен в противоположную сторону, т.е. вниз[1]. Следует заметить, что никакая часть вращающегося тела не движется в направлении вектора угловой скорости **ω**.

Если ось вращения тела неподвижна, то угловая скорость **ω** может изменяться только по величине. Следовательно, вектор углового ускорения $\alpha = d\omega/dt$ тоже должен быть направлен вдоль оси вращения. Если вращение происходит против часовой стрелки, как на рис. 9.4, *а*, и модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ возрастает, то вектор **α** направлен вверх; если же модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ убывает (диск тормозится), то вектор **α** направлен вниз. В случае когда вращение происходит по часовой стрелке, вектор углового ускорения **α** будет направлен вниз, если модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ возрастает, и вверх – если $|\boldsymbol{\omega}|$ убывает.

Таким образом, вектор угловой скорости **ω** всегда

---

[1] Строго говоря, **ω** и **α** не являются векторами. Проблема состоит в том, что при отражении они не ведут себя как обычные векторы. Предположим, что мы смотрим прямо в зеркало на частицу, движущуюся со скоростью **v** вправо перед зеркалом параллельно его поверхности. В зеркальном отражении скорость также будет направлена вправо. Таким образом, истинный вектор, такой, как вектор скорости, помещенный параллельно поверхности зеркала, имеет то же направление, что и его отражение. Рассмотрим теперь диск, вращающийся перед зеркалом таким образом, что вектор угловой скорости **ω** направлен вправо. (Мы смотрим на край диска.) В зеркале мы увидим, что диск вращается в противоположную сторону; таким образом, отраженный вектор угловой скорости **ω** направлен в противоположную сторону (влево). Из-за такого отличия при отражении вектора **ω** от истинных векторов вектор **ω** называют *псевдовектором*, – или *аксиальным вектором*. Угловое ускорение **α** также является псевдовектором, как и все векторные произведения истинных векторов (разд. 10.1). В классической физике отличие истинных векторов от псевдовекторов не играет роли, и в этой книге мы не будем делать различия между ними. Разница между ними существенна при изучении некоторых аспектов физики субатомных частиц.

направлен вдоль оси вращения. Если ось вращения изменяет свое направление, изменяет направление и вектор **ω**. В этом случае вектор углового ускорения уже не направлен вдоль оси вращения. Такие примеры мы рассмотрим в гл. 10, в данной же главе мы будем рассматривать вращение тела только относительно неподвижной оси, когда оба вектора **ω** и **α** направлены вдоль оси вращения.

9.4. Момент силы

До сих пор в этой главе мы обсуждали кинематику вращательного движения, т. е. описание вращательного движения с помощью понятий углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения. Рассмотрим теперь динамику, т. е. то, что приводит к вращательному движению. Точно так же, как существует аналогия между уравнениями кинематики поступательного и вращательного движений, имеются вращательные эквиваленты и для динамики. Например, первый закон Ньютона для вращательного движения гласит, что свободно вращающееся тело будет сохранять состояние вращения с постоянной угловой скоростью до тех пор, пока на него не действуют какие-либо внешние силы (или, как мы скоро увидим, моменты сил), стремящиеся изменить это движение. Более трудным оказался вопрос об установлении вращательного эквивалента второго закона Ньютона, т. е. вопрос о том, что же приводит к угловому ускорению. Ясно, что для того, чтобы тело начало вращаться относительно оси, необходимо наличие силы. Но каким при этом будет направление силы, а также где приложена эта сила? Рассмотрим пример с дверью (рис. 9.5). Если вы приложите силу $\mathbf{F}_1$ к двери так, как показано на рисунке, то увидите, что, чем больше сила $\mathbf{F}_1$, тем быстрее дверь откроется. Но если теперь вы приложите силу $\mathbf{F}_2$ той же величины, что и $\mathbf{F}_1$, в точке, расположенной ближе к

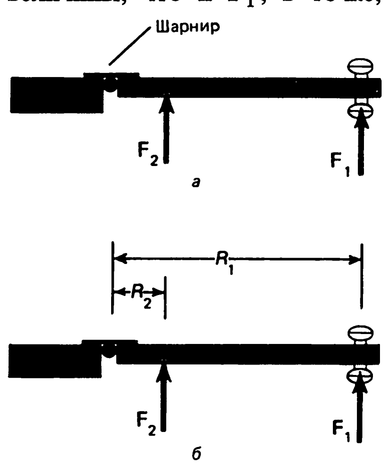


Рис. 9.5. Одинаковые силы, действующие на тело, с разными плечами R относительно оси вращения.

косяку с петлями (рис. 9.5), то обнаружите, что дверь уже не так быстро откроется: эффект от приложения силы стал меньше.

Таким образом, угловое ускорение двери пропорционально не только величине силы. Если в данном случае ограничиться рассмотрением только этой силы (пренебрегая силой трения в петлях и т. п.), то угловое ускорение пропорционально также расстоянию по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила. Таким образом, если расстояние R_1 на рис. 9.5, *б* в три раза больше расстояния R_2, то угловое ускорение двери при действии силы $\mathbf{F}_1$ будет в три раза больше (разумеется, если величины сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ одинаковы). Иными словами, если $R_1 = 3R_2$, то сила F_2 должна быть в три раза больше силы F_1, чтобы сообщить двери такое же угловое ускорение. Расстояния R_1 и R_2 называются *плечами* соответствующих сил. Таким образом, угловое ускорение пропорционально произведению величины силы на ее плечо. Это произведение называется *моментом силы* относительно оси (или **вращающим моментом**) и обозначается греческой буквой τ (тау). Установлено, что угловое ускорение α прямо пропорционально моменту силы τ:

$$\alpha \sim \tau.$$

Таким образом, мы видим, что момент силы приводит к угловому ускорению. Это и есть вращательный аналог второго закона Ньютона: $a \sim F$. (В разд. 9.5 мы увидим, какой коэффициент здесь необходимо ввести, чтобы от знака пропорциональности перейти к знаку равенства.)

Мы определяем *плечо силы* как *длину перпендикуляра*, опущенного от оси вращения на линию действия силы (воображаемую линию, проведенную вдоль направления действия силы); сделали это мы для того, чтобы рассмотреть действие силы, приложенной под углом. Ясно, что сила, приложенная под углом, такая, как $\mathbf{F}_3$ на рис. 9.6, приведет к меньшему действию, чем сила той же величины, приложенная под прямым углом, такая, как $\mathbf{F}_1$ на рис. 9.6, *а*. Если же вы будете нажимать на край двери так, что сила будет действовать в направлении к петлям (т. е. к оси вращения), например как сила $\mathbf{F}_4$ на рис. 9.6, то дверь вообще не будет двигаться.

Плечо силы, такой, как $\mathbf{F}_3$, можно найти, если провести линию вдоль направления $\mathbf{F}_3$ (это «линия действия»

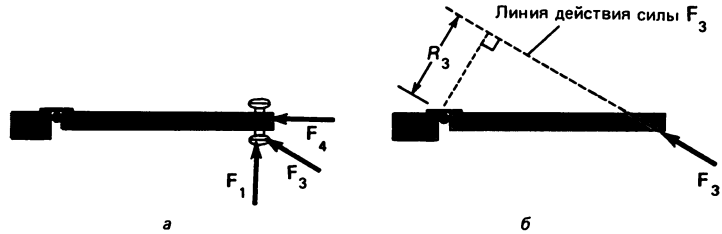


Рис. 9.6. *а*–силы, действующие под различными углами; *б*–плечо силы определяется как расстояние по перпендикуляру от оси вращения до линии действия силы.

силы $\mathbf{F}_3$) и опустить на нее перпендикуляр из точки, лежащей на оси вращения (он также будет перпендикулярен оси вращения). Длина этого перпендикуляра равна длине плеча силы $\mathbf{F}_3$ и обозначается R_3 на рис. 9.6, *б*.

Таким образом, момент силы $\mathbf{F}_3$ равен произведению[1] $R_3 F_3$. Небольшая длина плеча силы и соответственно меньшее значение момента силы $\mathbf{F}_3$ согласуются с тем, что наблюдается в действительности: с помощью силы $\mathbf{F}_3$ дверь открыть труднее, чем с помощью силы $\mathbf{F}_1$. При таком определении плеча силы из эксперимента следует, что соотношение $\alpha \sim \tau$ справедливо в общем случае. Из рис. 9.6, *а* мы видим, что линия действия силы $\mathbf{F}_4$ проходит через петли двери, и, следовательно, ее плечо равно нулю. Таким образом, сила $\mathbf{F}_4$ создает нулевой момент силы, который не приводит к возникновению углового ускорения, что согласуется с нашим повседневным опытом.

В общем случае момент силы относительно данной оси мы должны записать как

$$\tau = R_\perp F, \tag{9.8a}$$

где $R_\perp$ – плечо силы, а знак перпендикулярности ($\perp$) в индексе напоминает нам, что это плечо рассматривается как расстояние от оси вращения до линии действия силы (рис. 9.7, *а*), измеряемое вдоль перпендикуляра к линии действия силы. Другой эквивалентный способ определения момента силы состоит в разложении силы на составляющие, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна линии, соединяющей точку приложения силы с

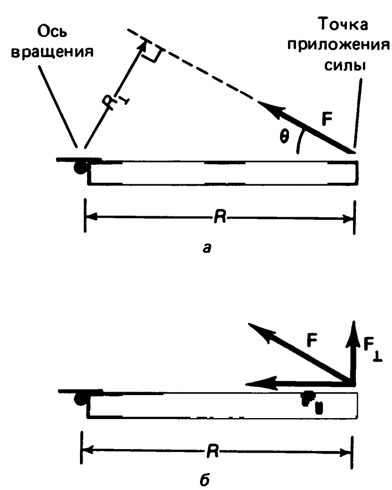


Рис. 9.7. Момент силы $R_\perp F = RF_\perp$.

[1] По существу, на протяжении всей гл. 9 речь идет о величинах векторов момента силы и момента импульса.– *Прим. ред.*

осью вращения (рис. 9.7, *б*). При этом момент силы равен произведению составляющей $F_\perp$ на расстояние R от оси вращения до точки приложения силы:

$$\tau = RF_\perp. \tag{9.8б}$$

То, что это приводит к такому же результату, как и (9.8а), становится ясным, если написать $F_\perp = F\sin\theta$ и $R_\perp = R\sin\theta$. Таким образом,

$$\tau = RF\sin\theta. \tag{9.8в}$$

Для расчета момента силы можно использовать любую из формул (9.8) в зависимости от того, какая из них проще для данной задачи.

Поскольку момент силы равен произведению силы на расстояние, единицей его измерения является ньютон-метр (Н·м) в системе СИ[1)] и дин·см в СГС.

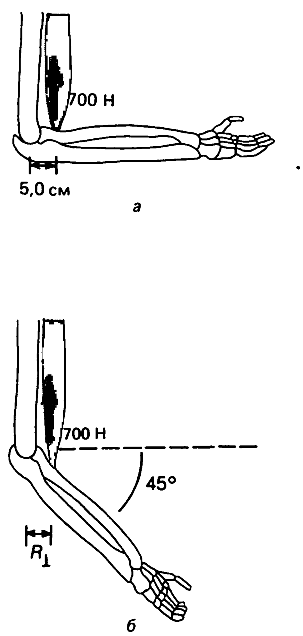


Рис. 9.8. Пример 9.7.

Пример 9.7. Какие моменты силы создает бицепс, действующий на нижнюю часть руки а) на рис. 9.8, *а* и б) на рис. 9.8, *б*? Ось вращения проходит через локтевой сустав, а мышца прикреплена на расстоянии 5,0 см от него.

Решение. а) $F = 700$ Н, $R_\perp = 0{,}050$ м; следовательно, $\tau = (0{,}050\ \text{м})(700\ \text{Н}) = 35\ \text{Н}\cdot\text{м}$.

б) $F = 700$ Н, $R_\perp = (0{,}050\ \text{м})(\sin 45°)$; следовательно, $\tau = (0{,}050\ \text{м})\,(0{,}71) \times (700\ \text{Н}) = 25\ \text{Н}\cdot\text{м}$.

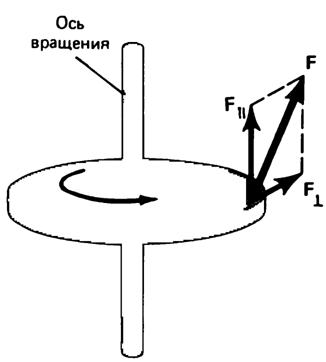


Рис. 9.9. Только составляющая $\mathbf{F}_\perp$ силы $\mathbf{F}$ в плоскости, перпендикулярной оси вращения, вызывает вращение колеса вокруг оси. Составляющая $\mathbf{F}_\parallel$, параллельная оси вращения, должна была бы перемещать саму ось вращения, которую мы считаем неподвижной.

В настоящей главе мы изучаем вращение относительно неподвижной оси; поэтому мы имеем дело лишь с силами, действующими в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Если же возникнет сила (или составляющая силы), действующая параллельно оси вращения, то она будет поворачивать ось вращения (например, составляющая $\mathbf{F}_\parallel$ на рис. 9.9). Поскольку мы считаем, что ось остается неподвижной и сохраняет свое направление, либо таких сил не должно быть вовсе, либо ось должна быть закреплена на опорах (или петлях), создающих компенсирующий момент силы, чтобы ось оставалась неподвижной. Таким образом, только сила или составляющая силы ($\mathbf{F}_\perp$ на рис. 9.9), лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, приводят к вращению относительно оси, и в данной главе мы будем рассматривать только эти силы.

[1)] Заметим, что единица измерения момента силы (Н·м в системе СИ) аналогична единице измерения энергии. Но эти величины сильно отличаются друг от друга. Очевидное различие состоит в том, что энергия является скалярной величиной, а момент силы, как мы увидим,– векторной. Специальная единица *джоуль* (1 Дж = 1 Н·м) используется только для измерения энергии (и работы), а не момента силы.

9.5. Динамика вращательного движения: момент силы и момент инерции

Угловое ускорение α вращающегося тела, как мы показали выше, пропорционально моменту силы τ, приложенного к телу:

$$\alpha \sim \tau.$$

Это соответствует второму закону Ньютона ($a \sim F$) для поступательного движения, причем момент силы соответствует силе, а угловое ускорение α – линейному ускорению a. В случае поступательного движения ускорение не только пропорционально равнодействующей приложенных к телу сил, но и обратно пропорционально мере инертности тела, которую мы называем массой m; таким образом, мы могли бы написать $a = F/m$. Но что играет роль массы в случае вращательного движения? Именно это нам предстоит определить. Одновременно мы увидим, что соотношение $\alpha \sim \tau$ является прямым следствием второго закона Ньютона: $F = ma$.

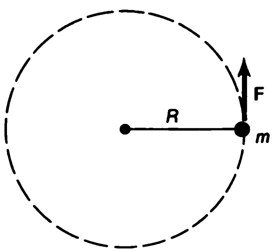


Рис. 9.10. Тело массой m, вращающееся по окружности радиусом R относительно неподвижной точки.

Рассмотрим вначале очень простой случай: частица массой m вращается по окружности радиусом R на конце нити или стержня, массой которых можно пренебречь (рис. 9.10). Момент силы, который приводит к угловому ускорению частицы, равен $\tau = RF$. Используя второй закон Ньютона ($F = ma$) для линейных величин и формулу (9.5), связывающую угловое ускорение с тангенциальным линейным ускорением ($a_\tau = R\alpha$), получаем

$$F = ma = mR\alpha.$$

Умножив обе части этого выражения на R, получим

$$\tau = RF = mR^2\alpha \quad [\text{одиночная частица}]. \tag{9.9}$$

Это есть не что иное, как соотношение, связывающее непосредственно угловое ускорение с приложенным моментом силы τ. Величина mR^2 является *мерой инертности* частицы во вращательном движении и называется *моментом инерции*.

Рассмотрим вращающееся твердое тело, например цилиндр, который мы можем представить как совокупность множества частиц, расположенных на разных расстояниях от оси вращения. Для каждой частицы тела мы можем воспользоваться выражением (9.9) и затем просуммировать его по всем частицам. Сумма моментов сил равна полному моменту, который мы можем обозначить τ. Таким образом, мы имеем следующее выражение:

$$\tau = \left(\sum m_i R_i^2\right)\alpha \qquad [\text{ось неподвижна}], \tag{9.10}$$

где угловое ускорение вынесено за знак суммы, поскольку оно одинаково для всех частиц тела. Результирующий момент сил τ представляет собой сумму всех моментов внутренних сил, с которыми каждая частица действует на другие, и моментов внешних сил; но из третьего закона Ньютона следует, что сумма моментов внутренних сил равна нулю[1]. Следовательно, полный момент сил τ представляет собой сумму *моментов внешних сил.*

Сумма $\sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots + m_n R_n^2$ в выражении (9.10) равна сумме произведений массы каждой частицы тела на расстояние от частицы до оси вращения. Эта величина называется **моментом инерции** тела I:

$$I = \sum m_i R_i^2 . \tag{9.11}$$

Объединяя выражения (9.10) и (9.11), мы имеем

$$\tau = I\alpha \quad [\text{неподвижная ось}]. \tag{9.12}$$

Это вращательный эквивалент второго закона Ньютона. Формула (9.12) справедлива для случая, когда рассматривается вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси[2]. Можно показать (гл. 10), что эта формула применима также и тогда, когда тело движется поступательно с ускорением, но только если момент инерции I и угловое ускорение α вычисляются относительно ЦМ тела, а ось вращения, проходящая через ЦМ, не меняет своего направления. Таким образом,

$$\tau_{\text{ЦМ}} = I_{\text{ЦМ}}\alpha_{\text{ЦМ}} \quad [\text{фиксированное направление оси}]. \tag{9.13}$$

Отсюда следует, что момент инерции I, который является мерой инертности тела при его вращении, играет ту же роль, что и масса при поступательном движении. Согласно выражению (9.11), момент инерции зависит не только от массы тела, но и от того, как эта масса распределена. Например, цилиндр большого диаметра будет иметь больший момент инерции, чем цилиндр той же массы, но меньшего диаметра (поэтому такой цилиндр длиннее) (рис. 9.11). Первый цилиндр труднее привести в состояние вращения и остановить. Чем дальше от оси вращения сконцентрирована масса тела, тем больше его

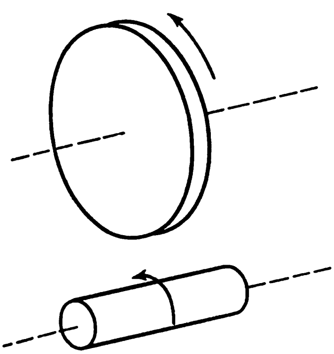


Рис. 9.11. Момент инерции цилиндра большого диаметра больше, чем цилиндра такой же массы, но меньшего диаметра.

[1] Это является следствием так называемой «строгой» формулировки третьего закона Ньютона, в которой утверждается не только то, что сила, с которой одна частица действует на вторую, равна и противоположна по направлению силе, с которой вторая частица действует на первую, но и то, что обе силы действуют вдоль одной прямой. Строгая формулировка третьего закона Ньютона выполняется для большинства сил, но не справедлива для некоторых элаектромагнитных сил. Тем не менее даже в последнем случае можно показать, что сумма моментов внутренних сил равна нулю.

[2] То есть ось вращения неподвижна относительно тела и неподвижна в некоторой инерциальной системе отсчета. Такое рассмотрение включает в себя случай, когда ось вращения движется с постоянной скоростью в инерциальной системе отсчета, поскольку можно найти другую инерциальную систему отсчета, в которой ось будет неподвижна, причем эта вторая система отсчета движется относительно первой.

момент инерции. Для вращательного движения массу тела *нельзя* считать сконцентрированной в его центре масс.

В любом случае, когда применяется выражение (9.12), необходимо помнить, что угловое ускорение измеряется в рад/с^2, а другие величины измеряются в соответствующей системе единиц. В системе СИ единицей измерения момента инерции I является кг·м^2.

Пример 9.8. Две частицы массами 5,0 и 7,0 кг закреплены на легком стержне, массой которого можно пренебречь, на расстоянии 4,0 м друг от друга, как показано на рис. 9.12. Вычислите момент инерции системы при ее вращении а) относительно оси, проходящей посередине между телами (рис. 9.12, *а*) и б) относительно оси, расположенной на 0,50 м левее частицы с массой 5 кг (рис. 9.12, *б*).

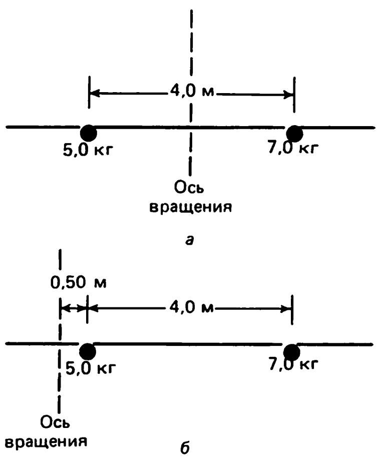


Рис. 9.12. К вычислению момента инерции (пример 9.8).

Решение. а) Обе частицы находятся на одинаковом расстоянии 2,0 м от оси вращения. Следовательно,

$$I = \sum m_i R_i^2 = (5{,}0\ \text{кг})(2{,}0\ \text{м})^2 + $$
$$+ (7{,}0\ \text{кг})(2{,}0\ \text{м})^2 = 48\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

б) Частица массой 5,0 кг отстоит от оси вращения на 0,50 м, а частица массой 7,0 кг – на 4,50 м. Таким образом,

$$I = \sum m_i R_i^2 = (5{,}0\ \text{кг})(0{,}50\ \text{м})^2 + $$
$$+ (7{,}0\ \text{кг})(4{,}5\ \text{м})^2 = 1{,}3\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 + $$
$$+ 142\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 = 143\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Этот пример выявляет две важные особенности. Во-первых, одно и то же тело имеет разные моменты инерции относительно различных осей вращения. Во-вторых, из п. «б» примера следует, что тело, расположенное ближе к оси вращения, дает меньший вклад в полный момент инерции; мы видим, что тело массой 5,0 кг дает в полный момент инерции вклад, не превышающий 1%.

Для большинства тел масса распределена непрерывно, и сумма $\sum m_i R_i^2$ в некоторых случаях может быть вычислена с помощью методов математического анализа (разд. 9.6). При этом можно получить формулы для моментов инерции различных тел правильной формы, выразив их через линейные размеры этих тел. На рис. 9.13 представлены моменты инерции некоторых твердых тел относительно указанных осей. Единственным случаем, когда момент инерции вычисляется совсем просто, является тонкое кольцо радиусом R_0, вращающееся вокруг оси, проходящей через центр кольца. Для этого тела вся масса распределена равномерно по окружности на рас-

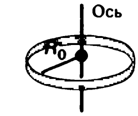
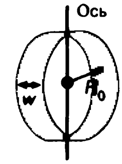
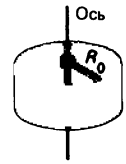
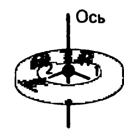
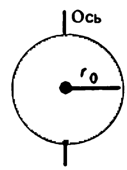
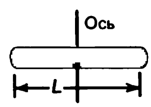
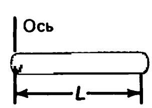
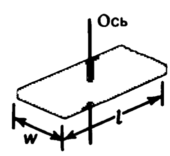
Тело	Положение оси вращения		Момент инерции	Радиус инерции
а) Тонкое кольцо радиусом R_0	Через центр		MR_0^2	R_0
б) Тонкое кольцо радиусом R_0 и шириной w	По диаметру		$\frac{1}{2}MR_0^2+\frac{1}{12}Mw^2$	$\sqrt{\frac{R_0^2}{2}+\frac{w^2}{12}}$
в) Твердый цилиндр радиусом R_0	Через центр		$\frac{1}{2}MR_0^2$	$\frac{R_0}{\sqrt{2}}$
г) Полый цилиндр с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2	Через центр		$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$	$\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}$
д) Твердая сфера радиусом r_0	Через центр		$\frac{2}{5}Mr_0^2$	$\sqrt{\frac{2}{5}}r_0$
е) Тонкий стержень длиной L	Через центр		$\frac{1}{12}ML^2$	$\frac{L}{\sqrt{12}}$
ж) Тонкий стержень длиной L	Через конец		$\frac{1}{3}ML^2$	$\frac{L}{\sqrt{3}}$
з) Тонкая прямоугольная пластинка длиной l и шириной w	Через центр		$\frac{1}{12}M(l^2+w^2)$	$\sqrt{\frac{l^2+w^2}{12}}$

Рис. 9.13. Моменты инерции различных тел однородного состава.

стоянии R_0 от оси вращения. Таким образом, $\sum m_i R_i^2 = (\sum m_i) R_0^2 = MR_0^2$, где M – полная масса кольца.

Моменты инерции тел удобно вычислить, используя *радиус инерции* k, который представляет собой усредненную величину. Радиус инерции тела определяется таким образом, что если бы вся масса тела была сосредоточена на этом расстоянии от оси, то мы имели бы тот же самый момент инерции, что и у исходного тела. Например (рис. 9.13), радиус инерции сплошного цилиндра равен $(1/\sqrt{2})\,R_0 \approx 0{,}71\,R_0$; это означает, что сплошной цилиндр радиусом 10,0 см имеет тот же момент инерции, что и тонкое кольцо такой же массы радиусом 7,1 см. Момент инерции любого тела можно записать через радиус инерции следующим образом:

$$I = Mk^2.$$

Радиус инерции удобно использовать для тел необычной или неправильной формы.

Пример 9.9. К веревке, намотанной вокруг колеса массой $M = 4{,}00$ кг и радиусом $R_0 = 33{,}0$ см приложена сила $T = 15{,}0$ Н. Радиус инерции колеса $k = 30{,}0$ см (рис. 9.14). Если момент сил трения в ступице колеса равен $\tau_{тр} = 1{,}10$ Н·м, то с каким угловым ускорением вращается колесо?

Решение. Вычислим сначала момент инерции колеса I:

$$I = Mk^2 = (4{,}00\ \text{кг})(0{,}300\ \text{м})^2 = 0{,}360\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

На колесо действуют два момента, один из которых обусловлен силой $T = 15{,}0$ Н и равен по величине $(0{,}330\ \text{м})(15{,}0\ \text{Н}) = 4{,}95$ Н·м, и другой противоположно направленный момент силы за счет трения $\tau_{тр} = 1{,}10$ Н·м. Таким образом, используя формулу (9.12), находим

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR_0 - \tau_{тр}}{I} = \frac{(4{,}95\ \text{Н}\cdot\text{м}) - (1{,}10\ \text{Н}\cdot\text{м})}{0{,}360\ \text{кг}\cdot\text{м}^2} = 10{,}7\ \text{рад/с}^2.$$

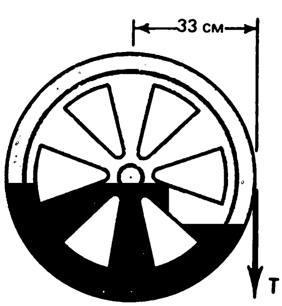


Рис. 9.14. Пример 9.9.

Пример 9.10. Предположим, что на рис. 9.14 к веревке на колесе, вместо того чтобы на нее действовать постоянной силой 15,0 Н, прикреплен груз весом 15,0 Н (массой $m = 1{,}53$ кг). Веревку будем считать невесомой и нерастяжимой. Необходимо найти: а) угловое ускорение колеса α и линейное ускорение груза массой m, а также б) угловую скорость ω колеса и линейную скорость v груза в момент времени $t = 3{,}00$ с, если колесо начинает двигаться из состояния покоя в момент времени $t = 0$.

Решение. а) Обозначим через T силу натяжения веревки. При этом сила T действует на край колеса. Таким образом, мы имеем (см. пример 9.9)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR_0 - \tau_{тр}}{I}.$$

На груз m действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила натяжения веревки T, направленная вверх. Поскольку $F = ma$, мы имеем

$$ma = mg - T.$$

Следует заметить, что сила натяжения T, которая действует на край колеса, в общем случае не равна силе тяжести, действующей на груз ($mg = 15{,}0$ Н); это обусловлено тем, что груз движется с ускорением, а из последнего уравнения получаем $T = mg - ma$. Для вычисления α исключим T из двух уравнений, написанных выше, и воспользуемся соотношением (9.5):

$$a = R_0\,\alpha,$$

которое мы имеем полное право применять, так как тангенциальное ускорение точек, принадлежащих краю (ободу), будет тем же, что и ускорение груза (если, конечно, веревка не растягивается и не проскальзывает). Таким образом, мы имеем следующее уравнение:

$$\alpha = \frac{(mg - mR_0\alpha)R_0 - \tau_{\text{тр}}}{I},$$

решив которое относительно α, получим

$$\alpha = \frac{mgR_0 - \tau_{\text{тр}}}{I + mR_0^2} = \frac{(15{,}0\ \text{Н})(0{,}330\ \text{м}) - 1{,}10\ \text{Н}\cdot\text{м}}{0{,}360\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 + (1{,}53\ \text{кг})(0{,}330\ \text{м})^2} = 7{,}31\ \text{рад/с}^2.$$

Угловое ускорение колеса в этом случае несколько меньше, чем в примере 9.9; объясняется это тем, что сила натяжения T несколько меньше, чем сила тяжести mg, действующая на груз. Линейное ускорение груза равно

$$a = R_0\alpha = (0{,}330\ \text{м})(7{,}31\ \text{рад/с}^2) = 2{,}41\ \text{м/с}^2.$$

б) Поскольку угловое ускорение тела постоянно, для угловой скорости находим

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (7{,}31\ \text{рад/с}^2)(3{,}00\ \text{с}) = 21{,}9\ \text{рад/с}.$$

Линейная скорость груза такая же, как и у точек на ободе колеса:

$$v = R_0\omega = (0{,}330\ \text{м})(21{,}9\ \text{рад/с}) = 7{,}23\ \text{м/с}.$$

Скорость v можно также вычислить, используя линейное выражение $v = v_0 + at$; подставляя в него соответствующие значения, получаем $0 + (2{,}41\ \text{м/с}^2)(3{,}00\ \text{с}) = 7{,}23\ \text{м/с}$.

*9.6. Вычисление моментов инерции

Момент инерции любого тела относительно произвольной оси можно найти экспериментально посредством измерения полного момента силы τ, необходимого для сообщения телу углового ускорения α. При этом из формулы (9.12) имеем $I = \tau/\alpha$.

Можно вычислить моменты инерции многих тел или систем частиц. Простой иллюстрацией такого расчета является пример 9.8. Большинство тел можно рассматривать как непрерывное распределение массы. При этом выражение (9.11) для момента инерции принимает вид

$$I = \int R^2\,dm, \tag{9.14}$$

где dm – масса любой бесконечно малой частицы тела, а R – ее расстояние по перпендикуляру от оси вращения; интеграл берется по всему объему тела. Этот интеграл нетрудно вычислить лишь для тел простой геометрической формы.

Пример 9.11. Покажем, что момент инерции однородного полого цилиндра (внутренний радиус R_1, внешний радиус R_2) массой M равен $I = (1/2)M(R_1^2 + R_2^2)$, как это следует из рис. 9.13, если ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра.

Решение. Разобьем цилиндр на концентрические цилиндрические кольца (или обручи) толщиной dR, как показано на рис. 9.15. Если плотность (масса единицы объема) вещества равна ρ, то

$$dm = \rho\,dV;$$

здесь dV – объем бесконечно тонкого кольца радиусом R, толщиной dR и высотой h.

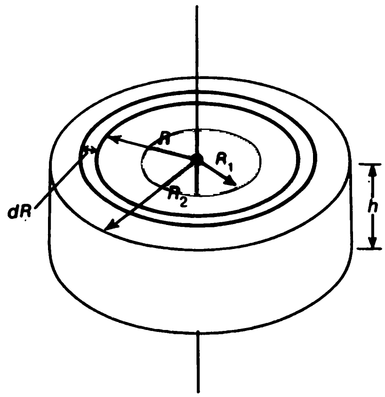


Рис. 9.15. Определение момента инерции полого цилиндра (пример 9.11).

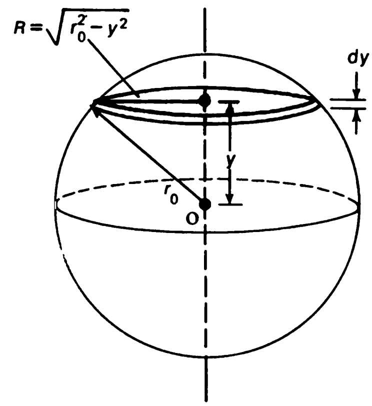


Рис. 9.16. Определение момента инерции шара радиусом r_0 (пример 9.12).

Поскольку $dV = (2\pi R)(dR)(h)$, мы имеем $dm = 2\pi\rho h R\, dR$.

Таким образом, момент инерции получается посредством интегрирования (суммирования) по всем этим кольцам:

$$I = \int R^2\, dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h R^3\, dR = 2\pi\rho h\left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right];$$

мы предположили здесь, что цилиндр имеет постоянную плотность во всех точках, т. е. $\rho = \text{const}$. (Если бы это было не так, то нам пришлось бы учитывать зависимость ρ от R, прежде чем выполнять интегрирование.) Объем V рассматриваемого нами полого цилиндра равен $V = (\pi R_2^2 - \pi R_1^2)h$, так что его масса равна

$$M = \rho V = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)h.$$

Поскольку $R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$, имеем

$$I = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

в соответствии с выражением на рис. 9.13. Заметим, что для сплошного цилиндра $R_1 = 0$, и мы получаем, полагая $R_2 = R_0$,

$$I = \frac{1}{2}MR_0^2,$$

что вновь совпадает с соответствующим выражением на рис. 9.13 для сплошного цилиндра массой M и радиусом R_0.

Пример 9.12. Вычислим момент инерции однородного твердого шара радиусом r_0 относительно оси, проходящей через его центр.

Решение. Разобьем шар на бесконечно малые цилиндры высотой dy, как показано на рис. 9.16. Каждый такой цилиндр имеет радиус

$$R = \sqrt{r_0^2 - y^2}$$

и массу

$$dm = \rho\, dV = \rho\pi R^2\, dy = \rho\pi(r_0^2 - y^2)\, dy.$$

Следовательно, момент инерции любого бесконечно малого цилиндра можно записать в виде

$$dI = \frac{1}{2}dmR^2 = \frac{\rho\pi}{2}(r_0^2 - y^2)^2\, dy = \frac{\rho\pi}{2}(r_0^4 - 2r_0^2y^2 + y^4)\, dy.$$

Суммирование (точнее, интегрирование) по всем этим бесконечно малым цилиндрам дает

$$I = \int dI = \frac{\rho\pi}{2}\int_{-r_0}^{r_0}(r_0^4 - 2r_0^2y^2 + y^4)\,dy =$$

$$= \frac{\rho\pi}{2}\left(r_0^4 y - \frac{2}{3}r_0^3 y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-r_0}^{r_0} = \frac{8}{15}\rho\pi r_0^5.$$

Поскольку объем шара равен $V = (4/3)\pi r_0^3$, мы имеем $M = \rho V = (4/3)\pi\rho r_0^3$; следовательно,

$$I = \frac{2}{5}Mr_0^2,$$

что совпадает с соответствующим выражением на рис. 9.13.

Существуют две простые теоремы, которые помогают при вычислении моментов инерции. Первая из них называется *теоремой о параллельном переносе оси вращения* (теоремой о параллельных осях). Она утверждает, что если I – момент инерции тела массой M относительно некоторой оси вращения, а $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной первой оси, отстоящей от нее на расстояние h, то[1)]

$$I = I_{\text{цм}} + Mh^2. \tag{9.15}$$

Таким образом, если известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то нетрудно вычислить момент инерции относительно любой параллельной ей оси. Доказательство этой теоремы проводится следующим образом. Выберем систему координат таким образом, чтобы ее начало приходилось на центр масс, и пусть $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси z. На рис. 9.17 изображено поперечное сечение тела произвольной формы в плоскости xy. Обозначим через I момент инерции тела относительно оси, параллельной оси z и проходящей через точку A (на рис. 9.17) с координатами x_A и y_A. Пусть x_i, y_i – координаты, а m_i – масса произвольной материальной точки, принадлежащей телу. Квадрат расстояния от этой материальной точки до точки A

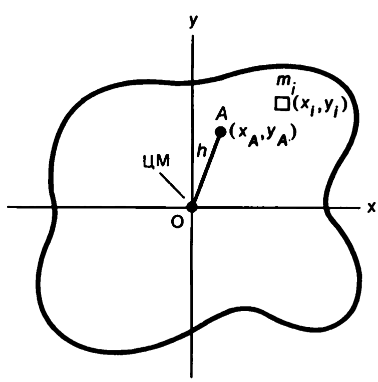


Рис. 9.17. К доказательству теоремы о параллельных осях.

[1)] Эта теорема называется также теоремой Штейнера.– *Прим. ред.*

равен $(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2$. Таким образом, момент инерции I относительно оси, проходящей через точку A, запишется следующим образом:

$$I = \sum m_i [(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2] = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ - 2x_A \sum m_i x_i - 2y_A \sum m_i y_i + \left(\sum m_i\right)(x_A^2 + y_A^2).$$

Первый член в правой части этого равенства совпадает с $I_{\text{ЦМ}} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$, поскольку по условию ЦМ тела расположен в начале координат. Второй и третий члены равны нулю в соответствии с определением центра масс: $\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0$, так как $x_{\text{ЦМ}} = y_{\text{ЦМ}} = 0$. Последний член равен Mh^2, поскольку $\sum m_i = M$ и $(x_A^2 + y_A^2) = h^2$, где h – расстояние от точки A до ЦМ. Таким образом, мы доказали соотношение $I = I_{\text{ЦМ}} + Mh^2$, т.е. выражение (9.15).

Теорема о параллельном переносе осей может быть применена к любому телу. Другая теорема – *теорема о перпендикулярных осях* – может быть применена лишь к плоским фигурам, т.е. к двумерным телам, или телам постоянной толщины, которой можно пренебречь по сравнению с другими размерами. Согласно этой теореме, сумма моментов инерции плоского тела относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей в плоскости этого тела равна моменту инерции относительно оси, проходящей через точку пересечения перпендикулярно плоскости тела. Точнее говоря, если тело расположено в плоскости xy, то

$$I_z = I_x + I_y \qquad \text{[тело в плоскости } xy\text{]}. \tag{9.16}$$

Здесь I_z, I_x, I_y – моменты инерции относительно осей z, x и y соответственно. Доказательство этой теоремы не составляет труда и основано на том, что по определению $I_x = \sum m_i y_i^2$, $I_y = \sum m_i x_i^2$, $I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$, откуда сразу следует формула (9.16).

Пример 9.13. Найдем момент инерции сплошного цилиндра радиусом R_0 и массой M относительно оси, тангенциальной к его краю и параллельной его оси симметрии (рис. 9.18, *а*).

Решение. Воспользуемся теоремой о параллельном переносе осей и учтем, что $I_{\text{ЦМ}} = (1/2)MR_0^2$ (см. на рис. 9.13, *в*). Тогда, поскольку $h = R_0$, мы имеем

$$I = I_{\text{ЦМ}} + Mh^2 = \frac{3}{2}MR_0^2.$$

Пример 9.14. Определим момент инерции тонкого круглого диска (цилиндра очень малой высоты) относительно оси, проходящей через его центр в плоскости xy (рис. 9.18, *б*).

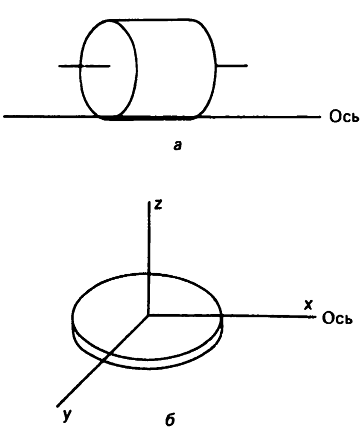


Рис. 9.18. К определению моментов инерции тел в примерах 9.13 и 9.14.

Решение. Применим теорему о перпендикулярных осях и вычислим момент инерции относительно оси x (рис. 9.18, *б*). Из рис. 9.13, *в* имеем $I_z = (1/2) M R_0^2$, а вследствие симметрии $I_x = I_y$. Следовательно, $2I_x = I_z$, откуда $I_x = (1/2) I_z = (1/4) M R_0^2$.

*9.7. Почему катящийся шар замедляется?

Шар массой M и радиусом r_0, катящийся по горизонтальному гладкому и плоскому столу, в конце концов останавливается. Какая же сила вынуждает его к этому? Можно было бы подумать, что это сила трения, однако даже простой анализ явления указывает на то, что здесь имеется серьезное противоречие.

Предположим, что шар катится влево, как показано на рис. 9.19, и при этом замедляется. Согласно второму закону Ньютона ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$), должна существовать сила $\mathbf{F}$ (по всей вероятности, что-то вроде силы трения), действующая вправо, как показано на рисунке, так что ускорение $\mathbf{a}$ будет также направлено вправо и скорость v шара будет уменьшаться. Однако весьма примечательно, что если мы посмотрим теперь на уравнение динамики вращательного движения $\tau = I\alpha$ (момент силы вычислен относительно центра масс шара), обнаружим, что сила $\mathbf{F}$ способствует увеличению углового ускорения α и, следовательно, *увеличению* линейной скорости шара. Здесь налицо явное противоречие! Сила $\mathbf{F}$ стремится замедлить шар, если мы рассматриваем поступательное движение, но в то же время стремится ускорить его, если мы рассматриваем вращательное движение.

Разрешить этот кажущийся парадокс можно, если предположить, что здесь действуют некоторые другие силы. Единственными другими силами, действующими на шар, являются сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила нормальной реакции $\mathbf{F}_N (= -m\mathbf{g})$. Эти силы действуют по вертикали и потому не влияют на горизонтальное поступательное движение. Если считать как шар, так и поверхность стола, по которой он катится, абсолютно твердыми, т. е. контакт между ними имеет место лишь в одной точке, то эти силы не приводят к какому-либо моменту относительно ЦМ, поскольку линия их действия проходит через него.

Единственная возможность разрешения возникшего противоречия состоит в отказе от идеализированного

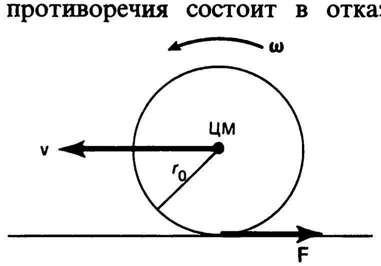


Рис. 9.19. Шар, катящийся в левую сторону.

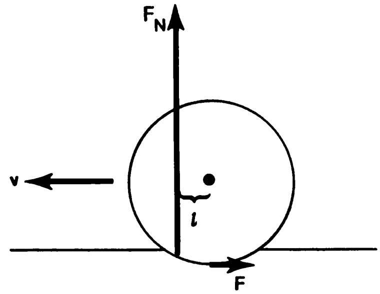


Рис. 9.20. Нормальная сила **реакции $\mathbf{F}_N$** вызывает момент силы, замедляющий движение катящегося шара.

предположения об абсолютной твердости участвующих в движении тел. Действительно, все тела без исключения деформируемы в той или иной степени, так что наш шар слегка уплощается, а поверхность стола немного прогибается в месте контакта с шаром. Следовательно, мы имеем дело с некоторой конечной *областью* контакта, а не с точкой. Но если это так, то в области контакта может возникнуть момент силы, действующий в противоположном направлении по сравнению с моментом силы, обусловленным силой $\mathbf{F}$, и, следовательно, может действовать так, что шар будет замедляться. Этот момент силы можно связать с нормальной силой $\mathbf{F}_N$, с которой поверхность стола действует на шар во всей области их контакта. В результате мы получим, что силу $\mathbf{F}_N$ можно рассматривать как действующую вертикально на расстоянии l перед центром масс (по направлению движения), как показано на рис. 9.20 (на этом рисунке деформация изображена весьма преувеличенной).

Правильно ли то, что нормальная сила $\mathbf{F}_N$ должна действовать *впереди* положения ЦМ, как показано на рис. 9.20? Да, конечно. Дело в том, что, когда шар катится, его передний край ударяется о поверхность стола и получает небольшой импульс силы. Следовательно, поверхность стола действует вверх на переднюю часть шара немного сильнее, чем в случае, когда шар покоится. Что касается задней части области контакта, то шар здесь начинает двигаться вверх, и, следовательно, поверхность стола действует на него вверх несколько слабее, чем в случае покоящегося шара. Таким образом, поверхность стола действует с большей силой на переднюю часть шара в области его контакта со столом и с меньшей силой на заднюю его часть, что приводит к возникновению момента силы и подтверждает то, что точка приложения силы $\mathbf{F}_N$ должна находиться перед центром масс шара.

Очевидно, что момент силы

$$\tau_N = lF_N$$

приводит к уменьшению угловой скорости катящегося шара, а тем самым и к его замедлению[1]. Действительно, и величину τ_N можно выразить либо через F, либо через a. Из уравнения динамики вращательного движения $\tau = I\alpha$ имеем

$$\tau_N - r_0 F = I\alpha = I\frac{a}{r_0},$$

поскольку угловое ускорение α связано с линейным a соотношением $\alpha = a/r_0$. Таким образом,

$$\tau_N = I\frac{a}{r_0} + r_0 F.$$

Для поступательного (горизонтального) движения следует учитывать лишь действие силы F, так что $F = Ma$, и, следовательно,

$$\tau_N = I\frac{F}{Mr_0} + r_0 F = F\left(\frac{I}{Mr_0} + r_0\right),$$

или

$$\tau_N = I\frac{a}{r_0} + r_0 Ma = a\left(\frac{I}{r_0} + r_0 M\right).$$

Для шара момент инерции равен $I = (2/5)Mr_0^2$, так что окончательно находим

$$\tau_N = \frac{7}{5}Fr_0 = \frac{7}{5}Mr_0 a.$$

Таким образом, действующий на шар момент силы за счет $\mathbf{F}_N$ в 7/5 раза больше момента силы, обусловленного силой трения $\mathbf{F}$, независимо от того, сколь быстро происходит замедление движения. Для очень твердых поверхностей скорость торможения практически равна нулю, так что $\tau_N = 0$, откуда следует, что $l \approx 0$ и линия действия силы $\mathbf{F}_N$ проходит очень близко к центру масс.

Пример 9.15. Шар массой 2,6 кг и радиусом $r_0 = 35$ см катится по плоской поверхности со скоростью $v = 0{,}40$ м/с и, пройдя 80 м, останавливается. Нужно найти силу F и расстояние l.

Решение. Из уравнения (2.9в) имеем $a = (v^2 - v_0^2)/2x = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Следовательно, $F = Ma = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ Н. Поскольку $\tau_N = (7/5)Fr_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Н·м, находим $l = \tau_N/F_N = \tau_N/Mg = 5 \cdot 10^{-5}$ м $= 0{,}05$ мм, т.е. очень малое расстояние. Заметим, что невозможно определить τ_N или l до тех пор, пока не измерено значение a (или F).

[1] Угловые и линейные скорости и ускорения шара связаны между собой условием качения $v = \omega r_0$ (или $a = \alpha r_0$), основанным на неподвижности точки контакта (в противном случае имеет место качение с проскальзыванием или чистое скольжение).– *Прим. ред.*

В присутствии других сил незначительным моментом силы, обусловленным $\mathbf{F}_N$, во многих случаях можно пренебречь. Например, когда шар или цилиндр скатывается по наклонной плоскости, сила тяжести дает значительно больший вклад, чем τ_N, так что последним можно пренебречь. Таким образом, для большинства задач можно считать, что абсолютно твердый шар соприкасается с абсолютно твердой поверхностью, по существу, в одной точке.

9.8. Момент импульса и его сохранение

Уравнение [см. (9.12) и (9.13)]

$$\tau = I\alpha$$

описывает вращение твердого тела относительно фиксированной оси (или оси, которая движется поступательно, но не меняет своего направления и проходит через ЦМ тела). Это уравнение является вращательным аналогом второго закона Ньютона ($F = ma$) для поступательного движения. Последнее уравнение можно также записать в виде $F = dp/dt = d(mv)/dt$, где p – линейный импульс. Аналогичное соотношение можно записать и для вращательного движения твердого тела. Поскольку в соответствии с (9.3) угловое ускорение равно $\alpha = d\omega/dt$, мы имеем

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}.$$

(Этот простой вывод предполагает, что момент инерции I сохраняется постоянным. Однако полученное выражение справедливо, даже если момент инерции изменяется; это мы покажем в гл. 10.) Величина $I\omega$ называется **моментом импульса** (моментом количества движения, угловым моментом) L тела относительно его оси вращения[1]:

$$L = I\omega. \tag{9.17}$$

Таким образом, второй закон Ньютона для вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси (или оси, проходящей через центр масс тела и перемещающейся вместе с ним поступательно без изменения направления) имеет вид

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}. \tag{9.18}$$

[1] В гл. 10 мы покажем, что момент импульса является вектором и что рассматриваемая здесь величина $L = I\omega$ является его проекцией на ось вращения (при этом могут быть и другие проекции).

Выражение (9.18) – это просто иная запись формул (9.12) и (9.13) (при соблюдении упомянутых выше ограничений).

Заметим, что момент импульса твердого тела $L = I\omega$ полностью аналогичен импульсу $p = mv$. Момент инерции I, характеризующий инертность при вращательном движении, является аналогом массы m (меры инертности при поступательном движении); угловая скорость ω – это аналог обычной скорости v.

Момент импульса является очень важным понятием в физике. В гл. 10 мы рассмотрим момент импульса более подробно для более общих случаев с учетом его векторной природы. Теперь же займемся изучением одного из наиболее важных свойств этой величины, а именно того, что при определенных условиях момент импульса, как энергия и импульс, является *сохраняющейся* величиной. Что же это за условия, при которых сохраняется момент импульса? Из формулы (9.18) ясно, что если результирующий момент силы τ, действующий на вращающееся тело, равен нулю, то

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad L = I\omega = \text{const}.$$

В этом состоит **закон сохранения момента импульса** для вращающегося тела, который можно сформулировать так:

Полный момент импульса вращающегося тела остается постоянным, если результирующий момент сил, действующий на него, равен нулю.

Этот закон, особенно в его более общей форме (см. гл. 10), является одним из великих законов сохранения в физике[1].

Если результирующий момент силы, действующей на тело, равен нулю, а тело вращается вокруг неподвижной оси (или оси, проходящей через его ЦМ и движущейся поступательно без изменения своего направления), то

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{const};$$

здесь I_0 и ω_0 – соответственно момент инерции и угловая скорость относительно оси в какой-либо начальный момент времени ($t = 0$), а I и ω – значения этих величин в какой-либо другой момент времени. Взаимное расположение различных частей тела может изменяться, так что момент инерции I изменяется; изменяется также и угловая скорость ω, но при этом произведение $I\omega$ остается постоянным.

---

[1] Подобно другим законам сохранения, закон сохранения момента импульса отражает фундаментальные свойства симметрии пространства и времени, а именно инвариантность пространства по отношению к операции поворота и равноправие всех направлений (изотропность пространства).– *Прим. ред.*

На основе закона сохранения момента импульса можно объяснить многие интересные явления повседневной жизни. Например, фигурист, выполняющий «волчок» на льду, вращается со сравнительно низкой угловой скоростью, когда его руки разведены в стороны. Прижимая руки к себе, фигурист сразу начинает вращаться со значительно более высокой угловой скоростью. Вспоминая определение момента инерции $I = \sum_i m_i R_i^2$, легко убедиться, что при приближении рук к оси вращения момент инерции уменьшается. Поскольку момент импульса $I\omega$ остается неизменным (малым моментом сил трения мы пренебрегаем), то при уменьшении I величина ω должна возрастать. Так, если момент инерции фигуриста уменьшается в два раза, то во столько же раз увеличивается его угловая скорость.

Аналогичный пример мы имеем в случае с прыгуном в воду на рис. 9.21. Толчок, испытываемый им в момент отрыва от гибкой доски, «закручивает» его, т. е. сообщает прыгуну начальный запас момента импульса относительно его ЦМ. Прежде чем прыгнуть в воду, прыгун совершает один или несколько оборотов с большой угловой скоростью; затем он вытягивает руки, увеличивая тем самым свой момент инерции и, следовательно, снижая свою угловую скорость до совсем небольшой величины перед входом в воду. Момент инерции при этом может измениться в 3,5 раза.

Пример 9.16. Шарик массой m, укрепленный на конце нити, вращается по окружности на гладкой (без трения) поверхности стола. Другой конец нити пропущен сквозь отверстие в столе (рис. 9.22). Первоначально шарик вращается с линейной скоростью $v_1 = 2{,}4$ м/с по окружности радиусом $R_1 = 0{,}80$ м. Затем нить начинает медленно протягиваться через отверстие так, что радиус окружности уменьшается до значения $R_2 = 0{,}48$ м. Чему становится равной скорость шарика v_2?

Решение. Сила, действующая со стороны нити на шарик массой m, не изменяет его момента импульса, поскольку

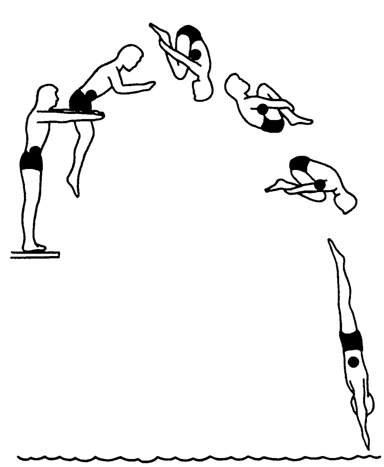


Рис. 9.21. Прыгун в воду вращается быстрее, когда его руки и ноги согнуты и прижаты к телу, чем когда они вытянуты. Момент импульса прыгуна сохраняется.

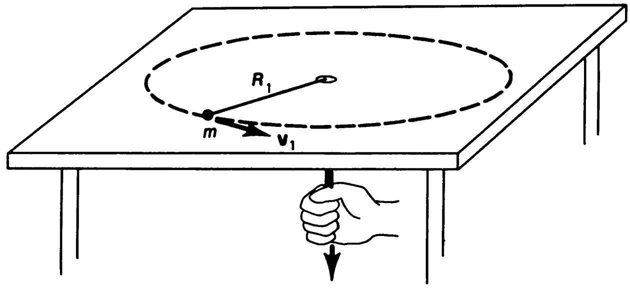


Рис. 9.22. Пример 9.16.

линия ее действия совпадает с осью вращения; поэтому $\tau = 0$. Следовательно, применяя закон сохранения момента импульса, мы можем записать

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$
$$mR_1^2\omega_1 = mR_2^2\omega_2.$$

Здесь мы учли, что момент инерции одной частицы относительно оси, отстоящей от нее на расстояние R, равен $I = mR^2$. Поскольку $v = R\omega$, мы имеем

$$v_2 = R_2\omega_2 = R_2\omega_1\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = R_2\frac{v_1}{R_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) =$$
$$= v_1\frac{R_1}{R_2} = (2{,}4\ \text{м/с})\left(\frac{0{,}80\ \text{м}}{0{,}48\ \text{м}}\right) = 4{,}0\ \text{м/с}.$$

Хотя в настоящей главе мы не собираемся подробно рассматривать векторную природу момента импульса, все же некоторые простые случаи сохранения момента импульса с учетом векторного характера величин можно обсудить. Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, направление вектора момента импульса можно выбрать таким образом, что оно будет совпадать с направлением вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, так что

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$

Это равенство верно лишь в том случае[1)], когда ось вращения является осью симметрии тела, или тонкое и плоское тело вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости (например, колесо, вращающееся вокруг своей оси).

В качестве простого примера рассмотрим человека, стоящего на горизонтальной круглой платформе, способной вращаться без трения вокруг оси, проходящей вертикально через ее центр (простейшая модель карусели). Если человек начинает идти вдоль края платформы, последняя приходит в состояние вращения в противоположном направлении. Объяснить это можно на основе закона сохранения момента импульса. Если человек начинает идти против часовой стрелки, то его момент импульса направ-

[1)] Для более сложных случаев вращения тел вокруг неподвижных осей будет существовать лишь *составляющая* вектора $\mathbf{L}$ вдоль направления $\boldsymbol{\omega}$ (возможно, и другие составляющие), равная по величине $I\omega$. Если полный момент импульса сохраняется, то сохраняется и любая его составляющая, так что сказанное в этом разделе может быть применено к вращению вокруг любой неподвижной оси.

лен вверх вдоль оси вращения (вспомните в связи с этим определение вектора $\boldsymbol{\omega}$ с помощью правила правой руки в разд. 9.3). Величина момента импульса, связанного с движением человека, равна $L = I\omega = (mR^2)(v/R)$, где v – линейная скорость человека (относительно земли, а не платформы), R – его расстояние от оси вращения, m – его масса. Величина mR^2 – момент инерции человека относительно оси вращения, если рассматривать человека как материальную точку. Поскольку платформа вращается в обратном направлении (т. е. по часовой стрелке), ее момент импульса направлен вниз вдоль оси вращения. Если начальный момент импульса был равен нулю (человек и платформа покоились), то он останется равным нулю и после того, как человек начнет свое движение. Это означает, что направленный вверх момент импульса человека в точности компенсируется направленным вниз моментом импульса платформы, так что вектор полного момента импульса остается по-прежнему равным нулю. Несмотря на то что человек действует с определенной силой (и, следовательно, моментом) на платформу, а платформа – на человека, эти силы и моменты являются внутренними (по отношению к системе, состоящей из платформы и человека); какие-либо внешние моменты сил отсутствуют (если пренебречь трением в подшипниках оси платформы), так что в соответствии с формулой (9.18) момент импульса сохраняется неизменным.

9.9. Кинетическая энергия вращения

Величина $(1/2)mv^2$ называется кинетической энергией тела, участвующего в поступательном движении. Если тело вращается вокруг оси, то говорят, что оно обладает **кинетической энергией вращения**. По аналогии с кинетической энергией поступательного движения можно было бы ожидать, что кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, должна описываться формулой $(1/2)I\omega^2$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, а ω – угловая скорость. Можно показать, что кинетическая энергия вращения действительно описывается этой формулой. Рассмотрим вращающееся тело как состоящее из очень небольших частиц, каждая из которых имеет массу m_i. Если R_i – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до любой такой частицы, то линейная скорость частицы $v_i = R_i\omega$. Полная кинетическая энергия всего тела равна сумме кинетических энергий всех составляющих его частиц:

$$\text{КЭ} = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^2\right)\omega^2,$$

где мы вынесли за знак суммы множители 1/2 и ω^2, поскольку они одинаковы для всех частиц. Поскольку

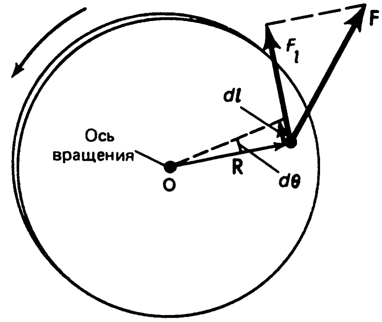


Рис. 9.23. К вычислению работы, совершаемой моментом силы, действующим на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

$\sum m_i R_i^2 = I$ – это момент инерции тела, мы видим, что кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, как и следовало ожидать, равна

$$\text{КЭ вращения} = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad [\text{неподвижная ось}]. \qquad (9.19)$$

Если ось вращения не закреплена, то кинетическая энергия вращения может принимать более сложный вид.

Работа, совершаемая над телом, вращающимся вокруг неподвижной оси, может быть выражена через угловые величины. Пусть сила **F** приложена в точке, расположенной на расстоянии R по перпендикуляру от оси вращения. Работа, совершаемая этой силой, запишется в виде

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int F_l R\, d\theta,$$

где $d\mathbf{l}$ – вектор бесконечно малого перемещения, перпендикулярного линии, соединяющей ось вращения и частицу (и, следовательно, направлен по движению). Величина этого вектора равна $dl = R\, d\theta$, а F_l представляет собой величину составляющей силы **F**, параллельную вектору $d\mathbf{l}$ (рис. 9.23). Но $F_l R$ есть момент силы τ относительно оси, так что

$$W = \int \tau\, d\theta. \qquad (9.20)$$

Скорость совершения работы, или мощность P, можно записать в виде

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \qquad (9.21)$$

Теорема о связи энергии и работы применима и в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. В соответствии с формулой (9.12) имеем

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta};$$

здесь мы использовали дифференцирование по промежуточному аргументу и определение $\omega = d\theta/dt$. Таким образом, $\tau d\theta = I\omega d\omega$ и

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2.$$

В этом и состоит теорема о связи энергии и работы для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; она гласит, что работа, совершаемая при вращении тела на угол $\theta_2 - \theta_1$ вокруг неподвижной оси, равна изменению кинетической энергии его вращательного движения.

Если тело вращается и при этом его центр масс перемещается поступательно, то оно имеет кинетическую энергию как поступательного, так и вращательного движения. *Полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения его ЦМ и кинетической энергии его вращения относительно центра масс.* Это общая теорема, которую мы здесь докажем. Пусть $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}} = x_{\text{ЦМ}}\mathbf{i} + y_{\text{ЦМ}}\mathbf{j} + z_{\text{ЦМ}}\mathbf{k}$ – радиус-вектор центра масс в любой момент времени относительно некоторой инерциальной системы отсчета, $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$ – радиус-вектор i-й частицы массой m_i в той же системе отсчета, а $\mathbf{r}_i^* = x_i^*\mathbf{i} + y_i^*\mathbf{j} + z_i^*\mathbf{k}$ – радиус-вектор той же частицы в СЦМ (вообще говоря, не являющейся инерциальной). Таким образом (рис. 9.24),

$$x_i = x_{\text{ЦМ}} + x_i^*, \quad y_i = y_{\text{ЦМ}} + y_i^*, \quad z_i = z_{\text{ЦМ}} + z_i^*.$$

Скорость i-й частицы в инерциальной системе отсчета имеет вид

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{ЦМ}} + \mathbf{v}_i^*,$$

где $\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ – скорость ЦМ в инерциальной системе отсчета, а $\mathbf{v}_i^*$ – скорость i-й частицы относительно ЦМ. Полная кинетическая энергия может быть записана в виде (с учетом

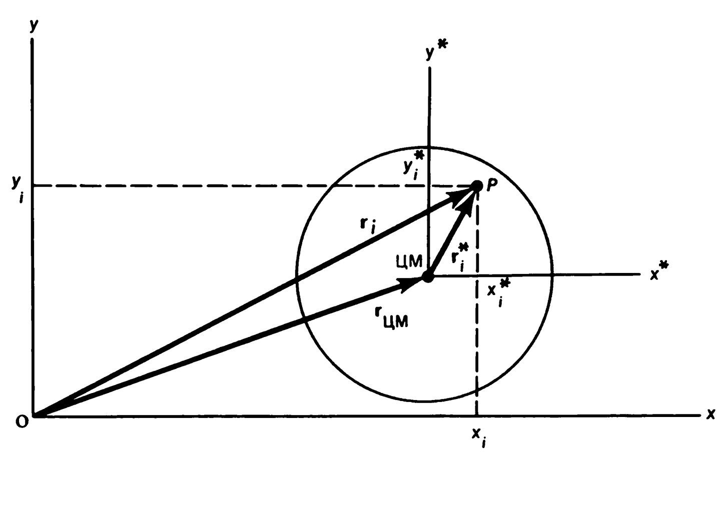


Рис. 9.24. Точка P в инерциальной системе отсчета с началом в точке O имеет радиус-вектор $\mathbf{r}_i$ с координатами x_i, y_i, z_i, а в СЦМ ее радиус-вектор равен $\mathbf{r}_i^*$ с координатами x_i^*, y_i^*, z_i^*.

свойства скалярного произведения $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$)

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i) = \frac{1}{2}\sum m_i(\mathbf{v}_{\text{ЦМ}} + \mathbf{v}_i^*)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i v_{\text{ЦМ}}^2 + \mathbf{v}_{\text{ЦМ}}\left(\sum m_i v_i^*\right) + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2}.$$

Поскольку $\sum m_i = M$ – полная масса тела и по определению центра масс $\sum m_i v_i^* = 0$ [для доказательства следует продифференцировать обе части выражения $r_{\text{ЦМ}} = (1/m)\sum m_i r_i^* = 0$], имеем

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}Mv_{\text{ЦМ}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2}. \tag{9.22}$$

Таким образом, мы доказали, что полная кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс $(1/2)Mv_{\text{ЦМ}}^2$ и кинетической энергии движения относительно центра масс.

Вывод формулы (9.22) справедлив в общем случае. Эту формулу можно применять при рассмотрении движения твердого тела, которое движется в плоскости подобно скатывающемуся с холма колесу. В последнем случае направление оси вращения не меняется (оно перпендикулярно плоскости, в которой движется тело), хотя ось вращения перемещается вместе с центром масс и, следовательно, ее положение не является постоянным. Для каждой частицы $v_i^* = \omega R_i^*$, где R_i^* – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до линии, проходящей через ЦМ перпендикулярно плоскости движения i-й частицы. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\sum m_i v_i^{*2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_i R_i^{*2}\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{ЦМ}}\,\omega^2$$

и

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}Mv_{\text{ЦМ}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{ЦМ}}\,\omega^2 \quad \begin{bmatrix}\text{твердое тело с постоянным}\\ \text{направлением оси вращения}\end{bmatrix}. \tag{9.23}$$

В выражении (9.23) $I_{\text{ЦМ}}$ – момент инерции тела относительно оси, проходящей через ЦМ перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, кинетическая энергия тела, движущегося в плоскости как поступательно, так и вращательно (причем ось вращения не меняет своего направления), равна сумме кинетических энергий поступательного движения ЦМ и вращательного движения относительно ЦМ [последнее слагаемое $(1/2)I_{\text{ЦМ}}\omega^2$].

Пример 9.17. Твердый шар массой M и радиусом r_0 скатывается (без проскальзывания) с наклонной плоскости из состояния покоя, когда он находится на высоте H по вертикали (рис. 9.25). Чему будет равна скорость этого шара у основания наклонной плоскости? Потерями за счет тормозящих сил пренебречь.

Решение. Используем закон сохранения энергии, в котором теперь необходи-

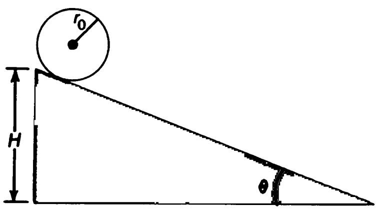


Рис. 9.25. Пример 9.17.

мо учесть кинетическую энергию вращательного движения. Полная энергия на любом расстоянии по вертикали y над основанием наклонной плоскости равна

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{ЦМ}\omega^2 + Mgy.$$

Приравняем полную энергию на вершине наклонной плоскости ($y = H$ и $v = \omega = 0$) полной энергии у основания ($y = 0$):

$$0 + 0 + MgH = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{ЦМ}\omega^2 + 0.$$

Из рис.9.13 находим, что момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его ЦМ, равен $I_{ЦМ} = (2/5)Mr_0^2$. Поскольку шар скатывается без проскальзывания, скорость поступательного движения его центра масс v относительно точки контакта (которая в любой момент времени имеет равную нулю мгновенную скорость относительно наклонной плоскости) равна скорости любой точки на поверхности шара относительно его центра, откуда $\omega = v/r_0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mr_0^2\right)(v^2/r_0^2) = MgH.$$

Сокращая величины M и r_0, находим

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)v^2 = gH,$$

или

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gH}\,.$$

Этот результат можно сравнить со скоростью тела, которое скользит по наклонной плоскости с той же высоты без вращения и без трения; в этом случае, как известно, скорость равна $v = \sqrt{2gH}$, что больше полученной нами величины.

Если бы в примере 9.17 отсутствовало трение между шаром и плоскостью, то шар, вместо того чтобы катиться, скользил бы по наклонной плоскости. Шар будет катиться только в том случае, когда имеется трение. Однако в законе сохранения энергии нам не нужно было учитывать трение, поскольку в данном случае имеет место трение скольжения, при котором работа не производится. Действительно, если шар находится в контакте с плоскостью в точке, то сила трения действует параллельно плоскости (рис. 9.26); при этом точка контакта на шаре в любой момент времени не скользит, а движется вверх (перпендикулярно плоскости), когда шар катится. Таким образом, поскольку направления силы и перемещения взаимно перпендикулярны, никакая работа не совершается. (Ситуация становится более сложной, если мы учитываем замедляющие силы, обусловленные упругой дефор-

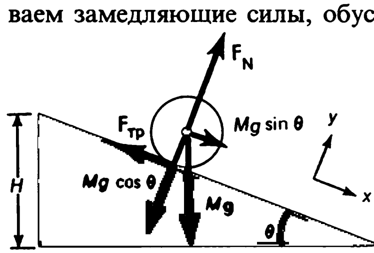


Рис. 9.26. Пример 9.18.

мацией, как в разд. 9.7.) Если нас интересуют трение и другие силы, входящие в задачу, то мы должны использовать динамическое рассмотрение, как в следующем примере.

Пример 9.18. Проанализируем движение катящегося шара из примера 9.17 (рис. 9.25), используя силы и моменты силы; в частности, найдем его скорость v и величину силы трения покоя $F_{тр}$ (рис. 9.26).

Решение. Движение шара в целом можно представить как поступательное движение ЦМ плюс вращательное движение относительно ЦМ. Используя формулу $F = ma$, для поступательного движения вдоль оси x имеем следующее уравнение:

$$Mg\sin\theta - F_{тр} = Ma,$$

а вдоль оси y

$$F_N - Mg\cos\theta = 0,$$

поскольку в направлении, перпендикулярном плоскости движения, ускорение отсутствует. Из последнего уравнения получаем

$$F_N = Mg\cos\theta.$$

Для вращательного движения относительно ЦМ воспользуемся формулой $\tau = I\alpha$:

$$F_{тр}r_0 = \left(\frac{2}{5}Mr_0^2\right)\alpha;$$

другие силы ($\mathbf{F}_N$ и $M\mathbf{g}$) не входят в это выражение, поскольку они имеют равные нулю плечи. В примере 9.17 мы показали, что угловая скорость равна $\omega = v/r_0$, где v – скорость ЦМ. Дифференцируя это выражение для ω по времени, находим $\alpha = a/r_0$; подставляя этот результат в формулу для $F_{тр}$, получаем

$$F_{тр} = \frac{2}{5}Ma.$$

Подстановка этого выражения для силы трения в первое уравнение, записанное в этом примере, дает

$$Mg\sin\theta - \frac{2}{5}Ma = Ma,$$

или

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta.$$

Таким образом, мы убедились в том, что ускорение ЦМ шара, катящегося по наклонной плоскости, меньше, чем ускорение тела, скользящего по ней без трения ($a = g\sin\theta$). Для того чтобы найти скорость v у основания наклонной плоскости, используем формулу (2.9в), в которой полное пройденное вдоль плоскости расстояние равно $x = H/\sin\theta$, где H – высота наклонной плоскости (рис. 9.26). Таким образом,

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right)\left(\frac{H}{\sin\theta}\right)} = \sqrt{\frac{10}{7}gH}.$$

Мы пришли к тому же результату, что и в примере 9.17, однако здесь для этого понадобилось меньше усилий. Чтобы найти величину силы трения, используем записанные выше выражения:

$$F_{тр} = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{5}M\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right) = \frac{2}{7}Mg\sin\theta.$$

Если коэффициент трения покоя достаточно мал или угол θ достаточно велик, так что $F_{тр} > \mu_s F_N$ (при этом $\operatorname{tg}\theta > (7/2)\,\mu_s$), то шар будет не только скатываться с плоскости, но и одновременно скользить по ней.

Заключение

Когда твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, каждая точка этого тела движется по круговой траектории. Линии, соединяющие ось вращения с различными точками тела, поворачиваются на один и тот же угол θ за любой данный промежуток времени. Углы удобно измерять в *радианах* (1 радиан – это угол, стягиваемый дугой, длина которой равна радиусу окружности).

Угловая скорость ω определяется как быстрота изменения углового положения тела:

$$\omega = d\theta/dt.$$

Все части твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, в любой момент времени имеют одну и ту же угловую скорость. *Угловое ускорение* α определяется как быстрота изменения угловой скорости:

$$\alpha = d\omega/dt.$$

Линейные скорость и ускорение любой точки тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, связаны с угловыми скоростью и ускорением соотношениями

$$v = R\omega, \quad a_T = R\alpha, \quad a_c = v^2/R = \omega^2 R,$$

где R – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до данной точки, a_T и a_c – соответственно тангенциальное и центростремительное ускорения. Если твердое тело вращается с постоянным ускорением ($\alpha = \text{const}$), то это вращение описывается уравнениями, аналогичными уравнениям для поступательного движения.

Несмотря на то что угол θ не вектор, угловая скорость и угловое ускорение являются векторами. В случае когда твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, как скорость $\boldsymbol{\omega}$, так и ускорение $\boldsymbol{\alpha}$ направлены вдоль оси вращения в соответствии с правилом правой руки.

Момент силы, создаваемый силой $\mathbf{F}$, действующей на твердое тело, записывается в виде

$$\tau = R_\perp F = RF_\perp = RF\sin\theta,$$

где $R_\perp$ – расстояние, называемое *плечом силы* и измеряемое по перпендикуляру от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила; θ – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$.

Вращательный аналог второго закона Ньютона имеет вид

$$\tau = I\alpha,$$

где $I = \sum m_i R_i^2$ – *момент инерции* тела относительно оси вращения. Это выражение применимо к случаям, когда твердое тело вращается вокруг оси, закрепленной в какой-либо инерциальной системе отсчета, или когда величины τ, I и α вычисляются относительно ЦМ тела, даже если ЦМ движется.

Момент импульса (момент количества движения, угловой момент) тела относительно неподвижной оси определяется выражением

$$L = I\omega.$$

Вращательный аналог второго закона Ньютона, выраженный через момент импульса, принимает вид

$$\tau = dL/dt.$$

Если результирующий момент силы, действующий на тело, равен нулю, то $dL/dt = 0$, так что $L = \text{const}$. Это *закон сохранения момента импульса* для вращающегося тела.

Кинетическая энергия вращения тела вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω записывается следующим образом:

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Если тело одновременно вращается и движется поступательно[1], то его полная кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии движения ЦМ тела и кинетической энергии вращения тела вокруг его ЦМ:

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}Mv_{\text{ЦМ}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{ЦМ}}\omega^2,$$

при условии, что направление вращения сохраняется неизменным.

Вопросы

1. Представьте себе, что вы находитесь на некотором известном вам расстоянии от статуи Свободы. Опишите, каким образом вы могли бы определить ее высоту, располагая лишь масштабной линейкой и не делая ни шагу со своего места.

2. Велосипедный счетчик пройденного расстояния (одометр) прикрепляется рядом с осью колеса и рассчитан на колеса диаметром 70 см. Что произойдет, если вы поставите этот счетчик на велосипед с диаметром колес 60 см?

3. Диск проигрывателя вращается с постоянной угловой скоростью. С каким ускорением движутся его краевые точки – с радиальным (нормальным) и (или) тангенциальным? Ответьте на тот же вопрос, если диск вращается равномерно ускоренно. В каких случаях величина каждого из этих линейных ускорений изменяется?

4. Как изменились бы выражения (9.7) для равномерно ускоренного вращательного движения, если бы угловые величины θ, ω и α были выражены не в радианах, а в градусах?

5. В какую сторону вдоль оси вращения направлен вектор угловой скорости Земли при ее суточном вращении?

6. Угловая скорость колеса, вращающегося вокруг горизонтальной оси, направлена на запад. В каком направлении ориентирована линейная скорость верхней точки обода колеса? А как направлено линейное тангенциальное ускорение при условии, что угловое ускорение направлено на восток? Увеличивается или уменьшается при этом угловая скорость?

7. Может ли меньшая сила создать больший момент силы?

8. Если сила **F** действует на тело таким образом, что ее плечо равно нулю, то будет ли она оказывать влияние на движение тела?

9. Относительно какой из осей вращения книга, которую вы держите в руках, будет иметь наименьший момент инерции?

10. Два однородных диска одной толщины и одинаковой массы вращаются вокруг осей, проходящих через их центры. Если они изготовлены из материалов с различными плотностями, то у какого из них момент инерции будет больше?

11. Какой цели служит палка, которую берут с собой при прогулке по пересеченной местности (неровной дороге)? Постарайтесь дать по возможности более точный ответ.

12. Почему труднее подняться, держа руки за головой, чем при вытянутых перед собой руках? Чтобы ответить на этот вопрос, сделайте рисунок.

13. Опытные велосипедисты пользуются сильно облегченными «цельнокроенными» шинами (однотрубками). Они утверждают, что уменьшить массу покрышек значительно важнее, чем уменьшить на ту же величину массу какой-либо

---

[1] Такое движение, если ось вращения все время сохраняет одно и то же направление, принято называть плоским.– *Прим. ред.*

другой части велосипеда. Объясните, почему это утверждение правильное.

14. У млекопитающих, существование которых зависит от умения быстро бегать, форма ног такова, что внизу они довольно тонкие, а мясо и мышцы сосредоточены высоко наверху (вблизи лопаток). Объясните с точки зрения динамики вращательного движения, почему такое распределение массы у животных целесообразно.

15. Почему канатоходцы держат в руках длинный тонкий шест?

16. Почему передняя часть мотоцикла задирается вверх, когда мотоциклист в прыжке отрывается от поверхности земли (перед этим водитель дает полный газ, и заднее колесо мотоцикла продолжает вращаться в полете)?

17. Игрок в гандбол взмывает в воздух, чтобы сделать дальнюю передачу. Когда он бросает мяч, верхняя часть его корпуса поворачивается; если быстро взглянуть на него, можно заметить, что его бедра и ноги поворачиваются в противоположном направлении. Объясните это наблюдение.

18. Если бы вдруг произошла значительная миграция населения в сторону экватора, то как это сказалось бы на продолжительности суток?

19. По наклонной плоскости скатываются шар, цилиндр и обруч, имеющие одинаковые диаметры. Какое тело прибудет к основанию наклонной плоскости первым? А какое последним?

20. Имеются две наклонные плоскости одинаковой высоты, но с разными углами наклона. Если один и тот же стальной шар скатывается с этих плоскостей, то на какой из них он достигнет основания за меньшее время? Для какой из них скорость шара у основания будет наибольшей? Объясните. Если бы шар был изготовлен из мягкого материала и имелось значительное трение, то как бы повлияло это на результат?

21. Два шара покоятся на вершине наклонной плоскости. У одного из них радиус и масса в два раза больше, чем у другого. Какой шар достигнет основания плоскости первым? Какой шар будет иметь наибольшую скорость? А какой наибольшую кинетическую энергию?

22. Шар и цилиндр с одинаковыми радиусами и массами начинают скатываться из состояния покоя с вершины наклонной плоскости. Какое тело достигнет основания наклонной плоскости первым? Какое из них будет иметь наибольшую скорость у основания плоскости? А наибольшую кинетическую энергию у основания?

23. Полная кинетическая энергия системы частиц равна сумме кинетической энергии поступательного движения ЦМ системы и кинетической энергии движения относительно ЦМ [формула (9.22)]. Возможно ли (и полезно ли) сформулировать подобное утверждение относительно полного импульса системы частиц?

Задачи

Раздел 9.1

1. (I) Эйфелева башня имеет высоту 300 м. Вы находитесь в Париже. Если из той точки, где вы стоите, Эйфелева башня видна под углом 5°, то на каком расстоянии от нее вы находитесь?

2. (I) Велосипедист проехал расстояние 2,0 км на велосипеде, у которого диаметр покрышки колеса равен 68 см. Сколько оборотов совершили при этом колеса велосипеда?

3. (I) Точильное колесо диаметром 20 см вращается, совершая 2000 об/мин (оборотов в минуту). Вычислите: а) его угловую скорость в единицах рад/с; б) линейную скорость точки на ободе точильного колеса.

4. (I) Оцените приближенно угол, под которым видна Луна, используя линейку и собственный палец или другой предмет, отбрасывающий тень в лунном свете. Опишите ваши измерения и полученный результат и затем используйте это для оценки диаметра Луны. Учтите, что Луна находится на расстоянии 384 000 км от Земли.

5. (I) Бобина большого диаметра с тросом, намотанным на нее, лежит на Земле, причем конец троса находится на верхнем крае бобины. Человек берется за конец троса и, держась за трос, отходит от бобины на расстояние L. Бобина катится за ним без проскальзывания. Какова длина части троса, которая смотается с бобины? На какое расстояние переместится ЦМ бобины?

6. (I) Вычислите угловую скорость Земли а) при ее движении по орбите вокруг Солнца; б) относительно ее собственной оси вращения.

7. (I) Чему равна линейная скорость точки, связанная с вращением Земли, если она находится а) на земном экваторе; б) на 50° северной широты? (См. решение предыдущей задачи.)

8. (I) Диск проигрывателя радиусом R_1 приводится в движение с помощью резинового ролика радиусом R_2, соприкасающегося с внешней стороной диска. Чему равно отношение угловых скоростей диска и ролика ω_1/ω_2?

9. (II) За время t колесо поворачивается на угол θ, зависящий от времени по закону $\theta = 5{,}0t + 3{,}0t^2 - 4{,}5t^4$, причем θ измеряется в радианах, а t – в секундах. Чему равны а) средняя скорость колеса; б) среднее угловое ускорение за промежуток времени от $t = 2{,}0$ с до $t = 3{,}0$ с? Получите выражение в) для мгновенной угловой скорости ω; г) для мгновенного

углового ускорения α. д) Вычислите значения мгновенной угловой скорости ω и мгновенного углового ускорения α в момент времени $t = 3{,}0$ с.

10. (II) Зависимость углового ускорения α колеса от времени t записывается в виде $\alpha = 8{,}0t - 2{,}5t^2$, где угловое ускорение α выражено в радианах в секунду в квадрате (рад/с^2), а t - в секундах. Колесо начинает вращаться из состояния покоя ($\theta = 0$, $\omega = 0$ при $t = 0$). Выведите формулу, описывающую зависимость от времени а) угловой скорости ω; б) угла поворота колеса θ. в) Вычислите угловую скорость ω и угол поворота θ в момент времени $t = 2{,}0$ с.

11. (II) Колесо диаметром 40 см с постоянным ускорением вращается так, что за 3,6 с частота вращения возрастает от 80 до 300 об/мин. Вычислите: а) угловое ускорение колеса; б) радиальную и тангенциальную составляющие вектора линейного ускорения точки на ободе колеса через 2,0 с после начала ускоренного движения колеса.

Раздел 9.2

12. (I) Маховик автомобильного двигателя за 6,5 с замедляет свое вращение от 4500 до 1000 об/мин. Вычислите: а) угловое ускорение маховика; б) полное число оборотов, совершенное маховиком за этот промежуток времени.

13. (I) Выведите уравнения (9.7в).

14. (I) Диск проигрывателя достигает установленной частоты вращения 33 об/мин после 1,5 оборота. Чему равно его угловое ускорение?

15. (II) Два резиновых диска расположены рядом друг с другом так, что их края соприкасаются. Диск 1 радиусом $R_1 = 3{,}0$ см начинает вращаться с угловым ускорением 0,88 рад/с^2 и заставляет вращаться диск 2 радиусом $R_2 = 5{,}0$ см, причем колесо 2 вращается относительно диска 1 без проскальзывания. а) Если в начальный момент второй диск покоился, то за какой промежуток времени диск 2 достигнет угловой скорости 33 об/мин? б) Чему равно угловое ускорение диска 2?

16. (II) Колесо начинает вращаться из состояния покоя с угловым ускорением α относительно неподвижной оси вращения. а) Запишите выражения для составляющих линейного ускорения a_T и a_c точки P на колесе, расположенной на расстоянии R от оси вращения, в зависимости от α, R и времени t. б) Пусть ϕ - угол между направлением вектора линейного ускорения **a** и прямой, проходящей через точку P и ось вращения в плоскости колеса. Выразите ϕ через полное число оборотов колеса N.

17. (II) Колеса автомобиля совершают 55 оборотов за промежуток времени, в течение которого скорость равномерно уменьшилась от 80 до 55 км/ч. Диаметр колеса равен 1,0 м. а) Чему было равно угловое ускорение колеса? б) Если автомобиль продолжает замедляться с тем же ускорением, то сколько времени ему понадобится до полной остановки?

18. (II) Велосипед за 10,0 с разгоняется из состояния покоя до скорости 12 м/с. С какой скоростью будет двигаться верхняя точка покрышки колеса (диаметр покрышки 68 см) через 4,0 с после начала движения? (*Подсказка*: в любой момент времени нижняя точка колеса соприкасается с землей и, следовательно, в этот момент времени покоится относительно земли.)

Раздел 9.3

19. (II) Ось колеса закреплена в опорах, которые покоятся относительно поворотного круга, как показано на рис. 9.27. Колесо вращается

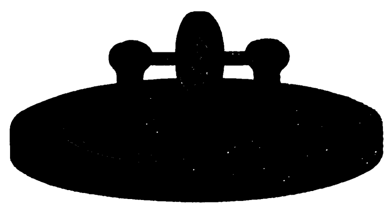


Рис. 9.27.

с угловой скоростью $\omega_1 = 60$ рад/с относительно его оси, а поворотный круг вращается со скоростью $\omega_2 = 45$ рад/с вокруг вертикальной оси. (Направления движения указаны на рисунке стрелками.) а) Как направлены угловые скорости ω_1 и ω_2? б) Чему равна результирующая угловая скорость колеса с точки зрения внешнего наблюдателя в тот момент времени, когда система находится в положении, изображенном на рисунке? Вычислите величину и укажите направление угловой скорости. в) Каковы величина и направление углового ускорения в этот момент времени?

Раздел 9.4

20. (I) Чему равен наибольший момент силы, создаваемый велосипедистом массой 60 кг, когда он поднимается в гору и давит на каждую педаль всем своим весом? Каждая педаль при вращении описывает окружность радиусом 18 см.

21. (II) Колесо диаметром 24,0 единицы вращается в плоскости xy относительно оси z, которая проходит через его центр. В некоторый момент времени к точке на ободе колеса, которая в данный момент времени находится на оси x, прикладывается сила $\mathbf{F} = -41{,}2\mathbf{i} + 30{,}6\mathbf{j}$. Чему равен момент силы относительно оси вращения в это время?

Раздел 9.5

22. (I) Точильный камень массой 4 кг в форме цилиндра радиусом 0,10 м из состояния покоя необходимо ускорить при постоянном по величине угловом ускорении до частоты вращения 1800 об/с за промежуток времени 5,0 с. Найдите момент силы, который должен при этом создавать двигатель.

23. (I) Четыре одинаковых тела (массой M каждое) расположены на плоскости в вершинах квадрата со стороной s. Чему равен момент инерции этой системы относительно оси, проходящей через одно из тел перпендикулярно плоскости?

24. (I) Человек действует с силой 18 Н на край двери шириной 84 см. Чему равна величина момента этой силы, если сила действует а) перпендикулярно двери; б) под углом 60° к плоскости двери?

25. (I) Вычислите момент инерции твердого шара массой 10 кг и радиусом 0,20 м относительно оси вращения, проходящей через его центр.

26. (I) Твердое цилиндрическое колесо диаметром 12,0 м и массой 200 кг из состояния покоя за 3,0 мин достигает частоты вращения 200 об/мин. Вычислите: а) угловое ускорение колеса; б) силу, действующую на колесо со стороны веревки, намотанной вокруг него.

27. (II) Шар массой 2,4 кг, закрепленный на конце легкого стержня, вращается по горизонтальной окружности радиусом 1,2 м. Вычислите: а) момент инерции шара; б) момент силы, необходимой для того, чтобы шар вращался с постоянной угловой скоростью, если со стороны воздуха на шар действует сила сопротивления 0,020 Н.

28. (II) Точильный камень выполнен в виде однородного цилиндра радиусом 8,2 см и массой 0,88 кг. Вычислите: а) его момент инерции; б) момент силы, необходимый для того, чтобы покоящийся в начальный момент камень ускорить за 4,0 с таким образом, чтобы его частота вращения стала равной 1200 об/мин, если на камень действует также момент силы трения 0,014 Н · м.

29. (II) Чему равен радиус инерции колеса массой 13,6 кг, если под действием момента силы 3,2 Н · м оно из состояния покоя за 10 с ускоряется до 600 об/мин?

30. (II) Твердый шар диаметром 0,84 м под действием момента силы 12,3 Н · м равномерно ускоряется из состояния покоя за 15,0 с и совершает при этом 180 полных оборотов вокруг оси, проходящей через центр шара. Чему равна масса шара?

31. (II) Карусель из состояния покоя ускоряется за 34 с до угловой скорости 3,0 рад/с. Предполагая, что карусель представляет собой однородный диск радиусом 8,0 м и массой 31 000 кг, вычислите необходимый для этого момент сил.

32. (II) Четыре одинаковых тела (масса каждого M) укреплены на прямом невесомом вертикальном стержне на равных расстояниях L друг от друга. Система вращается относительно оси, проходящей через тело, закрепленное на нижнем конце стержня, перпендикулярно стержню. а) Чему равен момент инерции системы относительно этой оси? б) Чему равна наименьшая сила, которую нужно приложить к наиболее удаленной от оси вращения массе, чтобы сообщить системе угловое ускорение α? Каково направление этой силы?

33. (II) Колесо массой M и радиусом R_0 стоит вертикально на полу перед ступенькой высотой $h (h < R_0)$ таким образом, что касается ее. Какую минимальную силу F в горизонтальном направлении нужно приложить к оси колеса, чтобы оно вкатилось на ступеньку?

34. (II) Пусть сила T натяжения нити, намотанной вокруг колеса в примере 9.9 (рис. 9.14) зависит от времени по закону $T = 3{,}00t - 0{,}20t^2$, где T измеряется в ньютонах, а время t – в секундах. Если в начальный момент времени колесо покоилось, то чему будет равна линейная скорость точки обода через 8,0 с после начала вращения колеса?

35. (II) Ротор центрифуги, вращавшийся с частотой 10 000 об/мин, останавливается под действием момента силы трения 0,20 Н · м. Если масса ротора 4,3 кг, а радиус инерции 0,070 м, то сколько оборотов совершит ротор до полной остановки? За какой промежуток времени произойдет полная остановка?

36. (II) На рис. 9.28 изображено предплечье руки, сообщающей шару массой 10 кг угловое ускорение 8,0 м/с^2 за счет действия трехглавой мышцы (трицепса). Вычислите: а) момент силы, необходимый, чтобы сообщить шару такое угловое ускорение; б) силу, которую создает трицепс. Массой руки можно пренебречь.

37. (III) Через блок перекинута веревка, на концах которой закреплены грузы массами 3,20 и 3,40 кг. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом 3,0 см и массой 0,80 кг. а) Если бы блок вращался без трения, то какое ускорение было бы у обоих грузов? б) Чему равен средний момент силы трения в блоке,

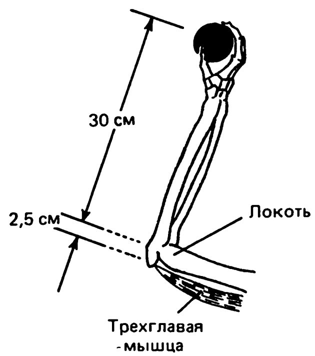


Рис. 9.28.

если известно, что более тяжелый груз, движущийся с направленной вниз скоростью 0,20 м/с, приходит в состояние покоя через 6,2 с?

38. (III) Тонкий стержень длиной L установлен вертикально на столе. Стержень начинает падать, но его нижний конец при этом не скользит. а) Выразите угловую скорость стержня как функцию угла ϕ, который он составляет с поверхностью стола. б) Чему была равна скорость верхнего конца стержня непосредственно перед тем, как он коснулся стола?

39. (III) Предположим, что бросок мяча массой 1,0 кг совершается исключительно за счет предплечья, которое вращается относительно локтевого сустава под действием трехглавой мышцы (рис. 9.28). Первоначально покоящийся мяч достигает скорости 10,0 м/с за время $t = 0{,}22$ с и в этот момент отпускается. Вычислите: а) угловое ускорение предплечья; б) силу, создаваемую трехглавой мышцей. Предположите, что масса предплечья равна 3,2 кг и оно вращается как однородный стержень относительно оси, проходящей через его конец.

40. (III) Метатель молота за четыре оборота сообщает первоначально покоящемуся молоту массой 7,3 кг скорость 27,2 м/с, после чего его бросает. Предположив, что угловая скорость молота увеличивается равномерно и радиус окружности, описываемый молотом, равен 2,0 м, вычислите: а) угловое ускорение; б) (линейное) тангенциальное ускорение; в) центростремительное (радиальное) ускорение молота непосредственно перед его бросанием; г) результирующую силу, действующую на молот со стороны атлета непосредственно перед бросанием; д) угол, который эта сила составляет с радиусом окружности, проведенным через точку, в которой молот был брошен.

* Раздел 9.6

41. (I) Вычислите момент инерции колеса велосипеда диаметром 67 см. Масса обода колеса с покрышками составляет 1,3 кг. Почему при расчете можно пренебречь массой ступицы колеса?

*42. (I) Молекула кислорода состоит из двух атомов кислорода общей массой $5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг, момент инерции которых относительно оси, перпендикулярной прямой, соединяющей атомы, и проходящей через середину этой прямой, равен $1{,}9 \cdot 10^{-46}$ кг$\cdot$м^2. С помощью этих данных получите оценку эффективного расстояния между атомами кислорода в молекуле.

*43. (I) Докажите с помощью теоремы о параллельных осях, что момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов, равен $I = (1/3)ML^2$. Учтите при этом, что если ось проходит через центр стержня, то момент инерции равен $I = (1/12)ML^2$ (см. выражения на рис. 9.13, *е* и *ж*).

*44. (II) Используя теорему о перпендикулярных осях и рис. 9.13, *з*, найдите выражение для момента инерции тонкой квадратной пластинки (со стороной s) относительно оси вращения, проходящей через ее центр а) вдоль диагонали пластинки; б) параллельно одной из сторон пластинки.

*45. (II) Вычислите момент инерции тонкого обруча радиусом R_0 и массой M относительно а) оси, проходящей через его центр и лежащей в плоскости обруча; б) оси, касательной к внешнему краю обруча.

*46. (II) Две однородные твердые сферы массой M и радиусом r_0 каждая соединены между собой тонким невесомым стержнем длиной r_0 таким образом, что центры сфер находятся друг от друга на расстоянии $3r_0$. а) Чему равен момент инерции системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему? б) Какая относительная ошибка возникла бы при вычислении, если бы мы рассматривали массу каждой сферы сосредоточенной в ее центре, что значительно упростило бы расчеты?

*47. (II) Два однородных цилиндрических диска радиусами R_1 и R_2 помещены друг за другом так, что соприкасаются плоскими поверхностями и их центры совмещены. Диски имеют одинаковую толщину и изготовлены из материала одной и той же плотности. Найдите выражение для момента инерции системы относительно оси, проходящей через центры дисков перпендикулярно их плоским поверхностям, через радиусы R_1, R_2 и полную массу системы M.

*48. (II) На тонкое колесо массой 3,0 кг и радиусом 26 см помещен на расстоянии 22 см от центра колеса небольшой груз массой 0,50 кг. Вычислите: а) положение центра масс колеса с грузом; б) момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр колеса перпендикулярно его плоской поверхности.

*49. (III) Рассчитайте момент инерции однородного тонкого стержня длиной L относительно оси, проходящей через центр стержня перпендикулярно ему (рис. 9.13, *е*).

*50. (III) а) Вычислите момент инерции однородной плоской прямоугольной пластинки размером $l \times w$ (рис. 9.13, *з*) относительно оси, проходящей через центр пластинки перпендикулярно ее плоскости. б) Чему равны моменты инерции относительно каждой из осей, проходящих через центр пластинки и параллельных ее сторонам?

*51. (III) Определите момент инерции однородного куба с ребром длиной s относительно оси, проходящей через ЦМ куба и перпендикулярной одной из его граней.

*52. (III) Плотность материала, из которого изготовлен стержень длиной L, равномерно возрастает от значения ρ_0 на одном конце стержня до $2\rho_0$ на другом конце. Вычислите момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его геометрический центр.

Раздел 9.8

53. (I) а) Чему равен момент импульса точильного камня массой 2,3 кг, выполненного в виде однородного цилиндра радиусом 12 см, когда он вращается со скоростью 1500 об/мин? б) Какой момент силы нужно приложить к этому камню, чтобы остановить его за 7,0 с?

54. (I) Вычислите момент импульса Земли: а) относительно собственной оси вращения (предполагая, что Земля – это однородная сфера); б) при ее движении по орбите вокруг Солнца.

55. (I) Человек стоит с вытянутыми в горизонтальном направлении руками на платформе, которая вращается со скоростью 1,20 об/с. Если человек поднимает руки вверх, то скорость вращения уменьшается до 0,80 об/с. а) Почему уменьшается скорость? б) Что вызывает изменение момента инерции человека?

56. (I) Прыгун в воду, изображенный на рис. 9.21, может уменьшить свой момент инерции примерно в 3,5 раза, если он согнется из распрямленного состояния. Если в согнутом состоянии он совершает два оборота за 1,5 с, то чему равна его угловая скорость (в об/с), когда он находится в распрямленном состоянии?

57. (II) Карусель диаметром 4,5 м свободно вращается с угловой скоростью 0,70 рад/с; ее полный момент инерции равен 1750 кг·м^2. Стоящие на земле четыре человека массой по 65 кг одновременно прыгают на край карусели. Чему после этого будет равна угловая скорость карусели? Какой была бы угловая скорость карусели, если бы люди, стоящие вначале на карусели, в некоторый момент спрыгнули на землю?

58. (II) Предположим, что человек массой 60 кг стоит на краю поворотного круга карусели диаметром 6,0 м, которая может вращаться без трения вокруг своей оси и имеет момент инерции 1800 кг·м^2. В начальный момент времени поворотный круг карусели находился в покое, но, когда человек начинает бежать со скоростью 4,2 м/с (относительно поворотного круга) по его периметру, карусель начинает вращаться в противоположную сторону. Вычислите угловую скорость поворотного круга карусели.

59. (II) Игрушечный поезд может двигаться в горизонтальной плоскости по колее в виде окружности радиусом R, проложенной по краю круглого дощатого диска, имеющего массу M и постоянную толщину. Диск может свободно вращаться без трения относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. В начальный момент времени система находится в покое. Какую массу должен иметь поезд, чтобы он оставался в одном положении относительно поверхности земли независимо от того, какова скорость его движения относительно колеи?

Раздел 9.9

60. (I) Вычислите скорость поступательного движения цилиндра у основания наклонной плоскости высотой 18 м. Считайте, что в начальный момент времени цилиндр покоился в верхней точке наклонной плоскости и скатывался без проскальзывания.

61. (I) Момент инерции ротора центрифуги равен $4{,}0 \cdot 10^{-2}$ кг·м^2. Какое количество энергии потребуется, чтобы из состояния покоя привести его во вращение с частотой 10 000 об/мин?

62. (I) Карусель имеет массу 1500 кг и радиус инерции 18 м. Какую работу нужно затратить, чтобы из состояния покоя привести карусель во вращение с частотой один оборот за 7,0 с?

63. (I) Маховик двигателя автомобиля при частоте вращения 4000 об/мин развивает момент силы 280 Н·м. Чему равна мощность двигателя в лошадиных силах?

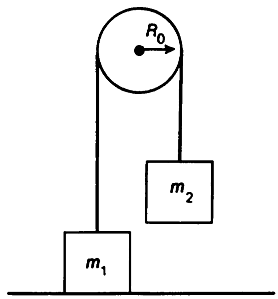


Рис. 9.29.

64. (I) Оцените приближенно кинетическую энергию Земли относительно Солнца, представив кинетическую энергию в виде суммы двух членов: а) энергии, возникающей из-за вращения Земли относительно собственной оси с периодом, равным суткам; б) энергии, обусловленной обращением Земли вокруг Солнца с периодом, равным году. (Считайте, что Земля является однородным шаром массой $6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг и радиусом $6{,}4 \cdot 10^{6}$ м, а расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5 \cdot 10^{8}$ км.)

65. (II) При выключении двигателя однородная цилиндрическая платформа массой 180 кг и радиусом 4,5 м замедляется, и за 18 с угловая скорость платформы уменьшается от 3,2 об/с до нуля. Вычислите приближенно мощность двигателя (в л. с.), необходимую для поддержания постоянной скорости вращения 3,2 об/с.

66. (II) Два тела массами соответственно $m_1 = 25$ кг и $m_2 = 32$ кг соединены веревкой, перекинутой через блок, как показано на рис. 9.29. Блок представляет собой цилиндр радиусом 0,30 м и массой 8,8 кг. В начальный момент времени тело массой m_1 находится на поверхности земли, а тело массой m_2 на высоте 2,5 м от земли. Систему затем предоставляют самой себе. С помощью закона сохранения энергии вычислите скорость тела массой m_2 непосредственно перед соударением с Землей. Считайте, что трение в блоке отсутствует.

67. (II) Шест высотой 5,0 м удерживается в равновесии, стоя вертикально на одном из своих концов. Чему будет равна скорость верхнего конца шеста непосредственно перед тем, как он коснется земли? Считайте, что нижний конец шеста не скользит.

68. (II) Тонкий однородный стержень длиной L и массой M свободно подвешен за один конец. Его отводят на угол θ и отпускают. Чему будут равны угловая скорость стержня и линейная скорость свободного конца стержня в низшей точке его траектории, если трением можно пренебречь?

69. (II) Одной из возможностей конструирования экологически чистого автомобиля является использование запасающего энергию тяжелого маховика. Предположим, что масса автомобиля с маховиком равна 1400 кг, диаметр однородного цилиндрического маховика равен 1,50 м, масса его равна 240 кг. Автомобиль должен проходить расстояние 300 км, не нуждаясь в «раскрутке» маховика. а) Сделайте следующие разумные предположения: средняя тормозящая сила трения равна 500 Н; разгон из состояния покоя до скорости 90 км/ч требует 20 оборотов маховика с ускорением, причем затраты энергии маховика при подъеме автомобиля вверх равны по величине возврату энергии маховику при спуске. Покажите, что при этом полная энергия, которую следует запасти в маховике, составляет около $1{,}6 \cdot 10^{8}$ Дж. б) Чему равна угловая скорость маховика, когда он полностью «заряжен» энергией? в) Какое время (примерно) понадобится на то, чтобы полностью «зарядить» маховик энергией перед поездкой, используя двигатель мощностью 150 л. с.?

70. (II) Узкая сплошная катушка ниток имеет массу M и радиус R. Если вы тянете за нитку вверх так, что ЦМ катушки остается на месте (т. е. «зависает» в воздухе), то а) какую силу следует приложить к нити? б) Какую работу вы совершите за то время, пока катушка вращается с угловой скоростью ω?

71. (II) Полый цилиндр (или обруч) катится по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 3{,}4$ м/с и достигает основания наклонной плоскости с углом наклона 20°. а) Как далеко вкатится цилиндр на наклонную плоскость? б) Как долго он будет находиться на наклонной плоскости, прежде чем скатится с нее назад к основанию?

72. (II) Покажите, что шар в примере 9.18 будет соскальзывать, если угол наклонной плоскости превысит значение $\theta = \operatorname{arctg}(7\mu_s/2)$, где μ_s – коэффициент трения покоя.

73. (II) а) Вычислите в примере 9.16 работу, которую должен совершить человек, чтобы уменьшить радиус круговой траектории от значения R_1 до R_2. (Для этого потребуется интеграл.) б) Определите изменение кинетической энергии тела массой m за это время и сравните ее с работой, вычисленной в п. «а» задачи.

74. (II) Человек массой 70 кг стоит на небольшой вращающейся платформе с вытянутыми в стороны руками. а) Оцените момент инерции человека, рассматривая его тело (включая голову и ноги) в виде цилиндра массой 60 кг, радиусом 12 см и высотой 1,70 м, а руки в виде тонких стержней массой 5,0 кг и длиной 60 см

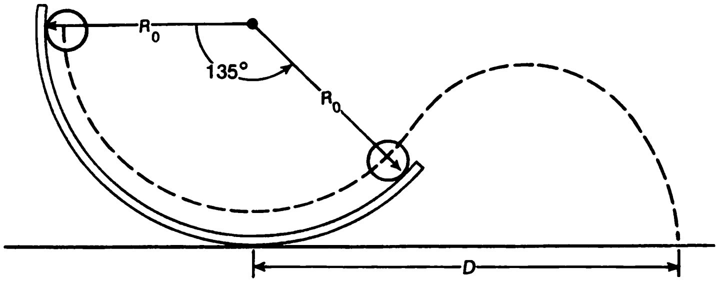


Рис. 9.30.

каждый, прикрепленных к цилиндру под прямым углом. б) Используя то же приближение, оцените момент инерции в случае, когда руки человека опущены и прижаты к бокам. в) Если в положении с вытянутыми руками период обращения равен 1,5 с, то каков будет этот период в положении с руками, опущенными по бокам? Моментом инерции платформы пренебрегите. г) Определите изменение кинетической энергии, когда человек поднимает руки, переводя их из вертикального в горизонтальное положение. д) На основании ответа на вопрос «г» укажите, в каком случае человеку труднее поднять руки – когда он вращается или когда он покоится?

75. (II) Пусть в задаче 74 человек держит в каждой руке гирю массой 15 кг. Чему равно отношение угловых скоростей для двух положений, когда руки человека подняты горизонтально и опущены вниз, т.е. прижаты к телу?

76. (II) Небольшой шар радиусом $r = 5{,}0$ см катится без скольжения по круговому желобу (рис. 9.30) радиусом $R_0 = 30{,}0$ см. Шар начинает скатываться с высоты R_0 над поверхностью земли, которой касается дно желоба. На каком расстоянии D от дна желоба упадет шар на землю, если он отрывается от желоба, пройдя по нему дугу, стягиваемую углом 135°?

77. (III) В примерах 9.17 и 9.18 предположите, что шар не только катится, но и скользит. Для определенности считайте, что $\theta = 30°$, а $\mu = \mu_s = \mu_k = 0{,}10$; высота наклонной плоскости равна $H = 2{,}0$ см, а шар имеет радиус $r_0 = 10$ см и массу 850 г. Скатывание начинается из состояния покоя на вершине наклонной плоскости. Определите: а) скорость ЦМ шара в момент времени, когда он достигает основания наклонной плоскости; б) полную кинетическую энергию шара у основания; в) потерю механической энергии. г) Определите те же величины для случая, когда $\mu = 0{,}30$ и проскальзывание отсутствует; сравните полученные вами результаты.

78 (III) Нить одним из своих концов прикреплена к грузу, который может скользить по наклонной плоскости; другой ее конец намотан вокруг цилиндра, покоящегося в углублении на вершине наклонной плоскости (рис. 9.31). Определите скорость груза после того, как он пройдет расстояние 1,20 м вдоль наклонной плоскости, если он начинает движение из состояния покоя. Считайте при этом, что а) трение отсутствует и б) коэффициент трения между всеми поверхностями одинаков и равен $\mu = 0{,}15$. (*Подсказка*: в случае «б» определите сначала нормальную силу, действующую на цилиндр, и сделайте любые необходимые разумные предположения.)

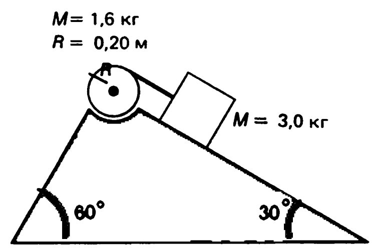


Рис. 9.31.