10 Вращательное движение; общий случай

В гл. 9 мы рассмотрели кинематику и динамику вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси в инерциальной системе отсчета. Мы изучали это движение с помощью законов, аналогичных законам Ньютона для поступательного движения, а также на основе понятий момента импульса и кинетической энергии вращения. При этом оказалось, что момент силы играет для вращательного движения ту же роль, что и сила для поступательного.

Для того чтобы ось вращающегося тела оставалась неподвижной, обычно требуется закрепить ее с помощью внешних опор (например, в подшипниках на концах оси). Если это условие не выполнено, то описание движения тела оказывается значительно более сложным. Полный анализ вращательного движения тела (или системы тел) в пространстве в общем случае слишком громоздок и сложен, и мы не будем обсуждать его в данной книге. Тем не менее в этой главе мы рассмотрим некоторые особенности вращательного движения в общем случае. Нами будет доказано несколько общих теорем, которые мы применим для описания некоторых интересных и не слишком сложных видов движения. В частности, мы обсудим векторный характер момента силы и момента импульса.

Значительную часть этой главы можно рассматривать как повторение материала гл. 9. Но внимательный читатель обнаружит, что применяемый в ней подход является более общим и полезным рассмотрением вращательного движения. Он основан на использовании векторного характера величин, описывающих вращательное движение, и позволяет вывести многие утверждения гл. 9. Материал, излагаемый в настоящей главе, играет важную роль и несколько превосходит по сложности большую часть этой книги. За исключением очень существенного разд. 10.1, посвященного векторному произведению, материал гл. 10 не связан с остальной частью книги и поэтому может рассматриваться как факультативный.

10.1. Векторное произведение

Для рассмотрения момента импульса и момента силы в общем случае необходимо ввести понятие *векторного произведения.*

Векторным произведением двух векторов **A** и **B** называется **вектор C** = **A** × **B**, *длина которого равна*

$$C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB\sin\theta, \tag{10.1}$$

где θ—*угол* (< 180°) *между векторами* **A** *и* **B**, *и который направлен перпендикулярно как вектору* **A**, *так и вектору* **B** *в соответствии с правилом правой руки* (рис. 10.1). Согласно этому правилу (см. рисунок), правую руку направляют вдоль вектора **A** таким образом, чтобы, сгибая пальцы, можно было направить их вдоль вектора **B**. Если рука будет расположена в соответствии с этим правилом, то большой палец укажет направление вектора **C** = **A** × **B**.

Векторное произведение двух векторов, определяемое выражением (10.1), представляет собой вторую полезную операцию умножения двух векторов. Первая операция умножения векторов, рассмотренная в разд. 6.2, является скалярным произведением $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$. Хотя произведение двух векторов можно определить и другими способами, эти две операции имеют большое практическое значение для физики, поскольку многие физические величины можно представить в виде либо скалярного, либо векторного произведения двух других векторных величин.

Запишем некоторые свойства векторного произведения:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0, \tag{10.2а}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \tag{10.2б}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad \text{[дистрибутивный закон]}, \tag{10.2в}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{10.2г}$$

Равенство (10.2а) следует из выражения (10.1) (поскольку θ = 0); то же относится к (10.2б), так как величина векторного произведения **B** × **A** точно такая же, как и произведения **A** × **B**, но, согласно правилу правой руки,

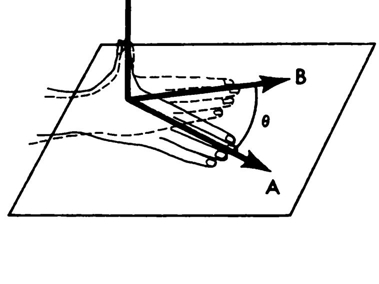

Рис. 10.1. Вектор **C** = **A** × **B** перпендикулярен плоскости, проведенной через векторы **A** и **B**; его направление определяется по правилу правой руки.

эти векторы направлены в противоположные стороны. Таким образом, для векторного произведения существенно, в каком порядке располагаются в нем векторы; изменение относительного расположения векторов приводит к изменению результата. Это означает, что свойство перестановочности (коммутативности), справедливое для скалярного произведения двух векторов и для произведения скаляров, *не* выполняется в случае векторного произведения. Доказательство соотношений (10.2в) и (10.2г) мы предлагаем читателю в качестве упражнения. Заметим, что в силу равенства (10.2б) порядок сомножителей в двух произведениях в правой части соотношения (10.2г) менять нельзя.

10.2. Момент силы

Одним из примеров величин, описываемых с помощью векторного произведения, является момент силы. Чтобы показать это, рассмотрим тонкий диск, изображенный на рис. 10.2, который может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр в точке O. Сила **F** действует на край диска в точке, положение которой относительно точки O определяется радиус-вектором **r**, как показано на рис. 10.2. Сила **F** стремится повернуть диск (который, как мы считаем, первоначально находился в покое) против часовой стрелки, так что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ будет направлена перпендикулярно плоскости рисунка на читателя (вспомните правило правой руки из разд. 9.3). Момент силы за счет **F** увеличивает угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, поэтому угловое ускорение $\boldsymbol{\alpha}$ также направлено в сторону читателя вдоль оси вращения. В гл. 9 мы установили, что угловое ускорение тела, вращающегося относительно неподвижной оси, и приложенный к нему момент силы связаны соотношением

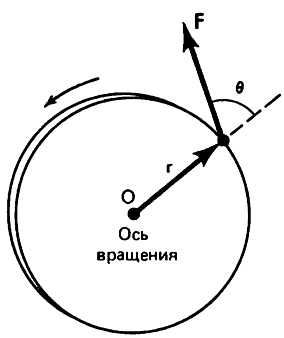

Рис. 10.2. Момент силы, создаваемый силой **F**, заставляет диск вращаться против часовой стрелки, так что векторы угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и углового ускорения $\boldsymbol{\alpha}$ направлены на читателя.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\alpha,$$

где L – момент импульса тела, а I – момент инерции [см. формулы (9.18) и (9.12)]. Это скалярное выражение является вращательным аналогом формулы $F = dp/dt$, и можно было бы получить вращательный аналог векторного выражения $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. В примере на рис. 10.2 для этого мы должны направить вектор $\boldsymbol{\tau}$ вдоль оси вращения в сторону читателя, поскольку так направлен вектор α ($\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$), а величина момента силы должна быть равна [см. формулы (9.8) и рис. 10.2] $\tau = rF_\perp = rF\sin\theta$. Эти свойства вектора $\boldsymbol{\tau}$ можно обеспечить, если представить его как векторное произведение радиус-вектора **r** и силы **F**:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{10.3}$$

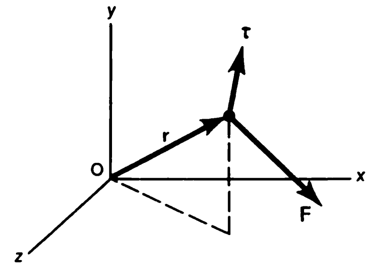

Рис. 10.3. $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор.

Согласно определению векторного произведения (10.1), величина (длина) вектора $\boldsymbol{\tau}$ равна $rF\sin\theta$, а направлен он вдоль оси вращения, как и должно быть в этом частном случае.

В разд. 10.3–10.6 мы покажем, что если выражение (10.3) рассматривать как общее определение момента силы, то векторное соотношение $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ будет справедливо в общем случае. Таким образом, мы установили здесь, что выражение (10.3) представляет собой общее определение момента силы. Оно содержит информацию как о величине, так и о направлении вектора $\boldsymbol{\tau}$. Следует заметить, что в это определение входит радиус-вектор $\mathbf{r}$ (относительно начала системы координат), а *не* расстояние R (расстояние, измеренное по перпендикуляру от оси вращения), которое использовалось при определении момента инерции. Иными словами, момент силы вычисляется относительно точки.

Для частицы массой m, к которой приложена сила $\mathbf{F}$, момент силы относительно точки O записывается в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы относительно точки O (рис. 10.3). Если имеется система частиц (которые могут образовывать твердое тело), то полный момент сил $\boldsymbol{\tau}$ такой системы равен сумме моментов сил, действующих на каждую частицу:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й частицы, а $\mathbf{F}_i$ – сила, приложенная к i-й частице.

10.3. Момент импульса частицы

В наиболее общем виде второй закон Ньютона для поступательного движения частицы (или системы частиц) можно записать через импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ с помощью формулы (8.9) [или (8.12)]:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt.$$

Вращательным аналогом импульса является *момент импульса*. Точно так же, как импульс $\mathbf{p}$ связан с силой $\mathbf{F}$, можно ожидать, что момент импульса связан с моментом силы. Действительно, в гл. 9 мы установили, что это имеет место для частного случая твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Теперь мы убедимся в том, что эта связь существует и в общем случае. Рассмотрим сначала отдельную частицу.

Пусть частица массой m имеет импульс $\mathbf{p}$, а ее положение в некоторой инерциальной системе отсчета характеризуется радиус-вектором $\mathbf{r}$ относительно начала координат O. Тогда момент импульса $\boldsymbol{l}$ частицы относительно точки O дается векторным произведением векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$:

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \text{[частица]}. \tag{10.4}$$

Момент импульса является вектором[1]. Он перпендикулярен как вектору $\mathbf{r}$, так и вектору $\mathbf{p}$, и его направление определяется правилом правой руки (рис. 10.4), а его длина дается выражением

$$l = rp\sin\theta$$

или

$$l = rp_\perp = r_\perp p,$$

где θ – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$, а $p_\perp (= p\sin\theta)$ и $r_\perp$ $(= r\sin\theta)$ являются составляющими векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ и перпендикулярны соответственно $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$.

Найдем теперь соотношение между моментом импульса частицы и моментом силы, действующим на нее. Вычисляя производную от момента импульса $\boldsymbol{l}$ по времени, имеем

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Но

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0,$$

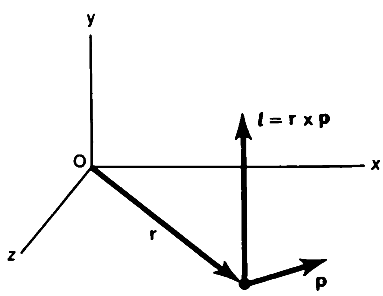

Рис. 10.4. Момент импульса частицы массой m равен $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.

[1] В действительности момент импульса $\boldsymbol{l}$ является псевдовектором (см. примечание в разд. 9.3). Заметим также, что как в предыдущей главе, так и в этой мы используем строчную букву $\boldsymbol{l}$ для обозначения момента импульса частицы, а прописную $\mathbf{L}$ – для системы частиц или тела.

поскольку в этом случае $\sin\theta = 0$. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Если обозначить результирующую силу, действующую на частицу, через $\mathbf{F}$, то в инерциальной системе отсчета $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ и

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}.$$

Но $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$ – это результирующий момент силы, действующий на частицу. Следовательно,

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt \quad \text{[частица; инерциальная система отсчета].} \tag{10.5}$$

Скорость изменения момента импульса частицы равна результирующему моменту силы, приложенному к этой частице! Уравнение (10.5) является вращательным аналогом второго закона Ньютона для частицы, записанным в его наиболее общем виде. Оно справедливо только в инерциальной системе отсчета, поскольку лишь в этом случае выполняется соотношение $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, которое было использовано при доказательстве.

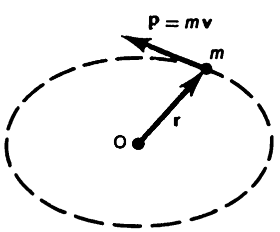

Рис. 10.5. Момент импульса частицы массой m, вращающейся по окружности радиусом $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$, равен $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ (пример 10.1).

Пример 10.1. Найдите момент импульса частицы массой m, движущейся со скоростью v по окружности радиусом r против часовой стрелки.

Решение. Значение момента импульса зависит от выбора начала координат O. Вычислим момент импульса $\mathbf{l}$ относительно центра окружности (рис. 10.5). Поскольку вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{p}$, то $l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = rmv$. Вектор $\mathbf{l}$ в соответствии с правилом правой руки перпендикулярен плоскости окружности и направлен в сторону читателя. Поскольку $v = \omega r$, можно написать

$$l = mvr = mr^2\omega = I\omega;$$

здесь мы учли, что момент инерции частицы, вращающейся относительно оси на расстоянии r от нее, равен $I = mr^2$.

10.4. Момент импульса и момент силы для системы частиц; общий случай движения

Рассмотрим систему n частиц, которые имеют моменты импульса $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Взаимное положение этих частиц может быть произвольным – от строго фиксированного относительно друг друга, как в твердом теле, до полностью независимого, как в системе невзаимодействующих частиц. Полный момент импульса $\mathbf{L}$ определяется как векторная сумма моментов импульса всех частиц системы:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i. \qquad (10.6)$$

Результирующий момент сил, действующий на систему, равен сумме моментов сил, действующих на каждую частицу:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i.$$

В эту сумму входят 1) внутренние моменты сил, создаваемые силами взаимодействия между частицами системы, и 2) внешние моменты сил, создаваемые внешними силами, действующими на систему. Согласно третьему закону Ньютона в его строгой форме (см. примечание в разд. 9.5), любая частица действует на другую частицу с силой, равной по величине и противоположной по направлению той силе, с которой вторая частица действует на первую; следовательно, сумма всех внутренних моментов сил равна нулю, а

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{\text{внешн}}.$$

Возьмем теперь производную по времени от обеих частей выражения (10.6) и, воспользовавшись соотношением (10.5) для каждой частицы, получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau},$$

или

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad \text{[инерциальная система отсчета].} \qquad (10.7\text{а})$$

(Для удобства мы опустили нижний индекс у момента сил $\boldsymbol{\tau}_{\text{внешн}}$.) Этот фундаментальный результат устанавливает, что скорость изменения полного момента импульса системы частиц (или твердого тела) равна результирующему (полному) моменту внешних сил, действующему на систему. Соотношение (10.7а) является вращательным аналогом соотношения (8.12) ($d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_{\text{внешн}}$) для поступательного движения и справедливо, когда векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\tau}$ вычисляются относительно точки, неподвижной в инерциальной системе отсчета. [При выводе соотношения (10.7а) мы использовали формулу (10.5), которая справедлива только в этом случае.] Соотношение (10.7а) справедливо также и в случае, когда $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$ вычисляются относительно точки, которая движется равномерно и прямолинейно в инерциальной системе отсчета, поскольку такая точка может рассматриваться как начало отсчета в другой инерциальной системе отсчета. Однако соотношение (10.7а) *не* справедливо в общем случае, когда $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$

вычисляются относительно точки, которая движется ускоренно, за исключением одного частного (но очень важного) случая, а именно когда эта точка является центром масс системы:

$$\frac{d\mathbf{L}_{ЦМ}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ЦМ}. \tag{10.7б}$$

Это соотношение справедливо независимо от того, как движется ЦМ системы. Вектор $\boldsymbol{\tau}_{ЦМ}$ – это результирующий момент внешних сил относительно ЦМ.

Формула (10.7б), в справедливости которой мы убедимся ниже, позволяет описывать произвольное движение частиц как сумму *поступательного* движения ЦМ и вращательного движения относительно ЦМ [1]. Мы уже использовали это выше (см. пример 9.18). В следующем (факультативном) разделе мы получим формулу (10.7б) с помощью законов Ньютона.

*10.5. Доказательство общего соотношения между τ и $\mathbf{L}$

Займемся теперь выводом формулы (10.7б). Пусть $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й частицы в инерциальной системе отсчета, а $\mathbf{r}_{ЦМ}$ – радиус-вектор ЦМ частицы в той же системе отсчета. Положение i-й частицы относительно ЦМ определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_i^*$ (рис. 10.6):

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ЦМ} + \mathbf{r}_i^*.$$

Взяв здесь производную по времени, получим

$$\mathbf{p}_i = m_i\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_{ЦМ}) = \mathbf{p}_i^* + m_i\mathbf{v}_{ЦМ}.$$

Момент импульса относительно ЦМ можно записать в

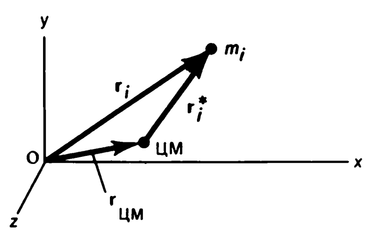

Рис. 10.6. Положение частицы массой m_i описывается в инерциальной системе отсчета радиус-вектором $\mathbf{r}_i$, а в СЦМ – радиус-вектором $\mathbf{r}_i^*$ (ЦМ системы может двигаться с ускорением); при этом $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_{ЦМ}$, где $\mathbf{r}_{ЦМ}$ – радиус-вектор ЦМ системы в инерциальной системе отсчета.

---

[1] Из выражения (9.22) или (9.23) следует, что полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии ЦМ и кинетической энергии вращения, т. е. КЭ = $КЭ_{ЦМ}$ + $КЭ_{вращ}$. Это утверждение справедливо только для энергии, но не для других величин, описывающих движение. Формула (10.7б) в совокупности с (8.12) ($d\mathbf{P}_{ЦМ}/dt = \mathbf{F}_{внешн}$) обеспечивает более общее описание движения.

виде

$$\mathbf{L}_{\text{ЦМ}} = \sum_i (\mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^*) = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times (\mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{\text{ЦМ}}).$$

Дифференцируя это равенство по времени, имеем

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i^*}{dt} \times \mathbf{p}_i^*\right) + \sum_i \left(\mathbf{r}_i^* \times \frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt}\right).$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения обращается в нуль: $\mathbf{v}_i^* \times m\mathbf{v}_i^* = 0$, поскольку $\mathbf{v}_i^*$ параллельна самой себе. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{\text{ЦМ}}) =$$

$$= \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} - \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i^*\right) \times \frac{d\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}}{dt}.$$

Здесь второе слагаемое в правой части обращается в нуль, так как в соответствии с (8.2) мы имеем $\sum m_i \mathbf{r}_i^* = M\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}^*$, а по определению $\mathbf{r}_{\text{ЦМ}}^* = 0$, поскольку положение ЦМ выбрано за начало отсчета системы координат. Кроме того, согласно второму закону Ньютона, мы имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ – сила, действующая на i-ю частицу массой m_i. (Заметим, что $d\mathbf{p}_i^*/dt \neq \mathbf{F}_i$, так как ЦМ может двигаться с ускорением и второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета не выполняется.) Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{ЦМ}}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{\tau}_i)_{\text{ЦМ}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ЦМ}};$$

здесь $\boldsymbol{\tau}_{\text{ЦМ}}$ – результирующий внешний момент сил, действующий на всю систему и вычисленный относительно ее ЦМ. Как уже отмечалось, при суммировании моментов сил $\boldsymbol{\tau}_i$, согласно третьему закону Ньютона, взаимно сокращаются моменты внутренних сил, действующих в системе. Последнее из полученных соотношение совпадает с уравнением (10.7б); следовательно, наше доказательство завершено.

Подводя итог, отметим, что соотношение

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

в общем случае *несправедливо*. Оно справедливо только при условии, что $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$ вычисляются либо 1) относительно начала инерциальной системы отсчета, либо 2) относительно ЦМ системы частиц (или твердого тела).

10.6. Момент импульса и момент силы для твердого тела

Рассмотрим теперь вращение твердого тела относительно оси, которое имеет фиксированное направление в пространстве. Воспользуемся общими принципами, развитыми ранее в этой главе, для обоснования частных утверждений, которые были использованы нами в гл. 9.

Вычислим проекцию момента импульса тела на ось вращения. Обозначим эту проекцию через L_ω, поскольку угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси вращения. Для каждой частицы твердого тела имеем

$$\boldsymbol{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i .$$

Если угол между моментом импульса $\boldsymbol{l}_i$ и осью вращения тела обозначить через θ (рис. 10.7), то проекция вектора $\boldsymbol{l}_i$ на ось вращения запишется в виде

$$l_{i\omega} = r_i p_i \cos\theta = m_i v_i r_i \cos\theta ,$$

где m_i – масса, а v_i – скорость i-й частицы. Далее, скорость v_i связана с угловой скоростью вращения тела ω соотношением $v_i = R_i\omega$, где R_i – расстояние по перпендикуляру от оси вращения до частицы массой m_i. Кроме того, из рис. 10.7 мы видим, что $R_i = r_i \cos\theta$. Таким образом,

$$l_{i\omega} = m_i v_i (r_i \cos\theta) = m_i R_i^2 \omega .$$

После суммирования по всем частицам системы находим

$$L_\omega = \sum_i l_{i\omega} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega .$$

Учитывая далее, что $\sum_i m_i R_i^2$ – это момент инерции I тела относительно данной оси вращения, проекцию полного

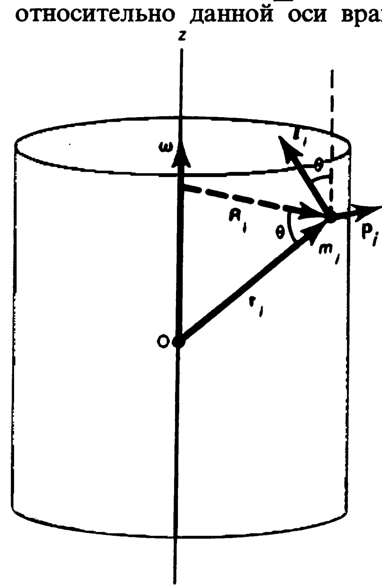

Рис. 10.7. К расчету вектора $\mathbf{L}_z = \sum (l_z)_i$.

момента импульса тела на ось вращения тела можно записать в виде

$$L_\omega = I\omega. \tag{10.8}$$

Заметим, что при выводе формулы (10.8) не имеет значения, где мы выбираем начало отсчета O (для измерения $\mathbf{r}_i$), если оно находится на оси вращения. Выражение (10.8) совпадает с формулой (9.17), но теперь оно получено с помощью общего определения момента импульса.

Выражение (10.7) представляет собой соотношение между моментом импульса и моментом силы:

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{L}$ вычисляются относительно либо начала инерциальной системы отсчета, либо системы ЦМ. Это векторное соотношение, и, следовательно, оно справедливо для любой проекции. Таким образом, для твердого тела проекция момента импульса на ось вращения запишется в виде

$$\tau_\omega = \frac{dL_\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.$$

Это выражение справедливо для вращательного движения твердого тела относительно закрепленной по отношению к нему оси, которая либо неподвижна в инерциальной системе отсчета, либо проходит через ЦМ этого тела. Полученное выражение эквивалентно формулам (9.12) и (9.13), которые, как мы теперь установили, являются частными случаями уравнения (10.7): $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$.

В случае когда тело вращается относительно оси симметрии, проходящей через ЦМ тела, можно написать

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad \text{[ось вращения совпадает с осью симметрии, проходящей через ЦМ тела];} \tag{10.9}$$

здесь $\mathbf{L}$ измеряется относительно ЦМ тела. Чтобы показать правильность такой записи, обратимся снова к рис. 10.7. Хотя $\mathbf{l}_i$ (момент импульса i-частицы) не направлен вдоль оси вращения тела, но при сложении его с моментом импульса такой же частицы, расположенной точно напротив i-й частицы по другую сторону оси вращения, вектор суммы моментов импульса будет направлен вдоль оси вращения. Поскольку симметричное тело состоит из таких пар частиц, сумма моментов импульсов по всем парам будет также направлена вдоль оси вращения. Следовательно, для тела, вращающегося относительно оси симметрии, момент импульса направлен вдоль оси вращения и поэтому $L = L_\omega$; таким образом, выражение (10.9) доказано.

Пример 10.2. *Машина Атвуда* состоит из двух тел массами m_1 и m_2, подвешенных на невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок (рис. 10.8.). Найдем ускорение тел m_1 и m_2, если радиус блока равен R_0, а его момент инерции относительно оси вращения равен I, и сравним полученный результат со значениями ускорений, когда моментом инерции блока пренебрегают.

Решение. Вычислим момент импульса системы относительно оси, проходящей через центр блока (точка O). Момент импульса блока равен $I\omega$, где $\omega = v/R_0$ и v – скорость тел m_1 и m_2 в любой момент времени. Моменты импульса тел m_1 и m_2 равны соответственно $R_0 m_1 v$ и $R_0 m_2 v$. Полный момент импульса системы записывается в виде

$$L = (m_1 + m_2)vR_0 + I(v/R_0).$$

Результирующий момент внешних сил дается выражением

$$\tau = m_2 g R_0 - m_1 g R_0,$$

в котором мы учли, что момент внешней силы реакции, действующей на блок со стороны оси, равен нулю, поскольку плечо этой силы относительно оси вращения равно нулю. Используя формулу (10.7а):

$$\tau = dL/dt,$$

находим

$$(m_2 - m_1)gR_0 = (m_1 + m_2)R_0\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R_0}\frac{dv}{dt}.$$

Отсюда получим следующее выражение для a:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2) + I/R_0^2}.$$

Если пренебречь моментом инерции блока I, то ускорение равно $a = (m_2 - m_1)g/ /(m_2 + m_1)$. Отсюда мы видим, что наличие у блока момента инерции приводит к замедлению системы. Это именно тот результат, который мы ожидали.

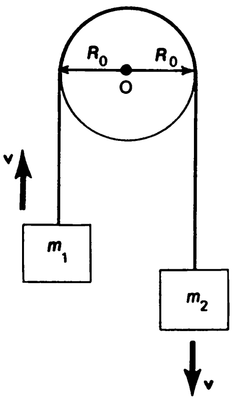

Рис. 10.8. Машина Атвуда.

Хотя формула (10.9) во многих случаях оказывается очень полезной, в общем случае ее применять нельзя. Тем не менее можно показать, что любое твердое тело независимо от того, какова у него форма, имеет три «главные оси», относительно которых формула (10.9) справедлива (мы не будем здесь подробно останавливаться на этом вопросе). В качестве примера, когда формула (10.9) не справедлива, рассмотрим несимметричное тело на рис. 10.9. Оно состоит из двух шаров с массами m_1 и m_2 (причем $m_1 = m_2$), закрепленных на концах твердого невесомого стержня, составляющего угол θ с осью вращения. Вычислим момент импульса этого тела относительно ЦМ, расположенного в точке O. В тот момент времени, когда тело расположено так, как показано на рисунке, шар m_1 движется к наблюдателю, а шар m_2 – от наблюдателя. Таким образом, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1$ и $\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$. Очевидно, что суммарный момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ *не* направлен вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$, поскольку рассматриваемое тело *не*

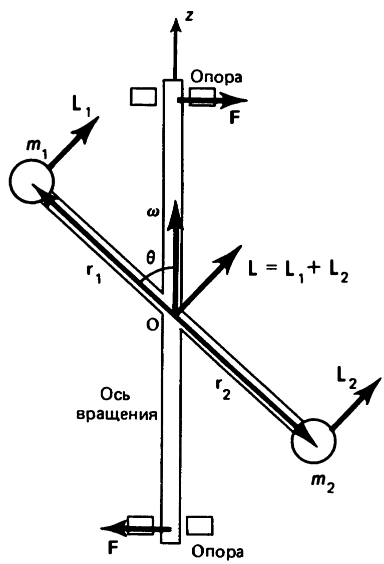

Рис. 10.9. Система, для которой момент импульса **L** и угловая скорость **ω** не параллельны. Эта система является примером вращательного дисбаланса.

симметрично. Неудивительно, что формула (10.9) не справедлива в этом случае.

*10.7. Вращательный дисбаланс

Продолжим рассмотрение системы, изображенной на рис .10.9, поскольку она хорошо иллюстрирует связь момента сил и момента импульса, описываемую формулой $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$. Если система вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то величина момента импульса **L** не меняется, а направление его меняется. Когда стержень с закрепленными на нем двумя шарами вращается относительно оси z, вектор **L** тоже вращается относительно этой же оси. В тот момент времени, когда система приходит в положение, показанное на рис. 10.9, вектор **L** находится в плоскости рисунка. Через промежуток времени dt стержень повернется на угол $d\theta = \omega\, dt$; вектор **L** также повернется относительно оси на угол $d\theta$, оставаясь перпендикулярным стержню. При этом у вектора **L** появится составляющая $d\mathbf{L}$, перпендикулярная плоскости рисунка и направленная от читателя. Так же будет направлена и производная вектора $d\mathbf{L}/dt$. Поскольку

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt,$$

мы видим, что момент сил в момент времени, соответствующий рис. 10.9, направлен перпендикулярно плоскости рисунка от читателя и должен быть приложен к оси, на которой закреплен стержень. Момент сил приложен к оси со стороны опор (или других связей), расположенных на концах оси. Силы **F**, действующие на ось со стороны опор, показаны на рис. 10.9. Во время вращения системы направление сил **F** тоже меняется, причем они всегда остаются в плоскости векторов **L** и **ω**. Если бы вращающий момент, создаваемый силами **F**, не действовал на систему, то вращение системы относительно закрепленной оси было бы невозможным.

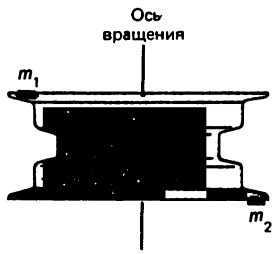

Рис. 10.10. Несбалансированное автомобильное колесо.

Согласно третьему закону Ньютона, ось действует на опоры с силами $-\mathbf{F}$. Следовательно, ось стремится двигаться в направлении вектора $-\mathbf{F}$ и, таким образом, при вращении системы расшатывает опоры. С этим явлением мы часто сталкиваемся на практике, например при возникновении вибрации автомобиля, колеса которого не сбалансированы. Рассмотрим автомобильное колесо, которое было бы полностью симметричным, если бы не два дополнительных тела m_1 и m_2, укрепленных на ободе колеса с противоположных сторон, как показано на рис. 10.10. Вследствие несимметричного расположения тел m_1и m_2 подшипники колеса должны действовать на ось колеса с некоторой силой, параллельной плоскости колеса, таким образом, чтобы ось вращения сохраняла свое положение, как и в случае системы на рис. 10.9. При этом подшипники быстро изнашиваются, колесо расшатывается и начинает болтаться, что ощущают пассажиры автомобиля. Если же колеса сбалансированы, то они вращаются плавно без биений. Вот почему так важна «динамическая балансировка» колес и шин автомобиля. Колесо на рис. 10.10 хорошо сбалансировано *статически*. Если теперь к колесу добавить тела с одинаковыми массами m_3 и m_4, расположив их симметрично ниже тела m_1 и выше тела m_2, то колесо будет сбалансировано и динамически. При этом момент импульса **L** будет параллелен угловой скорости **ω**, так что момент внешних сил $\tau_{\text{внешн}} = 0$.

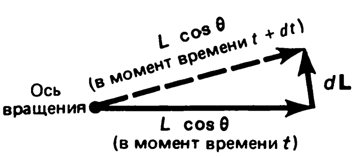

Рис. 10.11. Изменение вектора момента импульса системы, наблюдаемого на рис. 10.9 снизу вдоль оси вращения системы, за промежуток времени dt при вращении системы.

Пример 10.3. Найдем величину момента сил τ, необходимую для того, чтобы система на рис. 10.9 вращалась относительно неподвижной оси.

Решение. На рис. 10.11 показан отдельно вектор момента импульса системы, указанной на рис. 10.9. Ориентация вектора соответствует тому, что при вращении системы мы смотрим на рис. 10.9 сверху перпендикулярно оси вращения. Проекция вектора **L** на направление, перпендикулярное оси вращения системы, равна $L\cos\theta$. За промежуток времени dt величина вектора **L** изменится на

$$dL = (L\cos\theta)\,d\theta = L\cos\theta\,\omega\,dt.$$

Следовательно,

$$\tau = dL/dt = \omega L\cos\theta.$$

Учитывая, что $L = L_1 + L_2 = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 = r_1 m_1(\omega r_1 \sin\theta) + r_2 m_2(\omega r_2 \sin\theta) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\,\omega \sin\theta = I\omega/\sin\theta$, получим для момента сил выражение

$$\tau = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega^2 \sin\theta\cos\theta = I\omega^2/\mathrm{tg}\,\theta,$$

где $I = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\sin^2\theta$ – момент инерции системы относительно оси вращения.

Пример на рис. 10.9 иллюстрирует важную роль векторного характера момента силы и момента импульса. Если ограничиться рассмотрением только составляющих момента импульса и момента сил, параллельных оси вращения, то мы не смогли бы вычислить момента сил, создаваемого опорами, поскольку силы **F** действуют на ось вращения и, следовательно, не создают момента сил относительно оси вращения. Используя понятие о векторном моменте импульса, мы имеем весьма мощный метод для изучения законов вращательного движения и решения соответствующих задач.

10.8. Сохранение момента импульса

В гл. 8 мы показали, что в наиболее общей форме второй закон Ньютона для поступательного движения частицы или системы частиц можно записать в виде

$$\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt,$$

где **P** – импульс системы, равный $m\mathbf{v}$ для частицы и $M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$ для системы частиц общей массой M, ЦМ которой движется со скоростью $\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}$, а **F** – результирующая всех сил, действующих на частицу или систему частиц. Это соотношение справедливо только в инерциальной системе отсчета.

В настоящей главе мы найдем аналогичное соотношение, описывающее общее вращательное движение системы частиц (включая твердое тело):

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – результирующий момент сил, действующий на систему, а **L** – полный момент импульса системы. Это соотношение справедливо в случае, когда $\boldsymbol{\tau}$ и **L** вычисляются относительно точки, неподвижной в инерциальной системе отсчета, или относительно ЦМ системы. Для твердого тела, вращающегося относительно оси, направление которой остается неизменным, момент импульса относительно этой оси записывается в виде [(10.8)]

$$L = I\omega,$$

где I – момент инерции тела относительно этой оси вращения.

В случае поступательного движения, если результирующая сил, действующих на систему, равна нулю, мы имеем $d\mathbf{P}/dt = 0$, так что полный импульс системы сохраняется. Это свойство называется законом сохранения импульса. В случае вращательного движения, если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, то

$$dL/dt \equiv 0 \text{ и } L = \text{const} \quad [\tau_{\text{рез}} = 0]. \tag{10.10}$$

Полный момент импульса системы сохраняется постоянным, если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю. Этот закон называется *законом сохранения момента импульса.* Он играет такую же важную роль, как и законы сохранения энергии и импульса (а также другие законы сохранения, которые мы обсудим ниже), и является одним из важнейших законов сохранения в физике. В гл. 9 мы уже рассмотрели некоторые примеры применения этого важного закона для частного случая твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Здесь мы его изучим в наиболее общей форме. А теперь применим этот закон для одного интересного случая.

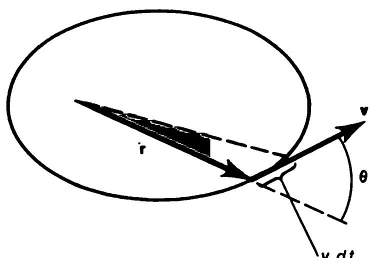

Рис. 10.12. Второй закон Кеплера для движения планет (пример 10.4).

Пример 10.4. Из *второго закона Кеплера* следует, что каждая планета Солнечной системы движется так, что линия, соединяющая Солнце и планету, за равные промежутки времени заметает равные площади (разд. 5.7). Воспользуемся законом сохранения момента импульса, чтобы доказать это.

Решение. Планета движется по эллипсу, как показано на рис. 10.12. За промежуток времени dt она проходит расстояние $v\,dt$, и линия, соединяющая планету и Солнце, заметет за это время площадь треугольника dA с основанием, равным r, и высотой $v\,dt \sin\theta$ (на рис. 10.12 эта площадь dA затенена). Следовательно,

$$dA = (1/2)(r)(v\,dt \sin\theta)$$

и

$$dA/dt = (1/2)rv \sin\theta.$$

Величина момента импульса $\mathbf{L}$ планеты относительно Солнца дается выражением

$$L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = mrv \sin\theta.$$

Подставляя это в предыдущее выражение, получаем

$$dA/dt = (1/2m)L.$$

Но величина момента импульса сохраняется: $L=$ const, поскольку сила тяготения $\mathbf{F}$ направлена к Солнцу (мы пренебрегаем притяжением других планет), так что $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Следовательно, $dA/dt =$ $=$ const, что и требовалось доказать.

10.9. Вращающееся колесо

Рассмотрим теперь довольно простой опыт, который дает несколько неожиданный результат, иллюстрирующий векторный характер соотношения

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt.$$

Предположим, что вы держите рукоятку, жестко со-

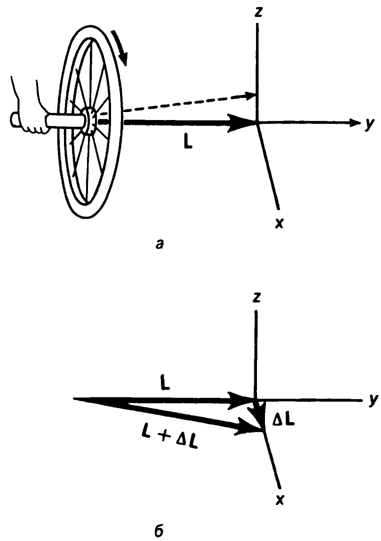

Рис. 10.13. Когда вы пытаетесь изменить направление оси вращения велосипедного колеса так, чтобы она перемещалась вверх, ось вращения отклоняется в сторону.

единенную с осью быстро вращающегося велосипедного колеса (рис. 10.13,*а*). Момент импульса колеса **L** направлен по горизонтали, как показано на рисунке. Попытаемся резко толкнуть колесо, чтобы ось вращения сместилась вверх так, как показано штриховой линией на рис. 10.13, *а* (при этом ЦМ сдвинется в вертикальном направлении). Вы ожидаете, что ось колеса пойдет вверх, однако вопреки ожиданию она сместится вправо. Чтобы объяснить такое «странное» поведение колеса, достаточно просто воспользоваться соотношением $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$. В течение короткого промежутка времени Δt вы прикладывали к оси момент силы $\boldsymbol{\tau}$ (относительно оси, проходящей через запястье вашей руки), направленный вдоль x перпендикулярно **L**. Таким образом, момент импульса изменился на

$$\Delta\mathbf{L} \approx \boldsymbol{\tau}\,\Delta t,$$

так что изменение момента импульса $\Delta\mathbf{L}$ тоже должно быть направлено (приблизительно) вдоль оси x, поскольку именно такое направление имеет вектор $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, новый момент импульса $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$ сместится вправо от **L**. Поскольку направление момента импульса, который теперь равен $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$, совпадает с направлением оси вращения колеса, ось колеса должна переместиться вправо, что и наблюдается на опыте.

Заметим, что если бы колесо не вращалось, т.е. в начальный момент времени мы имели бы $\mathbf{L} = 0$, то изменение момента импульса $\Delta\mathbf{L}$ было бы по-прежнему направлено вдоль оси x и соответствовало бы вращательному движению колеса относительно оси x (проходящей через запястье). Это означает, что ось отклонилась бы вверх, как ожидалось, и не произошло бы никакого отклонения оси колеса в сторону.

*10.10. Вращающийся волчок

Интересным примером вращательного движения и применения векторного соотношения

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

является движение быстро вращающегося игрушечного волчка. Рассмотрим симметричный волчок массой M, быстро вращающийся вокруг оси симметрии, как показано на рис. 10.14. При вращении волчок опирается острием на горизонтальную плоскость xy в точке О, которая выбрана за начало некоторой инерциальной системы отсчета. Если ось вращения волчка составляет угол θ с вертикалью (осью z), то при предоставлении волчка самому себе его ось будет описывать в пространстве конус, ось которого совпадает с вертикалью. Этот конус изображен на рис. 10.14 штриховыми линиями. Такой тип движения, когда под действием момента сил ось вращения меняет свое направление, называется *прецессией*, а скорость, с которой ось вращения движется относительно вертикальной (z) оси, называется угловой скоростью прецессии и обозначается буквой Ω (прописная греческая буква омега). Попытаемся разобраться в том, почему возникает такое движение, а также рассчитаем угловую скорость прецессии Ω.

Если бы волчок не вращался, он сразу же упал бы на землю под действием силы тяжести. Кажущаяся «загадка» волчка состоит в том, что, вращаясь, он не падает сразу под действием силы тяжести, а вместо этого прецессирует, т. е. отклоняется в разные стороны. Однако такое движение волчка перестает быть загадочным, если рассмотреть его с точки зрения момента импульса волчка и момента сил, приложенных к нему относительно точки О. Когда волчок вертится с угловой скоростью ω относительно оси симметрии, его момент импульса $\mathbf{L}$ будет направлен вдоль оси его вращения, как показано на рис. 10.14. (Существует также момент импульса, связанный с прецессией волчка, поэтому полный момент импульса $\mathbf{L}$ направлен не точно вдоль оси волчка; однако если справедливо неравенство $\Omega \ll \omega$, что часто имеет место, то этим отклонением можно пренебречь). Далее, чтобы изменить момент импульса, к волчку необходимо приложить момент силы. Если бы на волчок не действовал никакой момент силы, то его момент импульса $\mathbf{L}$ оставался бы постоянным по величине и направлению; волчок не падал бы и не прецессировал. Однако на волчок действует момент силы тяжести относительно точки О, равный $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times M\mathbf{g}$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор ЦМ волчка относительно точки О. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ перпендикулярен как вектору $\mathbf{r}$, так и вектору $M\mathbf{g}$ и в соответствии с правилом правой руки располагается в горизонтальной (xy) плоскости, как показано на рис. 10.14. Изменение момента

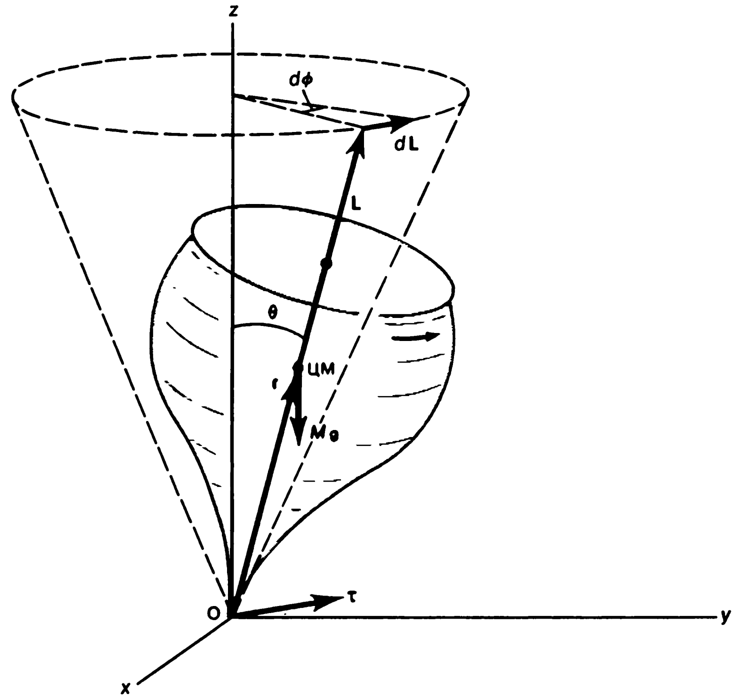

Рис. 10.14. **Вращающийся волчок.**

импульса **L** за время dt дается выражением

$$d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}\, dt.$$

Это изменение перпендикулярно вектору **L**, т.е. имеет горизонтальное направление (рис. 10.14). Поскольку вектор $d\mathbf{L}$ перпендикулярен **L**, величина вектора **L** не изменяется, а меняется лишь его направление. Момент импульса **L** всегда направлен вдоль оси вращения волчка, поэтому при изменении его направления на рис. 10.14 мы видим, что ось волчка перемещается вправо; иными словами, верхний конец оси движется в горизонтальном направлении перпендикулярно вектору **L**. Это объясняет то, почему волчок прецессирует, а не падает. Конец вектора **L** и верхняя точка оси волчка движутся вместе по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. При этом векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $d\mathbf{L}$ также поворачиваются, оставаясь горизонтальными и перпендикулярными вектору **L**.

Для того чтобы найти Ω, заметим, что угол поворота оси волчка $d\phi$ в горизонтальной плоскости на рис. 10.14 связан с dL следующим соотношением:

$$dL = L \sin\theta\, d\phi,$$

поскольку вектор **L** составляет с осью z угол θ. По определению угловая скорость прецессии дается выражением

$$\Omega = d\phi/dt,$$

которое после подстановки в него выражения для $d\phi$ из предыдущей формулы принимает вид

$$\Omega = \frac{1}{L\sin\theta}\frac{dL}{dt} = \frac{\tau}{L\sin\theta} \quad \text{[вращающийся волчок]}. \quad (10.11а)$$

Учитывая, что $\tau = |\mathbf{r} \times M\mathbf{g}| = rMg\sin\theta$ [поскольку $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$], мы можем также записать следующее выражение:

$$\Omega = Mgr/L \quad \text{[вращающийся волчок]}. \quad (10.11б)$$

Таким образом, скорость прецессии не зависит от угла наклона волчка θ; она обратно пропорциональна моменту импульса волчка. Чем быстрее вращается волчок, тем больше L и тем медленнее он прецессирует.

Заключение

Векторным произведением двух векторов **A** и **B** называется вектор $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, который по абсолютной величине (модулю) равен $AB\sin\theta$ и направлен перпендикулярно как вектору **A**, так и вектору **B** в соответствии с правилом правой руки.

Момент силы $\boldsymbol{\tau}$, создаваемый силой **F**, является векторной величиной и всегда вычисляется относительно некоторой точки O начала системы отсчета:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где **r** – радиус-вектор точки, в которой приложена сила **F**.

Момент импульса также является вектором. Для частицы с импульсом $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ момент импульса $\boldsymbol{l}$ относительно некоторой точки O записывается в виде

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

где **r** – радиус-вектор, описывающий положение частицы относительно точки O в любой момент времени. Результирующий момент силы τ, действующий на частицу, связан с моментом импульса следующим соотношением:

$$\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{l}/dt.$$

Для системы частиц полный момент импульса равен $\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i$. Полный момент импульса системы связан с результирующим моментом силы $\boldsymbol{\tau}$, действующим на систему, соотношением

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt.$$

Последнее соотношение является вращательным аналогом второго закона Ньютона, записанным в векторной форме. Оно справедливо в случае, когда **L** и $\boldsymbol{\tau}$ вычисляются относительно точки, фиксированной в инерциальной системе отсчета или помещенной в ЦМ системы. Для твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси, проекция момента импульса на ось вращения дается выражением $L_\omega = I\omega$. Если тело вращается относительно собственной оси симметрии, то имеет место следующее соотношение: $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, которое в общем случае не справедливо.

Если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, то полный момент импульса системы $\mathbf{L}$ сохраняется постоянным; это важное свойство называется *законом сохранения момента импульса*. Он формулируется для векторной величины момента импульса $\mathbf{L}$ и, следовательно, выполняется для любой проекции момента импульса на некоторую ось.

Вопросы

1. Если поменять направления всех проекций векторов $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ на противоположные, то как изменится направление произведения $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$?

2. Назовите три различных условия, которые могли бы привести к равенству $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = 0$.

3. Сила $\mathbf{F} = \mathbf{j}F$ приложена к телу в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, причем начало системы отсчета помещено в ЦМ тела. Зависит ли момент силы $\mathbf{F}$ относительно ЦМ от координаты x? От координаты y? От координаты z?

4. Частица движется с постоянной скоростью вдоль прямой линии. Как изменяется с течением времени момент импульса частицы, вычисленный относительно любой точки, не лежащей на этой прямой?

5. Две частицы, имеющие одинаковые импульсы $\mathbf{p}$, расположены в различных точках. Можно ли выбрать начало отсчета О таким образом, чтобы моменты импульса этих частиц были одинаковы? Каков будет ваш ответ, если у одной частицы импульс равен $\mathbf{p}$, а у другой он равен $-\mathbf{p}$?

6. Если равнодействующая всех сил, действующих на систему, равна нулю, то равен ли нулю результирующий момент сил? Если результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю, равна ли нулю результирующая сила?

7. Палка стоит вертикально на гладкой горизонтальной поверхности без трения. Опишите движение палки, когда она слегка наклонится в одну из сторон и упадет.

8. Посморите на циферблат часов с секундной стрелкой. Как направлен момент импульса секундной стрелки?

9. Попробуйте вращать сырое и хорошо сваренное яйца. Почему в одном случае яйцо вращается легко, а в другом с трудом?

10. Одна из игрушек представляет собой фигуру неправильной формы, изготовленную из легкого пластика, заполненного воздухом. Объясните, почему ребенок ударяет по ней ладонью несколько раз подряд, чтобы игрушка «взлетела» повыше.

11. Объясните, почему для описания положения твердого тела в пространстве необходимо задать шесть переменных. Сколько переменных потребуется для описания положения твердого тела, которое перемещается только в плоскости?

12. Велосипедист преодолевает вершину холма. Каким при этом является его движение? Оно вращательное, поступательное или представляет собой комбинацию вращательного и поступательного движений?

13. Рассмотрите несимметричную систему, показанную на рис. 10.9. Существует ли такая точка, что момент импульса $\mathbf{L}$, вычисленный относительно нее, будет направлен параллельно вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$? Каким будет ответ на этот вопрос, если в системе отлична от нуля только одна масса (скажем, $m_2 = 0$)? Если хотя бы в одном случае вы ответили на вопрос утвердительно, то объясните, почему в обоих случаях на опоры оси действуют силы и требуется соблюдение условия $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$.

14. Мы утверждаем, что импульс и момент импульса сохраняются. Тем не менее большинство движущихся поступательно или вращающихся тел со временем замедляются и останавливаются. Объясните.

15. С помощью закона сохранения момента импульса выясните, почему вертолет должен иметь больше одного пропеллера. Укажите один или более способов размещения второго пропеллера, функция которого состоит в сообщении вертолету устойчивости.

16. Футболист производит удар по мячу «через себя». Сохраняется ли момент импульса мяча, вычисленный относительно его ЦМ, когда мяч находится в воздухе? Сохраняется ли момент импульса мяча относительно исходного положения носка бутсы футболиста?

17. Сохраняется ли момент импульса системы, если на нее действует центральная сила $\mathbf{F} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}$ (разд. 7.5)? Справедлив ли второй закон Кеплера для произвольной центральной силы?

18. Колесо свободно вращается относительно вертикальной оси с постоянной угловой скоростью. Колесо понемногу крошится, и от него отлетают обломки. Как это повлияет на скорость вращения колеса? Сохраняется ли при этом его момент импульса? Сохраняется ли кинетическая энергия? Объясните.

19. Имеется следующий набор векторных величин: перемещение, скорость, ускорение, импульс, момент импульса, момент силы. а) Какие из этих величин не зависят от выбора начала системы отсчета? (Рассмотрите в качестве начала системы отсчета различные точки, которые покоятся относительно друг друга.) б) Какие из этих величин не зависят от скорости системы отсчета?

20. Справедливо ли для частицы, движущейся с постоянным импульсом $\mathbf{p}$, утверждение, что она заметает равные площади за равные промежутки времени? Объясните.

21. Вычислите момент силы, который должен приложить человек (рис. 10.13), чтобы повернуть ось колеса строго вверх, без отклонений в сторону.

22. Как автомобиль совершает поворот вправо? Что создает момент силы, необходимый для поворота?

23. Предположите, что вы стоите на поворотном круге, который может свободно вращаться. Если вы держите над головой вращающееся велосипедное колесо таким образом, что его ось вертикальна, то вы будете находиться в покое. Если вы теперь перемещаете колесо так, что его ось вращения становится горизонтальной, то что происходит с вами? Что произойдет, если вы затем направите ось колеса вертикально вниз?

***24.** Ось вращения Земли прецессирует с периодом 25 000 лет. Прецессия Земли во многом схожа с прецессией волчка. Объясните, каким образом вспучивание Земли на экваторе приводит к возникновению момента сил, действующего на Землю со стороны Солнца. Воспользуйтесь при этом рис. 10.15, на котором изображено расположение планет при зимнем солнцестоянии (21 декабря). Вокруг какой оси будет прецессировать ось вращения Земли в результате действия этого момента силы? Будет ли существовать этот момент силы через 3 месяца после дня зимнего солнцестояния? Объясните.

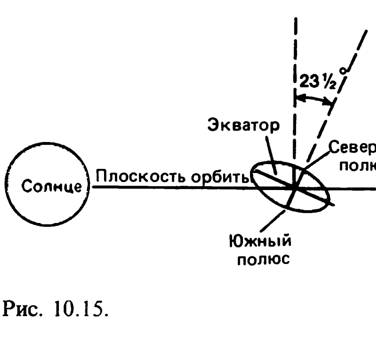

Рис. 10.15.

Задачи

Раздел 10.1

1. (I) Покажите, что а) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$; б) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$.

2. (I) Рассмотрите частицу твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси. Покажите, что тангенциальная (касательная) и радиальная составляющие вектора линейного ускорения равны соответственно

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

3. (II) Используя процедуру нахождения пределов, изложенную в гл. 2, в частности в примере 2.3, получите соотношение (10.2г).

4. (II) Докажите дистрибутивный (переместительный) закон для векторного произведения [соотношение (10.2в)].

5. (II) а) Покажите, что векторное произведение двух векторов

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \text{ и } \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

записывается в виде

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}.$$

б) Покажите, что векторное произведение можно представить в виде

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

где используется правило вычисления определителя матрицы. (Заметим, однако, что, строго говоря, это не определитель, а просто некое правило, облегчающее запоминание.)

6. (III) Покажите, что скорость $\mathbf{v}$ любой точки, принадлежащей твердому телу, вращающемуся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси, может быть записана в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор этой точки относительно начала отсчета O, расположенного на оси вращения. Может ли при этом O находиться в любой точке, принадлежащей оси? Выполняется ли равенство $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, если начало отсчета O расположено в точке, не принадлежащей оси вращения?

7. (III) Пусть заданы три вектора **A**, **B**, **C**, не лежащие в одной плоскости (некомпланарные векторы). Покажите, что справедливы следующие равенства: $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$. *Подсказка*: обратитесь к решению предыдущей задачи.

Раздел 10.2

8. (II) Начало системы координат помещено в центре колеса. Колесо может вращаться в плоскости xy вокруг оси, проходящей через начало координат. В точке с координатами $x = 10$ см, $y = 35$ см к колесу приложена сила $F = 83$ Н, направленная под углом 30° к оси x. Чему равна величина и как направлен момент этой силы относительно оси вращения?

9. (II) Тонкое колесо диаметром 30 см может вращаться вокруг оси, проходящей через его центр, направление которой выберем за ось z (колесо вращается в плоскости xy). К точке обода колеса, которая находится точно на оси x, приложена сила $\mathbf{F} = 26\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ (в ньютонах). а) Найдите момент этой силы (его величину и направление) относительно центра колеса. б) Параллельно ли направление этого момента силы угловому ускорению $\boldsymbol{\alpha}$? Если нет, то объясните, каким образом вектор момента силы $\boldsymbol{\tau}$ может быть пропорционален $\boldsymbol{\alpha}$.

Раздел 10.3

10. (I) Найдите x-, y- и z-составляющие вектора момента импульса частицы, расположенной в точке $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и имеющей импульс $\mathbf{p} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$.

11. (I) Покажите, что кинетическая энергия частицы массой m, движущейся по круговой траектории, равна $l^2/2I$, где l – величина ее момента импульса, а I – ее момент инерции относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости.

12. (II) Две одинаковые частицы имеют равные по величине, но противоположные по направлению импульсы $\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}$ и движутся не по одной прямой. Покажите, что полный момент импульса этой системы не зависит от выбора начала координат.

13. (II) Две частицы находятся на краю стола на расстоянии d друг от друга. Одна из частиц массой m соскальзывает со стола и падает вертикально вниз. Совместив начало системы координат с оставшейся на столе частицей, вычислите а) момент силы $\boldsymbol{\tau}$, действующей на падающую частицу, как функцию времени (до ее удара о поверхность земли); б) момент импульса $\mathbf{l}$ как функцию времени. в) Покажите, что выполняется равенство $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$.

14. (III) В боровской модели атома водорода электрон массой m удерживается на круговой орбите вокруг ядра (протона) электрической силой $F = ke^2/r^2$ (где e – электрический заряд электрона или протона, а k – постоянный коэффициент). В этой модели разрешены не все орбиты, а лишь те, для которых момент импульса l электрона составляет целое кратное n величины $h/2\pi$, где h – постоянная Планка; точнее, $l = nh/2\pi$, где n – целое положительное число. Покажите, что возможные радиусы орбит электрона даются выражением

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 kme^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для этого покажите сначала, что радиус орбиты равен $r = ke^2/mv^2$, а затем примените соотношение $l = nh/2\pi$.

Разделы 10.4 – 10.6

15. (II) Четыре одинаковые частицы массами m каждая укреплены на тонком стержне длиной L и массой M на равных расстояниях друг от друга, причем на каждом конце стержня имеется по одной частице. Система вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через одну из концевых масс. Определите: а) кинетическую энергию и б) момент импульса системы.

16. (II) Воспользуйтесь в примере 9.10 для определения ускорения груза соотношением $\tau = dL/dt$.

17. (II) Луна обращается по орбите вокруг Земли таким образом, что к Земле обращена всегда одна ее сторона. Найдите отношение собственного момента импульса Луны (при вращении вокруг ее собственной оси) к ее орбитальному моменту импульса.

18. (III) Тонкая нить намотана на сплошную цилиндрическую катушку радиусом R и массой M. Один конец нити закреплен, и катушка может падать вертикально (без начальной скорости) по мере раскручивания нити. а) Вычислите момент импульса катушки относительно оси, проходящей через ее центр масс, как функцию времени. б) Как зависит от времени натяжение нити?

19 (III) Однородный тонкий стержень длиной 80 см и массой 400 г лежит на гладком (без трения) горизонтальном столе. По стержню ударяют в точке, расположенной на расстоянии

20 см от одного из его концов, причем удар производится в направлении, перпендикулярном самому стержню. Опишите результирующее движение стержня, если импульс силы равен 8,5 Н·с.

20. (III) Тонкая прямоугольная пластинка с длинами сторон a и b вращается относительно оси, проходящей вдоль ее диагонали. Определите величину и направление момента импульса **L** пластинки.

21. (III) Велосипедист, движущийся со скоростью $v = 5{,}2$ м/с по горизонтальной дороге, делает поворот по дуге окружности радиусом $r = 3{,}8$ м. На велосипедиста и велосипед со стороны дороги действуют сила нормальной реакции $\mathbf{F}_N$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, приложенные к шинам, а также сила тяжести $m\mathbf{g}$, где m – полная масса велосипеда и велосипедиста. а) Подробно объясните, почему угол θ, который велосипед составляет с вертикалью (рис. 10.16) при условии, что велосипедист находится в равновесии, дается соотношением $\operatorname{tg}\theta = F_{\text{тр}}/F_N$. б) Вычислите угол θ для значений параметров, заданных в условии. (*Подсказка*: рассмотрите поступательное движение по окружности велосипеда и велосипедиста.) Если коэффициент статического трения между шинами и дорогой равен $\mu_s = 0{,}65$, то чему будет равен минимальный радиус поворота?

22. (III) Покажите, что полный момент импульса $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ системы частиц, вычисленный относительно начала инерциальной системы отсчета, может быть представлен в виде суммы момента импульса $\mathbf{L}^*$ относительно ЦМ системы (собственный момент импульса) и момента импульса ЦМ системы относительно начала координат (орбитальный момент импульса):

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^* + \mathbf{r}_{\text{ЦМ}} \times M\mathbf{v}_{\text{ЦМ}}.$$

(*Подсказка*: см. вывод выражения (9.22).)

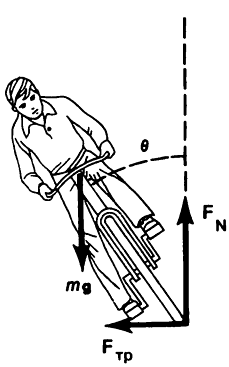

Рис. 10.16.

*Раздел 10.7

***23.** (I) Чему равна величина силы **F**, действующей со стороны каждой из опор на рис. 10.9 (пример 10.3)? Расстояние между опорами равно d.

***24.** (II) Предположите, что на рис. 10.9 $m_2 = 0$; иными словами, имеется только одна масса m_1. Учитывая, что опоры разнесены на расстояние d друг от друга, найдите силы F_1 и F_2, действующие на верхнюю и нижнюю опоры соответственно. (*Подсказка*: выберите начало отсчета, отличающееся от точки O на рис. 10.9, причем таким образом, чтобы вектор **L** был параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$.)

***25.** (II) Однородный диск цилиндрической формы диаметром 60 см и массой 18 кг вращается относительно оси, проходящей через точку, смещенную на 1,0 см от его центра. а) Если опоры установлены на расстоянии 9,5 см друг от друга, то чему равны силы, действующие на них, когда диск вращается с частотой 12 об/с? б) Куда нужно поместить массу 1,00 кг, чтобы уравновесить диск?

Раздел 10.8

26. (II) На платформе, которая может свободно вращаться без трения (но в данный момент находится в покое), стоит человек, обладающий моментом инерции I_p. В руках человек держит вращающееся велосипедное колесо, ось которого горизонтальна, как показано на рис. 10.13. Колесо с моментом инерции I_w вращается с угловой скоростью ω_w. Чему будет равна угловая скорость платформы ω, если человек перемещает ось колеса так, что а) она остается направленной вертикально вверх; б) отклоняется на 60° от вертикали; в) становится направленной вертикально вниз? г) Чему

Рис. 10.17. Колесо, вращающееся относительно горизонтальной оси, закрепленной в опоре на одном конце, прецессирует.

будет равна угловая скорость вращения ω, если в положении «а» человек достанет рукой до колеса и затормозит его?

*Раздел 10.10

*27. (II) Волчок массой 120 г вращается с частотой 26 об/с, причем ось волчка составляет угол 30° с вертикалью и прецессирует с частотой 1 оборот за 8 с. Чему равен момент инерции волчка, если его ЦМ находится на расстоянии 3,5 см от острия (кончика) волчка вдоль оси симметрии волчка?

*28. (II) Твердое колесо на рис. 10.17 вращается вокруг своей оси со скоростью 25 рад/с, а его радиус равен 6,0 см. Колесо насажено в центре тонкой горизонтальной оси длиной 20 см. Какова скорость прецессии оси?

*29. (II) Как изменится скорость прецессии в том случае, если в условии задачи 28 на свободный конец оси поместить тело, масса которого равна половине массы колеса?