11 Равновесие, упругость и разрушение тел

11.1. Статика; равновесие сил

В настоящей главе мы изучим частный случай движения, когда равнодействующие сил и моментов, приложенные к телу или системе тел, равны нулю. В этом случае тело (или система тел) либо покоится, либо его центр масс движется с постоянной скоростью. Мы рассмотрим здесь лишь первый случай, когда тело (или система тел) покоится. Вам может показаться, что изучение покоящихся тел не представляет особого интереса – ведь такие тела не обладают ни скоростью, ни ускорением, а результирующая сила и результирующий момент силы для них равны нулю. Но именно этим и интересна изучаемая нами здесь дисциплина, называемая *статикой*; действительно, результирующая сила, действующая на тело, равна нулю, но это вовсе не означает, что на тело (или систему тел) не действуют силы. Вообще говоря, невозможно найти тело, на которое не действовали бы силы. На окружающие нас в повседневной жизни тела действует по меньшей мере одна сила, а именно сила тяжести; поэтому, чтобы тела оставались неподвижными, на них должны действовать еще какие-то силы, так чтобы полная результирующая сила была равна нулю. На тело, например книгу, покоящееся на столе, действуют две силы: одна из них – это направленная вниз сила тяжести и другая – направленная вверх сила, с которой поверхность стола действует на книгу (рис. 11.1). Поскольку результирующая сила здесь равна нулю, сила, действующая вверх со стороны поверхности стола, должна быть равна по величине силе тяжести, направленной вниз. (Не следует путать это с равными по величине и противоположными по направлению силами в третьем законе Ньютона, которые действуют на различные тела; здесь же силы приложены к одному и тому же телу.) В таком случае говорят, что тело, испытывающее действие двух сил, находится в **равновесии**[1].

Статика занимается изучением сил, действующих на тела, находящиеся в состоянии равновесия. Методы статики применяются в самых различных областях деятель-

[1] Равновесие покоящегося тела называется *статическим*; если же тело движется равномерно с постоянной скоростью, то оно находится в *динамическом равновесии*. В этой главе мы будем рассматривать главным образом статическое равновесие.

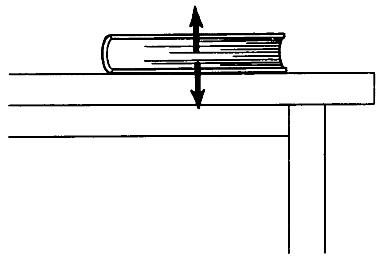

Рис. 11.1. Книга находится в равновесии; результирующая сила, действующая на нее, равна нулю.

ности человека. Архитекторы и инженеры должны уметь рассчитывать силы, действующие на конструкционные элементы зданий, мостов, станков, автомобилей, космических кораблей и других объектов, поскольку любой материал может деформироваться или разрушиться, если приложить к нему слишком большую силу. Знание сил, действующих в мышцах и суставах человека, очень важно для медицины (и прежде всего для лечения травм) и не менее важно для научного подхода к занятиям спортом.

11.2. Центр тяжести

Одной из сил, действующих на различные конструкции, является сила тяжести. Наше рассмотрение в этой главе существенно упростится, если ввести понятие центра тяжести. Любое тело можно считать состоящим из множества частиц, каждая массой m_i. Хотя сила тяжести действует на каждую из частиц, можно показать, что сумма всех этих отдельных сил эквивалентна одной силе, приложенной в точке тела, называемой его **центром тяжести** (ЦТ); эта сила равна $M\mathbf{g}$, где $M = \sum m_i$ – полная масса тела, а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения. Если $\mathbf{g}$ во всех точках тела одинаково, как это обычно и бывает, то ЦТ совпадает с центром масс (ЦМ) тела. Докажем эти утверждения.

Полная сила тяжести, действующая на тело, состоящее из n частиц с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, запишется в виде

$$\mathbf{F} = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g} + \ldots + m_n\mathbf{g} = \sum_i m_i\mathbf{g} = M\mathbf{g},$$

где M – полная масса всего тела, а $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, которое, как мы считаем, одно и то же для всех точек тела. Согласно второму закону Ньютона, одна сила $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$ вызывает такое же поступательное движение тела, как и сумма всех сил тяжести, действующих на частицы тела. Но где должна быть приложена эта сила, чтобы то же утверждение было справедливо и в отношении вращательного движения? Чтобы определить это, вычислим сумму всех моментов силы, действующих на тело относительно некоторой произвольной точки O, как показано на рис. 11.2. Если $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й частицы

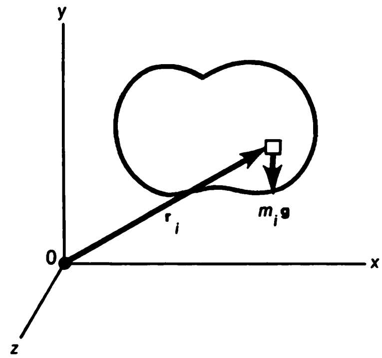

Рис. 11.2. Определение момента силы тяжести относительно начала координат O.

относительно точки O, то сумма всех моментов сил тяжести, действующих на частицы тела, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{g} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{g} + \ldots + \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{g} = \sum (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{g}.$$

Такой же момент может быть создан одной силой $M\mathbf{g}$, если ее приложить в точке, радиус-вектор $\mathbf{r}_{\text{ЦТ}}$ которой дается выражением

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_{\text{ЦТ}} \times (M\mathbf{g}).$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, находим

$$\mathbf{r}_{\text{ЦТ}} = \left(\sum m_i \mathbf{r}_i\right)/M.$$

Мы видим, что это выражение совпадает с определением центра масс [формула (8.2)]; следовательно, $\mathbf{r}_{\text{ЦТ}} = \mathbf{r}_{\text{ЦМ}}$. Таким образом, сила $M\mathbf{g}$, приложенная к ЦМ, создает такую же силу, и следовательно, оказывает такое же действие на поступательное и вращательное движение, как и сумма сил тяжести, действующая на все частицы тела, и мы показали, что в постоянном поле силы тяжести ЦТ совпадает с ЦМ.

Если ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ не одно и то же в различных точках тела, а это возможно, так как, согласно закону всемирного тяготения Ньютона, $\mathbf{g}$ зависит от расстояния до притягивающего тела (разд. 5.2), то вышеприведенные выражения придется слегка изменить. При этом для каждой частицы тела мы должны заменить $\mathbf{g}$ на $\mathbf{g}_i$, т. е. на значение ускорения свободного падения в точке, в которой находится i-я частица. В этом случае ЦТ уже не будет совпадать с ЦМ. Для того чтобы это различие оказалось существенным в поле тяготения Земли, рассматриваемое тело должно быть очень велико.

11.3. Условия равновесия

Для того чтобы тело находилось в равновесии, *векторная сумма всех внешних сил, действующих на тело, должна быть равна нулю*:

$$\sum \mathbf{F} = 0. \tag{11.1a}$$

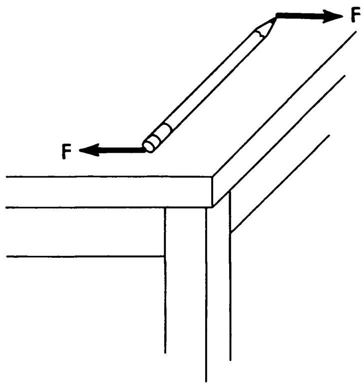

Рис. 11.3. Две одинаковые по величине силы, действующие в противоположных направлениях и приложенные к разным точкам тела так, как показано на рисунке, называются *парой сил*.

Это условие называется *первым условием равновесия*, и его можно записать в виде следующих трех условий для проекций силы:

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0. \qquad (11.1б)$$

Из выражений (11.1) следует, что ускорение ЦМ тела равно нулю: $\mathbf{a}_{\text{ЦМ}} = 0$. Если тело первоначально находилось в покое ($\mathbf{v}_{\text{ЦМ}} = 0$), то оно будет продолжать покоиться.

Для того чтобы тело находилось в равновесии, одного лишь первого условия еще не достаточно. Сумма сил, действующих, например, на карандаш на рис. 11.3, равна нулю, но карандаш не находится в равновесии, поскольку он может вращаться. *Второе условие равновесия* состоит в том, что *векторная сумма всех внешних моментов сил, действующих на тело, должна быть равна нулю*:

$$\sum \boldsymbol{\tau} = 0. \qquad (11.2)$$

Отсюда следует, что угловое ускорение $\boldsymbol{\alpha}$ относительно любой точки будет равно нулю; если тело не имело вращательного движения ($\omega = 0$), то оно не приобретет его и в дальнейшем. Выражения (11.1) и (11.2) являются необходимыми и достаточными условиями равновесия тела.

Условие (11.2) также можно расписать по проекциям:

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0.$$

Моменты вычисляются относительно некоторой точки O, а τ_x, τ_y и τ_z – проекции моментов сил на три выбранные оси. Однако в остальной части этой главы мы ограничимся рассмотрением более простого случая, когда все внешние силы действуют в плоскости. Если выбрать в качестве этой плоскости плоскость xy, то у нас остается лишь два уравнения для сил:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

и одно уравнение для моментов силы: $\sum \tau_z = 0$.
Момент силы вычисляется относительно оси, перпендикулярной плоскости xy, причем эту ось можно выбрать произвольным образом. Поскольку для твердого тела $\tau = I\alpha$ относительно любой фиксированной оси [формула (9.12)], то, если тело находится в равновесии ($\alpha = 0$), $\tau = 0$ относительно любой фиксированной оси. Поэтому, выбирая соответствующим образом ось вращения, мы можем облегчить расчет.

Имея три уравнения, можно решать задачи не более чем с тремя неизвестными. Если неизвестных больше, то удается иногда отыскать дополнительные соотношения между ними (например, соотношения, описывающие упругие свойства материалов), но здесь мы не будем рассматривать такие случаи из-за их большой сложности.

В ряде случаев некоторые силы можно определить экспериментально на самой конструкции или на ее модели с помощью датчиков напряжений.

Важная роль статики состоит в том, что ее методы позволяют рассчитать силы, действующие на конструкцию снаружи или изнутри, когда некоторые из этих сил уже известны. Не существует единого метода решения задач статики, но полезно придерживаться следующего порядка действий: 1) выбрать для рассмотрения одно тело и изобразить на диаграмме (диаграмме сил) все действующие на тело силы и точки, в каких они приложены; 2) выбрать удобную систему координат и разложить силы на их составляющие; 3) обозначить неизвестные соответствующими буквами, записать уравнения для суммы сил $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ и моментов $\sum \tau_z = 0$ и решить их. Несомненно, самым трудным является первая операция, в которой необходимо учесть все силы, действующие на тело, и исключить те силы, с которыми оно действует на другие тела.

Приведем несколько примеров на вычисление сил в конструкциях, которые находятся в состоянии равновесия.

Пример 11.1. Вычислим силы натяжения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ двух шнуров, на которых подвешена люстра массой 200 кг (рис. 11.4).

Решение. В точке, где сходятся три шнура, приложены три силы: $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и вес люстры. Для этой точки (пусть это будет узел, которым связаны шнуры) можно написать, что $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$. (Заметим, что мы не рассматриваем здесь саму люстру, поскольку на нее действуют лишь две силы: сила тяжести, направленная вниз, и равная ей и противоположно направленная сила со стороны шнура, причем каждая из них имеет величину $mg =$ $= 1960$ Н.) Поскольку теперь мы, по существу, имеем дело с точкой, моменты сил отсутствуют. Неизвестных величин две, и их можно найти из уравнения $\sum \mathbf{F} = 0$. Разложим $\mathbf{F}_1$ на горизонтальную (x) и вертикальную (y) составляющие. Хотя величина силы $\mathbf{F}_1$ неизвестна, можно написать ее проекции: $F_{1x} = F_1 \cos 60°$, $F_{1y} = F_1 \sin 60°$. Сила $\mathbf{F}_2$ не имеет вертикальной составляющей, и потому $F_{2y} = 0$, $F_{2x} = F_2$. В вертикальном направлении действуют вес люстры (200 кг)(g) вниз и вертикальная составляющая силы $\mathbf{F}_1$ вверх. Поскольку $\sum F_y = 0$, мы имеем

$$\sum F_y = F_1 \sin 60° - (200 \text{ кг})(g) = 0,$$

откуда находим

$$F_1 = \frac{(200 \text{ кг})(g)}{\sin 60°} = (230 \text{ кг})(g) = 2260 \text{ Н}.$$

В горизонтальном направлении

$$\sum F_x = F_2 - F_1 \cos 60° = 0.$$

Таким образом,

$$F_2 = F_1 \cos 60° = (230 \text{ кг})(g)(0{,}500) =$$
$$= (115 \text{ кг})g = 1130 \text{ Н}.$$

Величины $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ определяют прочность,

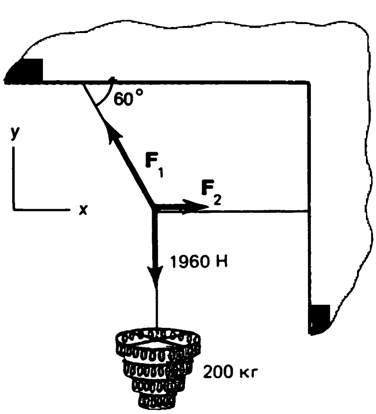

Рис. 11.4. Пример 11.1.

которой должен обладать шнур или провод. В данном случае шнур должен выдерживать вес, обусловленный массой не менее 230 кг. Обратите внимание, что при решении мы не подставляли численное значение ускорения свободного падения до самого конца и записали силу через массу с соответствующим числом килограммов (которые, возможно, более привычны, чем ньютоны).

Пример 11.2. На однородной балке массой 1200 кг установлен механизм массой 15 000 кг (рис. 11.5). Вычислим силу, действующую на каждую из вертикальных опор.

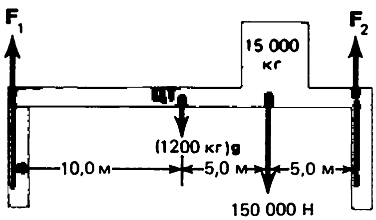

Рис. 11.5. Балка массой 1200 кг удерживает механизм массой 15 000 кг (пример 11.2).

Решение. Рассмотрим силы, действующие на концы балки, так как они равны по величине (и противоположны по направлению) силам, с которыми концы балки действуют на опоры. Обозначим эти силы через $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 11.5). Сила тяжести балки приложена к ее центру тяжести, т. е. посередине балки (на расстоянии 10 м от каждого из концов). Поскольку условие равновесия для моментов сил можно записывать относительно любой точки, мы можем выбрать любую точку, которая нам удобна. Если вычислять моменты сил относительно точки приложения силы $\mathbf{F}_1$, то момент этой силы равен нулю (поскольку равно нулю ее плечо), и у нас останется лишь одна неизвестная величина F_2. Таким образом, записывая условие $\sum \tau = 0$, получаем

$$-(10\text{ м})(1200\text{ кг})(g) - (15\text{ м}) \times \times (15\,000\text{ кг})(g) + (20\text{ м})F_2 = 0.$$

Отсюда находим $F_2 = (12\,000\text{ кг})(g) = 118\,000$ Н. Силу F_1 найдем из условия равновесия сил: $\sum F_y = 0$:

$$\sum F_y = F_1 - (1200\text{кг})(g) - (15\,000\text{ кг})(g) + F_2 = 0.$$

Подставляя сюда $F_2 = (12\,000\text{ кг})(g)$, получаем $F_1 = (4200\text{ кг})(g) = 41\,200$ Н.

Пример 11.3. Однородная балка длиной 2,20 м и массой $m = 25{,}0$ кг прикреплена с помощью шарнира к стене, как показано на рис. 11.6. Балка удерживается в горизонтальном положении тросом, составляющим с ней угол $\theta = 30°$. К концу балки подвешен груз массой $M = 280$ кг. Необходимо найти составляющие силы $\mathbf{F}$, действующей на балку в шарнире, и составляющие силы натяжения $\mathbf{T}$ удерживающего троса.

Решение. Сумма сил в вертикальном (y) направлении запишется в виде

$$F_y + T_y - mg - Mg = 0, \qquad \text{(I)}$$

а в горизонтальном (x) направлении мы имеем

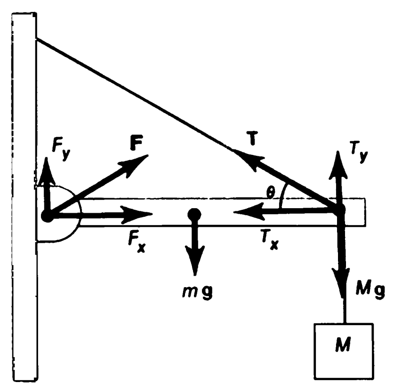

Рис. 11.6. Пример 11.3.

$$F_x - T_x = 0. \qquad \text{(II)}$$

При записи условия равновесия для моментов сил выберем за точку, относительно которой вычисляются моменты сил, ту точку, где приложены силы $\mathbf{T}$ и $M\mathbf{g}$ (при этом в соответствующее уравнение будет входить только одна неизвестная и его легче можно решить):

$$-(F_y)(2{,}20\text{ м}) + (mg)(1{,}10\text{ м}) = 0 \qquad \text{(III)}$$

(здесь мы учли, что центр тяжести однородной балки находится посередине). Известно, что

$$mg = (25{,}0\ \text{кг})(9{,}80\ \text{м/с}^2) = 245\ \text{Н},$$
$$Mg = (280\ \text{кг})(9{,}80\ \text{м/с}^2) = 2740\ \text{Н},$$

но по-прежнему мы имеем лишь три уравнения и четыре неизвестные (F_x, F_y, T_x, T_y). Может показаться, что мы могли бы получить четвертое уравнение, приравняв нулю сумму моментов относительно какой-нибудь другой точки, скажем шарнира: $T_y(2{,}20\ \text{м}) - (Mg)(2{,}20\ \text{м}) - (mg)(1{,}10\ \text{м}) = 0$. Однако это уравнение не является независимым - в действительности это лишь линейная комбинация уже имеющихся трех уравнений. В случае когда силы лежат в одной плоскости, можно записать только три независимых уравнения ($\sum \tau = \sum \mathbf{F} = 0$). Нам известно еще одно обстоятельство: если бы у силы **T** имелась составляющая, перпендикулярная тросу, то трос прогнулся бы. Таким образом, сила **T** должна действовать только вдоль троса (в примере 11.1 мы уже воспользовались аналогичным соображением, не упомянув об этом), что дает нам четвертое уравнение:

$$T_y = T_x \operatorname{tg}\theta = 0{,}577\, T_x \qquad \text{(IV)}$$

(здесь мы учли, что $\theta = 30°$ и $\operatorname{tg} 30{,}0° = 0{,}577$). Из уравнения (III) находим

$$F_y = mg/2 = 122\ \text{Н},$$

а из (I), (II) и (IV) имеем

$$T_y = (m + M)g - F_y = 2870\ \text{Н},$$
$$T_x = T_y/0{,}577 = 4970\ \text{Н},$$
$$F_x = T_x = 4970\ \text{Н}.$$

Следовательно, натяжение троса равно $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 5730$ Н.

Рассмотрим теперь пример, который иллюстрирует силы, действующие в костях, мышцах и суставах человека.

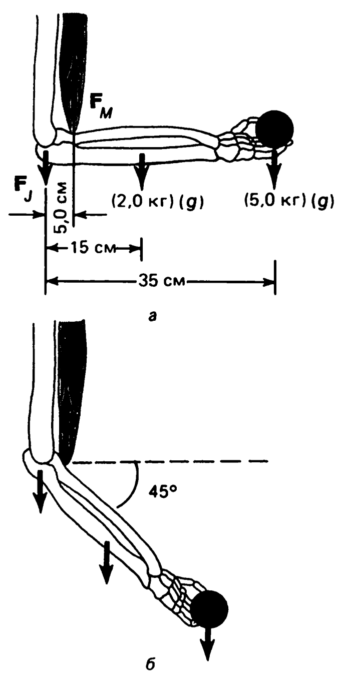

Рис. 11.7. Пример 11.4.

Пример 11.4. Какую силу должен развивать бицепс (двуглавая мышца плеча), чтобы человек удерживал в ладони груз массой 5,0 кг а) в руке, согнутой в локте под прямым углом (рис. 11.7, *а*); б) в руке, согнутой под углом 45° (рис. 11.7, *б*)? Будем считать общую массу кисти и предплечья равной 2,0 кг; положение центра тяжести показано на рисунке.

Решение. а) Силы, действующие на предплечье, показаны на рис. 11.7, *а*, и они включают в себя силу $\mathbf{F}_\text{М}$ со стороны бицепса и силу $\mathbf{F}_\text{J}$ со стороны плечевой кости в локтевом суставе. Нам нужно найти $F_\text{М}$; проще всего сделать это, используя условие равновесия для моментов сил, вычисляемых относительно локтевого сустава, чтобы исключить из рассмотрения силу F_J:

$$(0{,}050\ \text{м})(F_\text{М}) - (0{,}15\ \text{м})(2{,}0\ \text{кг})(g) - (0{,}35\ \text{м})(5{,}0\ \text{кг})(g) = 0.$$

Отсюда находим $F_\text{М} = (41\ \text{кг})(g) = 400$ Н.

б) В этом случае плечо силы $F_\text{М}$ уменьшилось до $(0{,}050\ \text{м}) \sin 45° = 0{,}035$ м. Но в таком же отношении уменьшились и плечи сил, направленных вниз, так что окончательный результат остается прежним: $F_\text{М} = 400$ Н. Заметим, что в каждом случае сила, создаваемая бицепсом, много больше веса поднимаемого предмета. Вообще силы в мышцах и суставах человека довольно велики. Позиция, в которой мышца крепится к кости, у разных людей немного различна. Но даже небольшое увеличение плеча силы (скажем, с 5,0 до 5,5 см) может заметно сказаться на способности человека поднимать тяжести или, допустим, метать копье. Замечено, что у выдающихся спортсменов мышцы нередко крепятся к кости дальше от сустава, чем у обычных людей.

11.4. Упругость и модули упругости; напряжение и деформация

В начале этой главы мы узнали, как рассчитываются силы, действующие на тело в равновесии. В данном разделе изучим результаты действия этих сил, поскольку любое тело под действием приложенных к нему сил меняет свою форму. Если же силы достаточно велики, то тело может поломаться или *разрушиться*; вопрос о разрушении мы рассмотрим в разд. 11.5.

Если на тело, например на вертикально подвешенный металлический стержень на рис. 11.8, действует сила, то его длина изменяется. Опыт показывает, что если изменение длины ΔL мало по сравнению с длиной тела, то это изменение пропорционально приложенной силе (в данном случае весу подвешенного тела). На это впервые обратил внимание Роберт Гук (1635–1703). Такую пропорциональность можно записать в виде соотношения, которое иногда называют законом Гука:

$$F = k\Delta L. \tag{11.3}$$

Здесь F – сила, растягивающая тело (в частности, вес другого тела), ΔL – приращение длины, а k – коэффициент пропорциональности. Соотношение (11.3) справедливо почти для любого твердого тела, будь то железный стержень или кость, но лишь до определенного предела. Если сила слишком велика, то тело получит столь сильное растяжение, что в конечном счете разорвется. На рис. 11.9 приведен типичный график зависимости удлинения от величины приложенной силы. Вплоть до точки, назы-

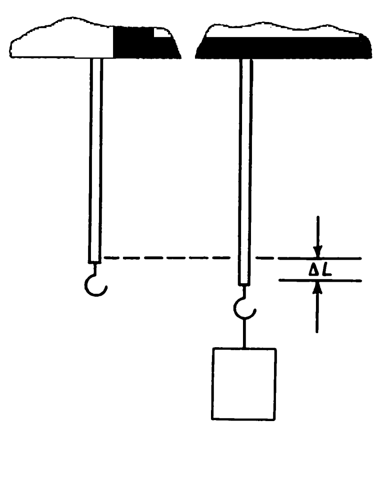

Рис. 11.8. Закон Гука: удлинение ΔL пропорционально приложенной силе.

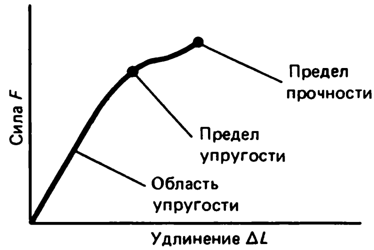

Рис. 11.9. Связь между силой и удлинением для твердого тела.

ваемой *пределом упругости*, длина тела после прекращения действия силы снова возвратится к первоначальной. Эта область называется *областью упругости* (или упругих деформаций). За пределом упругости деформация становится полностью или частично необратимой[1]. Для большинства материалов линейность сохраняется почти до предела упругости, и график в этой области идет по прямой. За пределом упругости график отклоняется от прямой и ΔL уже не связано с F простым соотношением (11.3). Если тело продолжать растягивать далеко за пределом упругости, то оно разорвется. Максимальная сила, которую можно приложить к телу, не разрушив его, называется *пределом прочности* материала, из которого изготовлено тело.

Удлинение тела, такого, как стержень на рис. 11.8, зависит не только от приложенной силы, но и от материала, из которого оно изготовлено, а также от его геометрических размеров. Эти факторы можно учесть в формуле (11.3), если включить их в постоянную k. Сравнивая стержни, изготовленные из одного и того же материала, но имеющие различные длины и поперечные сечения, обнаружим, что при одной и той же приложенной силе удлинение (которое по-прежнему предполагается малым по сравнению с длиной стержня) пропорционально первоначальной длине и обратно пропорционально площади поперечного сечения стержня. Иными словами, чем длиннее тело, тем больше оно удлинится при данной величине силы, а чем толще тело, тем меньше его удлинение. Эти экспериментальные факты с учетом соотношения (11.3) можно выразить следующим образом:

$$\Delta L = \frac{1}{E}\frac{F}{A}L_0, \tag{11.4}$$

где L_0 – первоначальная длина тела, A – площадь поперечного сечения, а ΔL – изменение длины тела под действием приложенной силы F. Коэффициент пропор-

[1] Здесь мы вступаем в область *пластических деформаций*.– *Прим. ред.*

Таблица 11.1. Модули упругости (10^9 Н/м^2)

Материал	Модуль Юнга E	Модуль сдвига G	Модуль объемной упругости B
Твердые тела			
Чугун	100	40	90
Сталь	200	80	140
Бронза	100	35	80
Алюминий	70	25	70
Бетон	20		
Кирпич	14		
Мрамор	50		70
Гранит	45		45
Дерево (сосна)			
вдоль волокон	10		
поперек волокон	1		
Найлон	5		
Кость (конечности)	15	80	
Жидкости			
Вода			2,0
Спирт (этиловый)			1,0
Ртуть			2,5

циональности[1)] E известен как *модуль продольной упругости*, или *модуль Юнга*. Его значение зависит только от материала, из которого изготовлено тело. В табл. 11.1 приведены значения модуля Юнга для некоторых материалов. Поскольку E зависит только от материала и не зависит от формы и размеров тела, для практических расчетов более полезно применять формулу (11.4), чем (11.3). Из (11.4) видно, что изменение длины тела прямо пропорционально длине тела L_0 и отношению силы к площади поперечного сечения F/A. Отношение F/A называют *механическим напряжением* (или просто *напряжением*):

$$\text{Напряжение} = \frac{\text{Сила}}{\text{Площадь}} = \frac{F}{A}.$$

Отношение изменения длины к первоначальной длине называется *относительным удлинением*:

$$\text{Относительное удлинение} = \frac{\text{Изменение длины}}{\text{Первоначальная длина}} = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Таким образом, относительное удлинение характеризует степень изменения длины и является мерой деформации рассматриваемого нами стержня. Выражение (11.4) можно

[1)] Исторически сложилось так, что E входит в знаменатель; подлинным коэффициентом пропорциональности является величина $1/E$.

переписать в виде

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L_0}, \tag{11.5}$$

или

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{\text{Напряжение}}{\text{Относительное удлинение}}.$$

Мы видим, что относительное удлинение прямо пропорционально напряжению.

Пример 11.5. Рояльная проволока имеет диаметр 0,20 см и длину 1,60 м. Какое натяжение испытывает проволока, когда при закреплении в инструменте ее удлиняют на 0,30 см?

Решение. Запишем выражение для F из (11.4) и заметим, что площадь поперечного сечения проволоки $A = \pi r^2 = (3{,}14) \times (0{,}0010\ \text{м})^2 = 3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2$. Таким образом, мы имеем

$$F = E\frac{\Delta L}{L_0}A = (2{,}0 \cdot 10^{11}\ \text{Н/м}^2)\left(\frac{0{,}0030\ \text{м}}{1{,}60\ \text{м}}\right) \times (3{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^2) = 1200\ \text{Н}$$

(значение E мы взяли из табл. 11. 1).

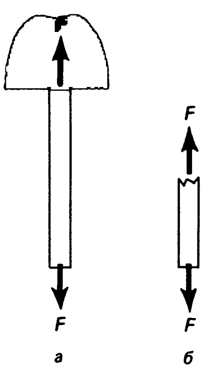

Рис. 11.10. Напряжение существует *внутри* твердого тела.

Стержень на рис. 11.8 испытывает *растягивающее напряжение*. Действительно, на стержень действует не только сила, приложенная к его нижнему концу и действующая вниз, но, поскольку стержень находится в равновесии, еще и равная по величине и направленная вверх сила со стороны подвеса (рис. 11.10, *а*)[1]. Растягивающее напряжение существует во всем объеме материала стержня. Рассмотрим, например, нижнюю половину стержня, подвешенного так, как показано на рис. 11.10, *б*. Эта нижняя половина находится в равновесии, поэтому на нее должна действовать направленная вверх сила, уравновешивающая силу, приложенную к нижнему концу стержня. Что создает эту силу? Она может действовать только со стороны верхней половины стержня. Мы видим, таким образом, что приложенные к телу внешние силы создают внутри него внутренние силы (точнее, внутренние напряжения).

Рис. 11.11. Греческий храм (Пест, Италия).

Относительное удлинение, вызванное растягивающим напряжением,– это лишь один из видов деформации, которой могут подвергаться материалы. Имеются еще два наиболее распространенных типа напряжений – *напряжение сжатия* и *напряжение сдвига*. *Напряжение сжатия* прямо противоположно растягивающему напряжению. Материал при этом не растягивается, а сжимается: силы, приложенные к телу, действуют внутрь тела. Напряжение сжатия испытывают любые поддерживающие какую-либо конструкцию колонны, например колонны греческого храма (рис. 11.11). Формулы (11.4) и (11.5) одинаково применимы как к растяжению, так и к сжатию, причем в обоих случаях значения E, как правило, одни и те же.

[1] Мы пренебрегаем здесь весом стержня.

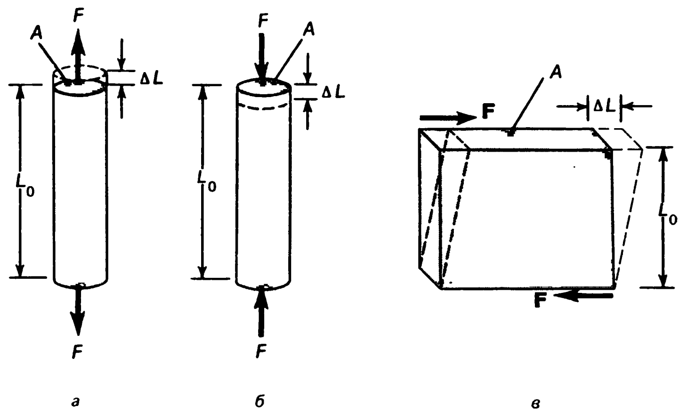

Рис. 11.12. Три типа напряжений. *а* – растяжение; *б* сжатие; *в* - сдвиг.

На рис. 11.12 иллюстрируются напряжение растяжения и напряжение сжатия, а также третий тип напряжения – напряжение сдвига. *Напряжение сдвига* тело испытывает в случае, когда две равные по величине и противоположные по направлению силы приложены *навстречу* друг другу к двум противоположным сторонам тела. Примером могут служить книга или кирпич на поверхности стола, когда их пытаются припечатать к столу, прикладывая к верхней грани параллельную этой грани силу. При этом на нижнюю грань будет действовать равная по величине и противоположно направленная сила со стороны стола. Хотя размеры тела заметно не изменяются, оно деформируется, как показано на рис. 11.12, *в*. Для расчета деформации сдвига пользуются формулой, аналогичной (11.4):

$$\Delta L = \frac{1}{G}\frac{F}{A}L_0, \tag{11.6}$$

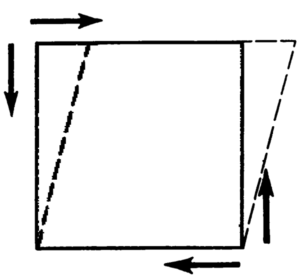

Рис. 11.13. Равновесие сил и моментов сил при напряжении сдвига.

но теперь величины ΔL, L_0 и A имеют несколько иной смысл (рис. 11.12, *в*). Обратите внимание, что A – площадь поверхности, *параллельной* приложенной силе (а не перпендикулярной, как в случае растяжения и сжатия), в то время как величина ΔL *перпендикулярна* L_0. Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига* и составляет обычно от $^1/_2$ до $^1/_3$ значения модуля упругости E (табл. 11.1).

На рис. 11.12, *в* тело прямоугольной формы, испытывающее напряжение сдвига, не находится, вообще говоря, в равновесии, поскольку в этом случае имеется результирующий момент сил. Если же тело фактически находится в равновесии, то должны существовать еще две силы, действие которых компенсирует результирующий момент силы. Как показано на рис. 11.13, одна из них действует вертикально вверх (справа), а другая – вниз (слева). Такая картина является обычной при напряжении сдвига. В нашем примере с кирпичом или книгой, лежащими на столе, эти две дополнительные силы создаются столом и тем телом, которое действует на верхнюю грань предмета на столе.

Если тело подвергается сжатию со всех сторон, то его объем уменьшается. Такое сжатие испытывают, например, тела в жидкости: жидкость, как мы покажем в гл. 12, оказывает давление со всех сторон на погруженное в нее тело. Давление определяется как сила, действующая на единицу площади поверхности и, таким образом, эквивалентная напряжению. Установлено на опыте, что изменение объема $\triangle V$ пропорционально изменению давления $\triangle P$ и первоначальному объему V_0. Математически это описывается соотношением, аналогичным (11.4), но теперь коэффициент пропорциональности называется *модулем объемной упругости* (иногда модулем всестороннего сжатия) B:

$$\frac{\triangle V}{V_0} = -\frac{1}{B}\triangle P,$$

или

$$B = -\frac{\triangle P}{\triangle V/V_0}. \qquad (11.7а)$$

Знак минус здесь означает, что объем *уменьшается* с увеличением давления. Модуль объемной упругости иногда определяют в более общем виде через производную давления по объему:

$$B = -V\frac{dP}{dV}. \qquad (11.7б)$$

Значения модуля объемной упругости также приведены в табл. 11.1. Поскольку жидкости и газы не имеют определенной формы, для них применимо только понятие модуля объемной упругости.

11.5. Разрушение тел

Если механическое напряжение, приложенное к телу, слишком велико, то тело сломается или разрушится (рис. 11.14). В табл. 11.2 приведены значения пределов прочности на растяжение, сжатие и сдвиг для различных материалов. Указанные в таблице значения соответствуют максимальному напряжению соответствующего типа, которое тело может выдержать не разрушаясь. Однако эти значения следует рассматривать лишь как ориентировочные: истинное значение для данного образца может существенно отличаться от табличного. Поэтому в расчеты необходимо закладывать трехкратный, а возможно, и десятикратный запас прочности, т. е. реальные напряжения в конструкции должны быть в 3–10 раз меньше указанных в таблице. Иногда можно встретить таблицы «допустимых напряжений», в которых приводятся значения напряжений с учетом необходимого запаса прочности.

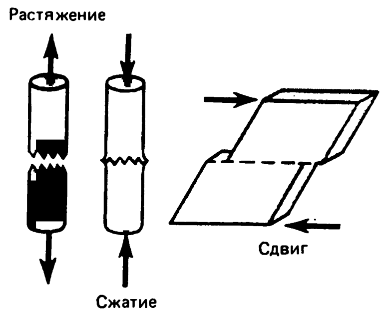

Рис. 11.14. Разрушение тела при трех типах напряжения.

Таблица 11.2. Пределы прочности (предельные напряжения) некоторых материалов (10^6 Н/м^2)

Материал	Растяжение	Сжатие	Сдвиг
Чугун	170	550	170
Сталь	500	500	250
Бронза	250	250	200
Алюминий	200	200	200
Бетон	2	20	2
Кирпич		35	
Мрамор		80	
Гранит		170	
Дерево (сосна)			
вдоль волокон	40	35	5
поперек волокон		10	
Найлон	500		
Кость (конечности)	130	170	

Пример 11.6. а) Какое минимальное поперечное сечение должны иметь опоры, удерживающие балку в примере 11.2 (рис. 11.5), если они изготовлены из бетона, а запас прочности принят равным 6? б) Насколько сожмутся опоры под указанной в примере 11.2 нагрузкой?

Решение. а) На правую опору действует бо́льшая сила, равная $1{,}2\cdot 10^5$ Н. Очевидно, что опора испытывает напряжение сжатия. Из табл. 11.2 находим, что предел прочности бетона на сжатие составляет $2{,}0\cdot 10^7$ Н/м^2. При шестикратном запасе прочности максимальное допустимое напряжение равно $3{,}3\cdot 10^6$ Н/м^2. Таким образом, поскольку $F/A = 3{,}3\cdot 10^6$ Н/м^2 и $F = 1{,}2\cdot 10^5$ Н, мы находим

$$A = \frac{1{,}2\cdot 10^5 \text{ Н}}{3{,}3\cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 3{,}6\cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 360 \text{ см}^2.$$

Можно использовать опоры сечением 18×20 см^2.

б) Из (11.5) имеем

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{A} = \left(\frac{1}{2{,}0\cdot 10^{10}\text{ Н/м}^2}\right)(3{,}3\cdot 10^6\text{ Н/м}^2) = 1{,}7\cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, если высота опоры $L_0 = 5{,}0$ м, то $\Delta L = 0{,}85\cdot 10^{-3}$ м ≈ 1 мм. Мы провели этот расчет для правой опоры, где нагрузка больше. Если левая опора имеет такое же поперечное сечение, то она сожмется меньше, и это необходимо учитывать.

Как видно из табл. 11.2, бетон (подобно камню и кирпичу) имеет большую прочность на сжатие, но чрезвычайно непрочен

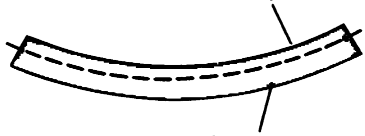

Рис. 11.15. Балка хотя бы немного прогибается даже под действием собственного веса (на рисунке прогиб показан в увеличенном масштабе). Форма балки, таким образом, изменяется, причем в верхней части она сжимается, а в нижней растягивается; внутри балки существует также напряжение сдвига.

на растяжение. Поэтому бетон можно использовать для изготовления вертикальных колонн, испытывающих сжатие, но из него нельзя делать балки, в которых возникают растягивающие напряжения (рис. 11.15). Железобетон, внутри которого содержатся стальные стержни, значительно прочнее и более устойчив, однако с нижней стороны нагруженной балки бетон из-за малой прочности на растяжение все равно растрескивается. Создание предварительно напряженного железобетона позволило разрешить эту проблему; в этот бетон также закладываются стальные стержни или сетка из проволоки, которые во время заливки бетоном держат в напряженном состоянии. После того как бетон затвердеет, напряжение со стержней снимается, и они сами начинают сжимать бетон, в который были заложены. Величина создаваемого арматурой напряжения сжатия заранее тщательно рассчитывается таким образом, чтобы при действии на балку нагрузки сжатие с нижней стороны балки значительно ослаблялось, а бетон никогда не подвергался растягивающим напряжениям.

Заключение

Тело (или система тел) находится в *равновесии*, если сумма сил и моментов сил, приложенных к телу (системе тел), равна нулю. Раздел физики, который изучает силы, действующие на тело извне (или внутри его), когда тело находится в состоянии равновесия и покоится, называется *статикой*.

Сила тяжести, действующая на все частицы тела, влияет на поступательное и вращательное движение точно так же, как одна сила, приложенная в *центре тяжести* (ЦТ) тела (в предположении, что вектор $\mathbf{g}$ является постоянным). Величина этой силы равна произведению полной массы тела на ускорение свободного падения, т. е. величине $M\mathbf{g}$. Если значения ускорения свободного падения одинаковы во всех точках тела, то центр тяжести совпадает с центром масс.

Чтобы тело находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех сил и всех моментов сил, действующих на тело, была равна нулю:

$$\sum \mathbf{F} = 0, \quad \sum \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Эти два векторных уравнения эквивалентны шести скалярным уравнениям для проекций полных сил и моментов (по осям соответственно x, y и z). Если все силы действуют в одной плоскости (скажем, в плоскости xy), то система уравнений сводится лишь к трем уравнениям:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0.$$

Все материалы в той или иной степени обладают упругостью: Материалы могут подвергаться *растягивающему напряжению*, *напряжению сжатия* или *напряжению сдвига*. *Напряжение* каждого типа определяется как сила, действующая на единицу площади, а вызываемое им *относительное удлинение* – как отношение изменения дли-

ны к первоначальной длине тела. До тех пор пока не превышен *предел упругости,* относительное удлинение пропорционально напряжению. Когда напряжение превышаёт предел прочности вещества, тело разрушается.

Вопросы

1. Что имеют в виду, когда говорят о центре тяжести Луны?

2. Предположим, что ЦМ и ЦТ тела не совпадают. Как в этом случае будет двигаться тело, брошенное вертикально вверх без начального вращения? Объясните ответ и сравните со случаем, когда ЦТ и ЦМ совпадают.

3. Приведите несколько примеров, когда тело не находится в равновесии, хотя действующая на него результирующая сила равна нулю.

4. В некоторых заповедниках для того, чтобы уберечь запасы провизии от медведей, делают приспособления типа изображенного на рис. 11.16. Объясните, почему, чем выше подни-

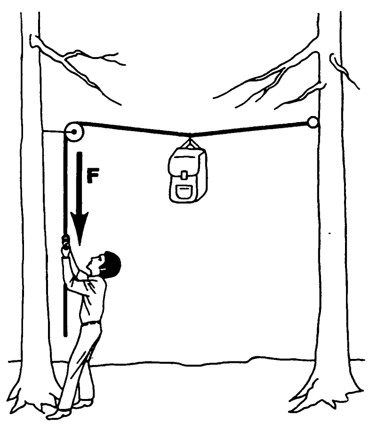

Рис. 11.16.

маешь тело (в данном случае рюкзак), тем большую силу приходится прикладывать.

5. Лестница, приставленная к стене, составляет угол 60° с поверхностью земли. Когда больше опасность, что лестница соскользнет, - когда человек стоит на верхней или на нижней ступеньке?

6. Если сумма моментов сил относительно некоторой точки О равна нулю, то обязательно ли она равна нулю относительно другой точки O′?

7. Объясните, почему нижняя часть позвоночника испытывает меньшую нагрузку, когда вы достаете руками носки ног сидя на полу и вытянув ноги, чем когда вы делаете это стоя? Используйте рисунок.

8. На рис. 11.17, *а* изображена подпорная стен-

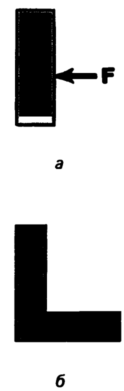

Рис. 11.17.

ка. Грунт, в особенности влажный, может действовать на стенку со значительной силой **F**. а) Какая сила создает момент, предотвращающий опрокидывание стенки? б) Почему конструкция подпорной стенки на рис. 11.17, *б* значительно более устойчива к опрокидыванию?

9. Объясните, как действуют ножницы, когда ими разрезают картон.

10. Такие материалы, как обычный бетон и камень, плохо выдерживают растяжение и сдвиг. Разумно ли использовать подобный материал для любой из опор консоли на рис. 11.18? Если

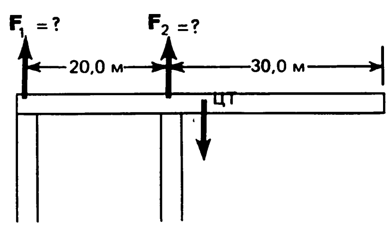

Рис. 11.18. Консоль (балка, выходящая за пределы опоры).

ответ утвердительный для одной опоры, то для какой именно?

Задачи

Раздел 11.3

1. (I) Каким должно быть натяжение проволоки в корригирующем зубном протезе на

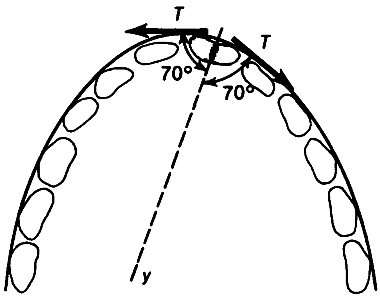

Рис. 11.19.

рис. 11.19, чтобы на выделенный зуб действовала в указанном направлении результирующая сила 0,60 Н?

2. (I) Горизонтальная балка массой 150 кг лежит обоими концами на опорах. На балке на расстоянии в четверть ее длины от одного из концов установлено пианино массой 200 кг. Какова вертикальная сила, действующая на опоры?

3. (I) Люстра подвешена на двух шнурах, как и на рис. 11.4, с той лишь разницей, что верхний шнур теперь составляет угол 45° с потолком. Какой может быть предельная масса люстры, если шнуры способны выдержать натяжение 1000 Н?

4. (I) а) Вычислите силу $\mathbf{F}_M$, которую должна создавать дельтовидная мышца, чтобы удерживать вытянутую руку в горизонтальном положении (рис. 11.20). Масса всей руки равна

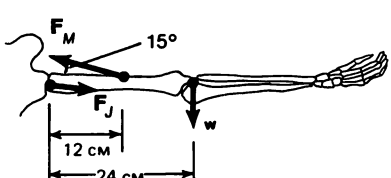

Рис. 11.20.

2,8 кг. б) Чему равна $\mathbf{F}_M$, когда в руке держат гантель массой 10 кг (на расстоянии 50 см от плечевого сустава)?

5. (II) Вычислите в задаче 4 для случаев «а» и «б» величину и направление силы $\mathbf{F}_J$, действующей на плечевую кость в суставе со стороны лопатки.

6. (II) Шар массой 9,1 кг подвешен к потолку на шнуре *A*. Шнур *B* тянет шар вниз и вбок. Найдите натяжения шнуров *A* и *B*, если шнур *A* составляет с вертикалью угол 20°, а шнур *B* - угол 50°.

7. (II) Дверь высотой 2,35 м и шириной 1,10 м имеет массу 13,0 кг. Вес двери поровну распределен между двумя петлями, расположенными на расстоянии 0,35 м от нижней и верхней сторон двери. Считая, что центр тяжести находится в геометрическом центре двери, вычислите вертикальные и горизонтальные составляющие сил, действующих со стороны петли на дверь.

8. (II) Вычислите силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ для консольной балки из однородного материала массой 11 000 кг, показанной на рис. 11.18. (Определите величину и направление обеих сил.)

9. (II) Рассчитайте силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действующие со стороны опор на трамплин для прыжков в воду (рис. 11.21), если на его конце стоит человек массой 60 кг. Решите задачу для случаев, когда а) масса трамплина не учитывается и б) масса трамплина равна 35 кг, а его ЦТ расположен в геометрическом центре трамплина.

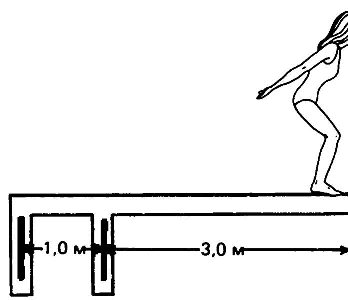

Рис. 11.21.

10. (II) Туго натянутая над землей проволока имеет длину 50 м и провисает на 3,8 м, когда канатоходец массой 60 кг стоит на ее середине. а) Чему равно натяжение проволоки? б) Возможно ли натянуть проволоку столь сильно, чтобы она совсем не провисала?

11. (II) Дверь сарая приперта тяжелой доской массой 80 кг, которая составляет с дверью угол 45° и упирается в край двери на расстоянии 2,6 м от оси дверных петель. Какую силу должен приложить к краю двери в горизонтальном направлении человек, стоящий внутри, чтобы открыть дверь? Считайте, что трение между доской и дверью пренебрежимо мало; конец доски, стоящий на земле, закреплен, так что проскальзывание отстутствует.

12. (II) Решите предыдущую задачу, считая коэффициент трения между доской и дверью равным 0,45.

13. (II) Человек ростом 160 см лежит на легкой доске с пренебрежимо малой массой, установленной на двух весах таким образом, что одни

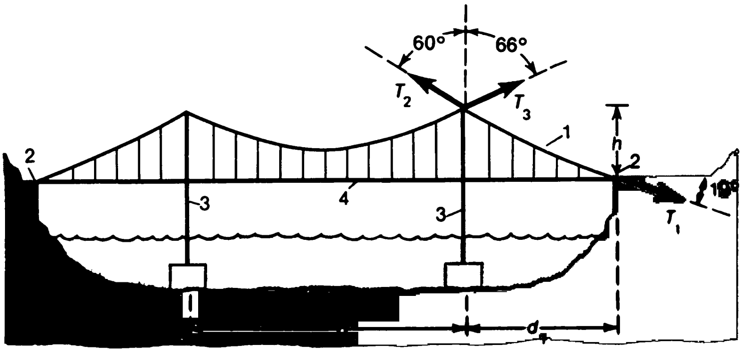

Рис. 11.22.

весы находятся под макушкой, а другие – под ступнями ног лежащего. Показания весов равны соответственно 32,8 и 29,8 кг. Где находится центр тяжести лежащего человека?

14. (II) Расстояние между деревьями на рис. 11.16 равно 12,5 м. Вычислите величину силы **F**, которую должен приложить человек для того, чтобы удержать сумку с провизией массой 15,0 кг на веревке, а веревка при этом провисла в середине на а) 2,0 м; б) 0,20 м.

15. (II). На рис. 11.22 показаны силы, действующие на северном участке висячего моста «Золотые ворота» в Сан-Франциско, который имеет длину $d_1 = 343$ м. Пусть центр тяжести этого участка находится посередине между анкерной опорой 2 и пилоном 3. Определите силы T_1 и T_2 (действующие на северный участок троса 1) и выразите их через mg (вес северного участка мостового полотна 4); вычислите высоту h, при которой система находится в равновесии. Считайте, что мостовое полотно свободно подвешено к тросу 1. (*Подсказка:* сила T_3 на рассматриваемый участок не действует.)

16. (II) Представьте себе, что однопролетный висячий мост, подобный мосту «Золотые ворота», имеет конфигурацию, показанную на рис. 11.22. Считайте, что мостовое полотно (4) является однородным по всей длине моста и что каждый из трех участков мостового полотна целиком удерживается лишь соответствующим участком находящегося под ним троса. Концы троса закреплены в анкерных опорах (2) и не соединены с мостовым полотном. Чему должно быть равно отношение d_1/d_2, чтобы со стороны троса на пилоны (3) не действовала горизонтальная составляющая силы? Пренебрегите массой троса и отклонением мостового полотна от строго горизонтального.

17. (II) Лестница длиной 9,5 м и массой 16,0 кг прислонена к гладкой вертикальной стене (так что сила $\mathbf{F}_w$ со стороны стены перпендикулярна стене), а другим концом упирается в землю. Лестница составляет угол 20° со стеной; проскальзывание по поверхности земли отсутствует. а) Вычислите составляющие силы, действующей со стороны поверхности земли на основание лестницы. б) Каким должен быть коэффициент трения между основанием лестницы и поверхностью земли, чтобы лестница не соскользнула, когда на лестнице на уровне 3/4 ее высоты стоит человек массой 75 кг?

18. (II) До какой высоты может подняться человек по лестнице в предыдущей задаче, прежде чем она начнет проскальзывать по поверхности земли, если коэффициент трения между лестницей и землей равен 0,40?

19. (II) На рис. 11.23,*а* показана круглая арка, а на рис. 11.23,*б* – стрельчатая (готическая) арка. Обе имеют одинаковую ширину пролета 8,0 м и поддерживают вышележащую часть стены и крышу здания. Рассматривайте каждую арку составленной как бы из двух «полуарок», соединенных (шарнирно) в верхней точке; нагрузка со стороны верхней стенки на каждую полуарку указана на рисунке отдельной стрелкой, направленной вниз. а) Покажите, что для предотвращения падения арки на нее должна действовать со стороны опоры горизонтальная сила F_H. б) Покажите, что при одной и той же нагрузке на арку сверху горизонтальная сила, действующая со стороны опоры на готическую арку, вдвое меньше, чем действующая на круглую. в) Что можно сказать о технических преимуществах готической арки?

20. (II) Однородный гибкий стальной трос массой m закреплен на одинаковой высоте на двух опорах и благодаря провисанию составляет в точках подвеса угол θ с горизонталью. Определите натяжение троса а) в нижней точке провисания; б) в точках крепления к опорам. Как направлена сила натяжения в каждом из этих случаев?

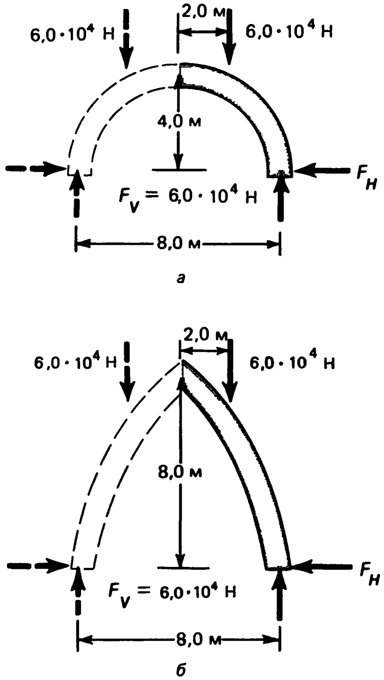

Рис. 11.23.

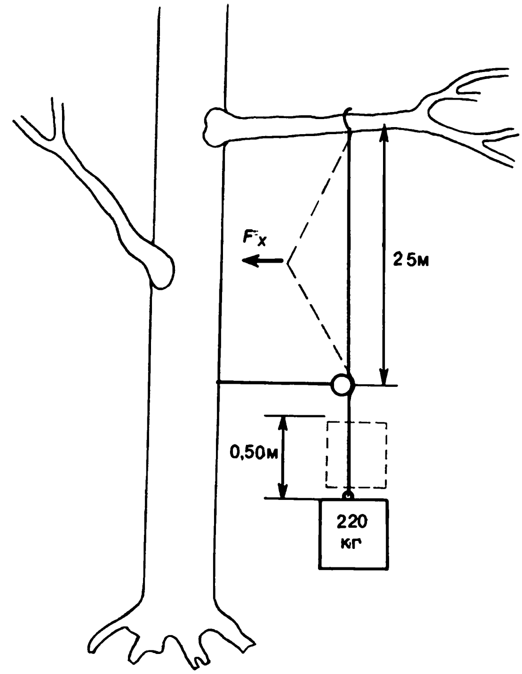

Рис. 11.24.

21. (II) Проектируется 50-этажное здание высотой 210 м с площадью основания 40 м × × 70 м. Его полная масса равна примерно $1{,}60 \cdot 10^7$ кг. Считайте, что центр тяжести здания совпадает с его геометрическим центром. а) Опрокинется ли здание под напором ветра скоростью 200 км/ч, направленного перпендикулярно стене шириной 70 м? (*Подсказка:* считайте здание свободно стоящим на земле; ветер, налетая на стену, полностью тормозится; плотность воздуха 1,29 кг/м^3.) б) При какой наименьшей скорости ветра здание опрокинется?

22. (II) Автолюбителю необходимо снять со своей машины двигатель массой 220 кг. Его план таков: натянуть веревку вертикально вверх от двигателя к ветке дерева на высоте 25 м (рис. 11.24), причем веревку несколько выше двигателя перекинуть через жестко закрепленный блок таким образом, чтобы, когда автолюбитель заберется на дерево до середины его высоты и начнет тянуть веревку за ее середину в горизонтальном направлении, двигатель поднялся из-под капота автомобиля. Какую силу должен приложить автолюбитель, чтобы поднять двигатель на 0,50 м?

23. (II) От вершины стойки высотой 2,4 м, на которой закреплена волейбольная сетка, идут две проволочные оттяжки, прикрепленные к земле на расстоянии 2 м от основания стойки и в 2 м одна от другой. Натяжение каждой проволоки составляет 65 Н. Каково натяжение сетки, если считать, что она натянута горизонтально и закреплена в вершине стойки?

24. (II) Круглый стол массой 30 кг имеет три ножки, расположенные по краю стола на одинаковых расстояниях друг от друга. Чему равна минимальная масса тела, которое нужно положить на край стола, чтобы он опрокинулся?

25. (II) Человек передвигает по полу торшер массой 9,6 кг. Считайте, что сила со стороны человека приложена на высоте 60 см от пола, а коэффициент трения между основанием торшера и полом равен 0,20. а) Будет ли торшер скользить по полу или он опрокинется (рис. 11.25)? б) На какой максимальной высоте от пола человек должен приложить силу, чтобы торшер скользил по полу не опрокидываясь?

26. (III) При ходьбе человек всем своим весом опирается в течение небольшого промежутка времени лишь на одну из своих ног, и центр тяжести тела находится над ступней этой ноги. На рис. 11.26 показаны соответствующие силы, действующие на ногу. Вычислите силу со стороны приводящей мышцы бедра $\mathbf{F}_M$, а также

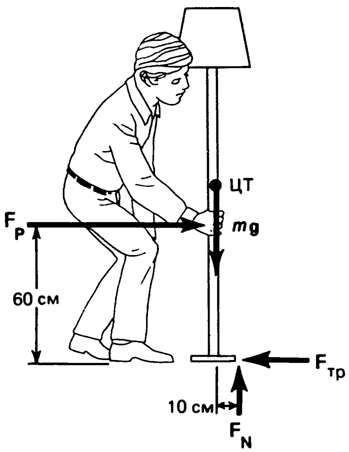

Рис. 11.25.

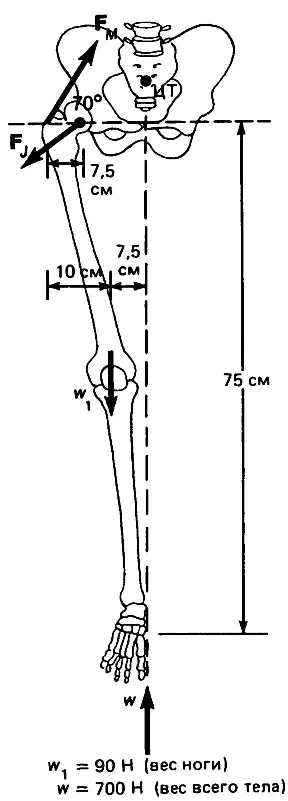

Рис. 11.26.

x- и y-проекции силы $\mathbf{F}_J$, действующей на головку бедра со стороны отводящей мышцы бедра. Рассматривайте ногу в этой задаче как единое целое.

27. (III) а) Пользуясь данными из условия задачи 26, вычислите силы $\mathbf{F}_M$ и $\mathbf{F}_J$ (рис. 11.26) в случае, когда человек несет в каждой руке по чемодану массой 20 кг каждый. Считайте, что ЦТ каждого чемодана расположен точно под нижним концом бедренной кости. б) Рассчитайте $\mathbf{F}_M$ и $\mathbf{F}_J$ для правой ноги человека, несущего один такой же чемодан в левой руке. (*Подсказка:* сначала определите положение ЦТ системы «человек + чемодан»; эта точка будет находиться выше ступни, и соответственно изменятся расстояния по горизонтали, указанные на рис. 11.26. Заметьте, что эти силы оказываются больше, когда человек несет один чемодан, чем когда у него в каждой руке по такому же чемодану!)

28. (III) На краю стола укладывают стопкой четыре кирпича таким образом, что каждый следующий выступает над нижними, причем самый верхний кирпич выступает над краем стола на максимально возможное расстояние. а) Покажите, что стопка кирпичей не опрокинется, если каждый кирпич будет нависать над нижележащим не более чем (начиная с верхнего) на 1/2, 1/4, 1/6, 1/8 своей длины. б) Окажется ли верхний кирпич полностью за краем стола? в) Выведите общую формулу для максимального расстояния, на которое стопка из n кирпичей может выходить за край стола, не теряя устойчивости.

Раздел 11.4

29. (I) Мраморная колонна с площадью поперечного сечения 2,0 м^2 удерживает тело массой 30 000 кг. а) Чему равно механическое напряжение внутри колонны? б) Каково относительное удлинение колонны? в) На сколько укорачивается колонна, если ее высота под нагрузкой становится равной 10,5 м?

30. (II) Какую силу нужно приложить, чтобы вытянуть рояльную проволоку диаметром 0,052 см на 0,015% ее первоначальной длины?

31. (II) Какое давление нужно создать, чтобы уменьшить объем железного слитка на 0,11%? Выразите ответ в Н/м^2 и сравните полученное значение давления с атмосферным ($1{,}0 \times 10^5$ Н/м^2).

32. (II) Один литр (1000 см^3) этилового спирта в мягком сосуде погружают на дно моря, где давление равно $2{,}8 \cdot 10^6$ Н/м^2. Чему здесь равен объем спирта?

33. (II) Сухожилие животного длиной 16 см под действием силы 12,4 Н удлиняется на 3,3 мм. Сухожилие можно считать круглым в сечении с диаметром 8,6 мм. Рассчитайте модуль упругости этого сухожилия.

34. (II) Моллюск морской гребешок открывает свою раковину с помощью упругого вещества

абдуктина, модуль упругости которого примерно равен $2{,}0 \cdot 10^6$ Н/м^2. Какую потенциальную энергию запасает кусочек абдуктина толщиной 3,0 мм и площадью сечения 0,50 см^2 при сжатии его на 1,0 мм?

35. (III) К фасаду магазина торцом прикреплен горизонтально длинный шест. К шесту на расстоянии 2,1 м от стены подвешена вывеска массой 4,5 кг. а) Какой вращающий момент создает вес вывески относительно точки, где шест крепится к стене? б) Чтобы шест не опрокинулся, на него должен действовать некоторый компенсирующий момент силы. Чем создается этот момент силы? Покажите на рисунке, как должен возникнуть этот момент. в) Какие деформации (сжатие, растяжение, сдвиг) существенны при ответе на вопрос «б»?

Раздел 11.5

36. (I) Средняя площадь сечения бедренной кости человека равна 3,0 см^2. Какую силу сжатия может выдержать кость не разрушаясь?

37. (II) Какую минимальную площадь поперечного сечения должна иметь стальная проволока, на которой вертикально подвешивается люстра массой 280 кг? Считайте, что запас прочности равен 5,0.

38. (II) Две стальные пластины соединяются друг с другом стальным болтом. Болт должен выдерживать нагрузки до 2500 Н. Вычислите минимальный диаметр болта, заложив в расчет запас прочности 4,5.

39. (II) В примере 8.8 были рассчитаны импульс и средняя сила для ноги человека, прыгающего на землю с высоты 5,0 м. В предположении, что ноги при приземлении не сгибаются и перемещение тела при столкновении с землей составляет только $d = 1{,}0$ см, а) вычислите механическое напряжение в берцовой кости (площадь поперечного сечения $3{,}0 \cdot 10^{-4}$ м^2) и б) определите, сломается кость или нет. в) Ответьте на эти же вопросы, если человек при приземлении сгибает ноги в коленях ($d = 50{,}0$ см).

40. (II) Опоры консоли массой 11 000 кг на рис. 11.18 изготовлены из дерева. Рассчитайте минимальное допустимое в этом случае поперечное сечение каждой опоры с запасом прочности 8,5.

41. (III) Потолочное перекрытие в классной комнате размером 7,5 м × 10,0 м должно помимо собственной массы 4100 кг выдерживать равномерно распределенную нагрузку массой 10 000 кг (133 кг/м^2). Предполагается, что перекрытие поддерживается деревянными стойками, каждая с поперечным сечением 4,0 см × 9,0 см, установленными вдоль более длинных стен. Сколько стоек и на каком расстоянии друг от друга нужно поставить с каждой стороны? Считайте стойки работающими только на сжатие; запас прочности равен 15.

42. (II) Существует максимальная высота однородной вертикальной колонны из любого материала, не зависящая от площади поперечного сечения (почему?), при превышении которой колонна разрушится. Вычислите эту высоту для колонны из а) стали (плотность $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3) и б) гранита (плотность $2{,}7 \times 10^3$ кг/м^3).

43. (II) Стальной трос удерживает кабину лифта, масса которой в нагруженном состоянии не должна превышать 2500 кг. Если максимальное ускорение лифта равно 1,5 м/с^2, то каким должен быть диаметр троса при запасе прочности 5,0?

44. (III) С какой высоты нужно уронить кирпич размером 15,0 см × 6,0 см × 4,0 см и массой 1,2 кг на жесткий стальной пол, чтобы кирпич разбился? Считайте, что кирпич падает плашмя и что сжатие кирпича при ударе гораздо больше, чем сжатие пола (т. е. сжатием стали можно пренебречь).