13 Гидродинамика (движущиеся жидкости и газы)

Перейдем теперь от рассмотрения покоящихся жидкостей и газов к рассмотрению более сложного предмета, изучающего движение жидкости или газа и называемого **гидродинамикой**. Многие аспекты гидродинамики до сих пор еще до конца не объяснены; тем не менее при некоторых упрощающих предположениях удается получить хорошее представление о гидродинамических явлениях.

Один из методов изучения потоков жидкости (газа) состоит в рассмотрении движения отдельных частиц (или крошечных элементов объема). Движение каждой частицы подчиняется законам Ньютона, и его можно в принципе рассчитать, однако расчет оказывается исключительно сложным и громоздким. Вместо этого используют иной путь (которому последуем и мы), заключающийся в том, что свойства жидкости рассматривают в каждой точке пространства. Иначе говоря, вместо того чтобы следить за траекторией движения каждой частицы в жидкости, мы будем описывать параметры движения жидкости в каждой точке пространства, выражая скорость и плотность для каждой точки как функции времени.

13.1. Характеристики течения

Различают два основных типа течений жидкостей и газов. Если течение плавное и смежные слои как бы скользят друг относительно друга, то его называют **ламинарным** или **слоистым**. Характерная особенность ламинарного течения в том, что каждая частица жидкости (газа) движется по гладкой траектории и траектории разных частиц не пересекаются (рис. 13.1,*а*). Когда скорость течения превышает определенный предел, зависящий, как мы увидим ниже, от ряда факторов, течение становится турбулентным. **Турбулентное течение** характеризуется наличием беспорядочных маленьких «водоворотов», называемых вихрями (рис. 13.1,*б*). Вихри поглощают огромное количество энергии, и, хотя внутреннее трение, называемое *вязкостью*, существует и в ламинарном течении, в турбулентном течении вязкость оказывается значительно большей. Ламинарное течение легко

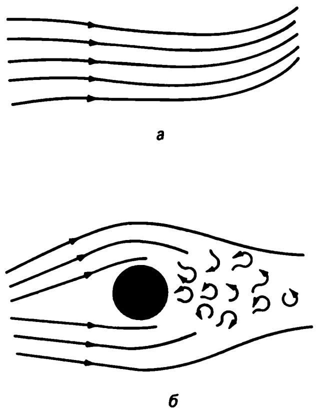


Рис. 13.1. *а* – ламинарное течение; *б* – турбулентное течение.

отличить от турбулентного, капнув в движущуюся жидкость немного чернил или пищевой краски.

Как для ламинарного, так и для турбулентного течения можно выделить четыре важнейшие характеристики. 1) Жидкость (газ) можно рассматривать либо как *сжимаемую*, либо как *несжимаемую*. Хотя не существует веществ, которые были бы абсолютно несжимаемы, течение многих жидкостей таково, что изменения плотности в нем очень малы и ими можно пренебречь, а это значительно упрощает рассмотрение. 2) *Вязкость*, или внутреннее трение, имеет место в любом течении жидкости (газа), однако вязкостью тоже часто можно пренебречь. В начале настоящей главы мы будем рассматривать *невязкое* (идеальное) течение, а затем уже изучим влияние вязкости. 3) Течение может быть *установившимся (стационарным)*. Скорость такого течения в любой точке пространства не изменяется во времени (это не значит, что она не может быть разной в различных точках пространства). Если скорость в данной точке изменяется со временем, то такое течение называется *нестационарным*; это течение наблюдается, например, когда мы только что открыли водопроводный кран и потекла вода. Нас будут интересовать главным образом стационарные течения. 4) Течение может быть *вихревым* и *безвихревым* (потенциальным). В безвихревом течении полный момент импульса жидкости относительно любой точки равен нулю. Иначе говоря, если бы мы ввели куда-либо в течение крошечную вертушку с лопастями, то она не стала бы вращаться. Если бы вертушка закрутилась, как в воронке или водовороте, то течение было бы вихревым. Эту довольно сложную характеристику течения мы здесь рассматривать непосредственно не будем.

13.2. Поток жидкости и уравнение неразрывности

В установившемся ламинарном потоке жидкости (газа) траектория, по которой движется данная частица, называется **линией тока** (рис. 13.1,*а*). Скорость жидкости в любой точке направлена по касательной к линии тока. В принципе линию тока можно провести через любую точку жидкости, однако обычно изображают лишь несколько линий тока. Линии тока не пересекаются друг с другом, так как в противном случае в точке их пересечения скорость оказалась бы неоднозначной.

Пучок линий тока, такой, как на рис. 13.2, называют *трубкой тока*. Поскольку линии тока представляют траектории частиц, жидкость не может втекать или вытекать через боковую поверхность трубки тока.

Рассмотрим теперь установившееся ламинарное течение в пределах трубки тока и выясним, как изменяется скорость жидкости в зависимости от поперечных разме-

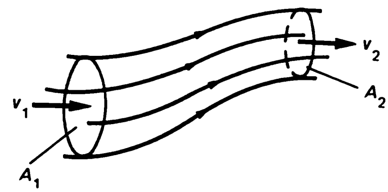


Рис. 13.2. Трубка тока.

ров трубки. Выберем трубку тока, достаточно малую для того, чтобы скорость жидкости в любом поперечном сечении была постоянной[1]. На рис. 13.2 v_1 и v_2 – скорости, с которыми жидкость движется соответственно через сечения площадью A_1 и A_2. *Массовый расход* определяют как массу Δm жидкости (газа), проходящую через данное поперечное сечение за единицу времени: $\Delta m/\Delta t$. На рис. 13.2 объем жидкости, проходящий через поперечное сечение A_1 за время Δt, равен $A_1 \Delta l_1$, где Δl_1 – длина пути, который проходит выделенная частица жидкости за время Δt. Поскольку скорость жидкости в A_1 равна $v_1 = \Delta l_1/\Delta t$, массовый расход $\Delta m/\Delta t$ через площадку A_1 равен

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 \Delta l_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1,$$

где $\Delta V_1 = A_1 \Delta l_1$ – объем, соответствующий массе Δm. Аналогично, в сечении A_2 массовый расход равен $\rho_2 A_2 v_2$. Поскольку перенос жидкости через стенки трубки тока отсутствует, массовые расходы в сечениях A_1 и A_2 одинаковы, так что мы имеем

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2.$$

Это выражение называется **уравнением неразрывности**. Если среда несжимаема (что в подавляющем большинстве случаев справедливо для жидкостей, а часто также и для газов), то $\rho_1 = \rho_2$, и уравнение неразрывности принимает вид

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad [\text{несжимаемая жидкость}]. \tag{13.1}$$

Заметим, что произведение Av есть *объемный* расход, или поток жидкости (объем жидкости, проходящей через данное сечение в единицу времени), так как $\Delta V/\Delta t = A\Delta l/\Delta t = Av$. Из уравнения (13.1) видим, что в том месте, где сечение трубки тока (или реальной трубы) большое, скорость меньше, а там, где сечение мало, скорость значительная. В справедливости этого вывода можно убедиться, наблюдая за течением реки; она спокойно несет свои воды, широко разлившись по равнине, но ускоряется до головокружительной быстроты, оказавшись в узком

[1] Реальные жидкости имеют заметную вязкость, и это внутреннее трение приводит к тому, что различные слои движутся с разными скоростями. В таком случае можно считать, что v_1 и v_2 – это средние скорости в каждом поперечном сечении.

ущелье. Из рис. 13.2 и уравнения (13.1) можно заметить, что, чем теснее расположены линии тока, тем выше скорость течения.

Уравнение (13.1) можно применить к рассмотрению движения крови в нашем организме. Из сердца кровь поступает в аорту, а оттуда распределяется по главным артериям, затем по более мелким и в конце концов расходится по миллионам крошечных капилляров. По венам кровь возвращается в сердце.

Пример 13.1. Радиус аорты равен примерно 1,0 см; кровь движется в аорте со скоростью около 30 см/с. Вычислим скорость тока крови в капиллярах, если известно, что суммарная площадь сечения капилляров составляет около 2000 см^2 (хотя каждый капилляр имеет диаметр всего $8 \cdot 10^{-4}$ см, количество их исчисляется буквально миллиардами).

Решение. Скорость тока крови в капиллярах равна

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{(0{,}30\ \text{м/с})(3{,}14)(0{,}010\ \text{м})^2}{(2 \cdot 10^{-1}\ \text{м}^2)} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м/с}$$

или 0,5 мм/с.

Рассмотрим еще пример на использование уравнения неразрывности.

Пример 13.2. Какой радиус поперечного сечения должен иметь воздуховод отопления, чтобы воздух в комнате объемом 300 м^3 полностью обновлялся каждые 15 мин? Скорость движения воздуха в воздуховоде 3,0 м/с. Будем считать, что плотность воздуха остается постоянной.

Решение. Для того чтобы применить уравнение неразрывности (13.1), будем рассматривать комнату как участок воздуховода большого сечения (отметим его индексом 2). Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (13.1), и заменяя Δt на t, находим $A_2 v_2 = A_2 l_2/t = V_2/t$, где V_2 – объем комнаты. Таким образом, $A_1 v_1 = A_2 v_2 = V_2/t$ и

$$A_1 = \frac{V_2}{v_1 t} = \frac{300\ \text{м}^3}{(3{,}0\ \text{м/с})(900\ \text{с})} = 0{,}11\ \text{м}^2.$$

Поскольку мы предполагаем, что сечения круглые, т.е. $A = \pi r^2$, находим, что радиус поперечного сечения воздуховода должен быть равен 0,19 м, или 19 см.

13.3. Уравнение Бернулли

Задавались ли вы вопросом, за счет чего проветривается нора луговой собачки? Почему дым в печной трубе поднимается? Отчего на большой скорости надувается брезентовый верх автомобиля? Все это примеры действия закона, открытого Даниилом Бернулли (1700–1782) в первой половине 18 в. Согласно *закону Бернулли, давление в потоке выше там, где скорость меньше, и наоборот.* Если бы мы, например, измерили давления в сечениях A_1 и A_2 на рис. 13.2, то давление в сечении A_2, где скорость больше, оказалось бы ниже, чем в A_1, где скорость меньше. На первый взгляд это может показаться странным; казалось бы, давление должно быть выше в сечении A_2, где больше скорость. Но это не так. Если бы давление в сечении A_2 было выше, чем в A_1, то движение жидкости замедлилось бы, в то время как на самом деле жидкость ускоряется, и этому способствует пониженное давление в сечении A_2.

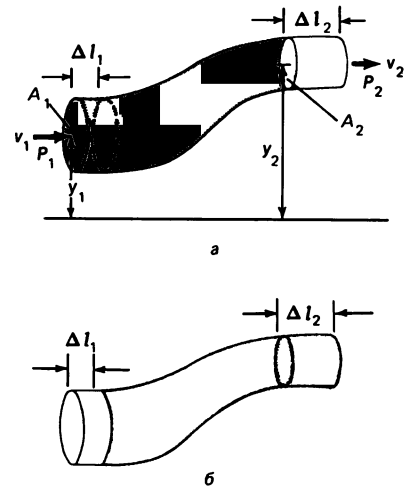


Рис. 13.3. **К выводу уравнения Бернулли.**

Бернулли вывел уравнение, которое выражает этот закон в количественном виде. Для получения уравнения Бернулли будем считать течение стационарным и ламинарным, жидкость несжимаемой, а вязкость пренебрежимо малой. Для большей общности рассмотрим трубку тока переменного поперечного сечения, высота которой к тому же меняется, начиная с некоторой точки отсчета (рис. 13.3). Вычислим работу, необходимую для перемещения закрашенного на рисунке объема жидкости из положения на рис. 13.3, *а* в положение на рис. 13.3, *б*. При этом жидкость в сечении A_1 перемещается вправо на расстояние Δl_1, что вынуждает жидкость в сечении A_2 перемещаться на расстояние Δl_2. Жидкость, находящаяся слева от A_1, создает давление P_1 на жидкость в трубке и совершает работу $W_1 = F_1 \Delta l_1 = P_1 A_1 \Delta l_1$. В сечении A_2 совершаемая работа равна $W_2 = -P_2 A_2 \Delta l_2$; знак минус здесь стоит потому, что направление силы, действующей на жидкость, противоположно направлению ее движения (закрашенная на рис. 13.3, *а* жидкость совершает работу над жидкостью справа от A_2). При этом совершается также работа в поле силы тяжести; в результате процесса, изображенного на рис. 13.3, участок жидкости массой m и соответствующим объемом $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$ переносится из сечения A_1 в A_2, и работа в поле силы тяжести запишется в виде

$$W_3 = -mg(y_2 - y_1).$$

Заметим, что в случае, показанном на рис. 13.3, работа является отрицательной, так как движение направлено вверх, т. е. против силы тяжести. Таким образом, полная работа, совершаемая над жидкостью, равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3,$$

$$W = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1.$$

Согласно теореме о связи работы и энергии (разд. 6.4), совершенная над системой работа равна изменению ее кинетической энергии. Таким образом,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 - mgy_2 + mgy_1 .$$

Участок жидкости массой m занимает объем $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$, поэтому мы можем подставить $m = \rho A_1 \Delta l_1 = \rho A_2 \Delta l_2$, и, разделив все на $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$, после соответствующего преобразования получим

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 . \tag{13.2}$$

Это и есть **уравнение Бернулли**. Поскольку сечения A_1 и A_2 могут быть выбраны произвольно вдоль трубки тока, уравнение Бернулли можно записать в виде

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{const}$$

в любой точке жидкости (вдоль линии тока).

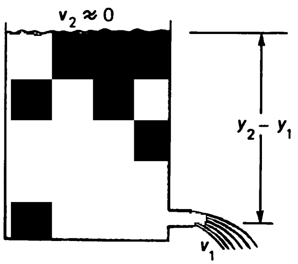


Рис. 13.4. Теорема Торричелли.

Область применения уравнения Бернулли очень широка. Для примера рассчитаем скорость v_1 жидкости, вытекающей из отверстия в нижней части бачка (рис. 13.4). В качестве A_2 в уравнении (13.2) выберем верхний уровень жидкости в бачке; если диаметр бачка велик по сравнению с диаметром отверстия, то можно положить $v_2 = 0$. Давление в сечении A_1 (отверстие) и A_2 (поверхность жидкости) равно атмосферному, так что $P_1 = P_2$. Таким образом, уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2 ,$$

откуда находим

$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} . \tag{13.3}$$

Хотя, как мы видим, этот результат является следствием закона Бернулли, его называют *теоремой Торричелли* в честь Торричелли, сформулировавшего его за 100 лет до Бернулли. Обратим внимание, что жидкость покидает отверстие с той же скоростью, какую имело бы свободно падающее тело при той же разности высот. Это неудивительно, так как в обоих случаях происходит переход потенциальной энергии в кинетическую в соответствии с законом сохранения энергии, на котором основан вывод уравнения Бернулли.

С другим частным случаем закона Бернулли мы сталкиваемся, когда течение жидкости (газа) происходит на практически неизменном уровне, т. е. $y_1 = y_2$. При этом уравнение (13.2) принимает вид

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 . \tag{13.4}$$

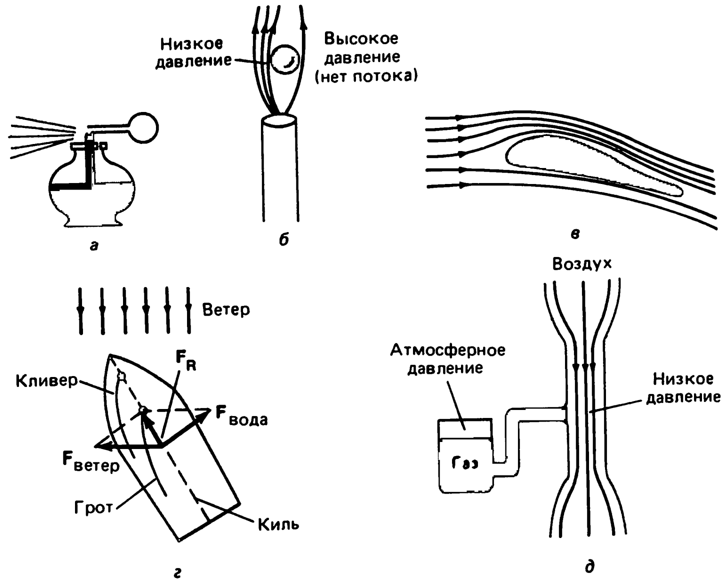


Рис. 13.5. Примеры проявления закона Бернулли.

Эта формула количественно отражает тот факт, что в точках, в которых скорость больше, давление ниже и наоборот. Несколько хорошо известных явлений, связанных с действием этого закона, иллюстрируются на рис. 13.5. Давление в струе воздуха, проходящей с большой скоростью над вертикальной трубкой в пульверизаторе для одеколона (рис. 13.5, *а*), ниже, чем атмосферное давление, действующее на поверхность жидкости во флаконе. Благодаря этому жидкость выталкивается вверх по трубке. Шарик для пинг-понга устойчиво парит в вертикальной струе воздуха (для этой цели у некоторых пылесосов шланг можно переключить на выдувание); рис. 13.5, *б*. Давление воздуха вне струи выше, чем в струе, поэтому шарик возвращается в струю, если он начинает выходить из нее.

Профиль крыла самолета и других «несущих плоскостей» рассчитывается так, что течение сохраняется в основном слоистым, но линии тока с верхней стороны проходят гуще, чем с нижней (рис. 13.5, *в*). Точно так же, как бóльшая плотность линий тока в сужении трубы указывает на то, что скорость течения повышается, сгущение линий тока над крылом показывает нам, что скорость потока сверху крыла больше, чем снизу. Следовательно, давление воздуха над крылом ниже, чем под ним, так что имеется результирующая сила, направленная вверх; эта сила называется аэродинамической *подъемной силой*. В действительности закон Бернулли определяет лишь часть полной подъемной силы, действующей на крыло. Крылу обычно придается некоторый наклон вверх (угол атаки), так что набегающий на нижнюю поверхность крыла поток воздуха отклоняется вниз; импульсы молекул воздуха изменяются, в результате чего на крыло действует направленная вверх дополнительная сила. Важную роль в создании подъемной силы играет и турбулентность.

Парусная яхта может идти против ветра (рис. 13.5, *г*), и этому во многом помогает закон Бернулли, если поставить паруса таким образом, чтобы воздух в узком промежутке между ними ускорялся. [Нормальное давление позади основного паруса (грота) выше, чем пониженное давление с его передней стороны, и возникающая благодаря этому сила продвигает судно вперед.] При движении против ветра основной парус ставится примерно по биссектрисе угла между направлением встречного ветра и осью судна (килевой линии). Сила, с которой ветер действует на парус (изменение импульса ветра при отклонении его парусом), в сумме с силой, обусловленной законом Бернулли, действует почти перпендикулярно парусу ($\mathbf{F}_{\text{ветер}}$). Из-за этого яхта двигалась бы вбок, если бы не киль; вода действует на киль с силой $\mathbf{F}_{\text{вода}}$ почти перпендикулярно оси судна. Результирующая этих двух сил $\mathbf{F}_R$ направлена вперед почти вдоль оси яхты (рис. 13.5, *г*).

Трубка Вентури представляет собой отрезок трубы с сужением (диффузором) посередине. Примером использования трубки Вентури является карбюратор в автомобиле (рис. 13.5, *д*). Проходя через диффузор, поток воздуха в соответствии с уравнением (13.1) ускоряется и таким образом создается область пониженного давления. Бензин, находящийся в поплавковой камере карбюратора под атмосферным давлением, всасывается через жиклер в воздушную струю и перемешивается с воздухом, прежде чем попасть в цилиндр двигателя.

Используют *трубку Вентури* и для измерения скорости потока жидкости или газа (рис. 13.6). Можно показать (см. задачи), что скорость потока определяется по формуле

$$v_1 = A_2\sqrt{2(P_1 - P_2)/\rho(A_1^2 - A_2^2)},$$

где ρ – плотность жидкости (газа), а P_1 и P_2 – показания манометров в сечениях A_1 и A_2, где площади сечения трубки равны соответственно A_1 и A_2. Если используется

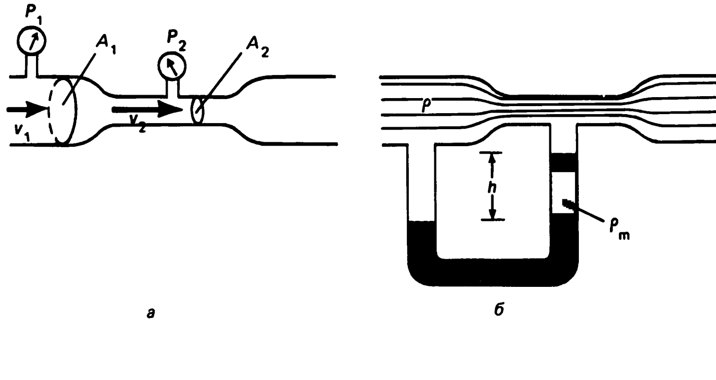


Рис. 13.6. Трубка Вентури. *а* – обычная схема; *б* – манометрическая схема.

такой манометр, как на рис. 13.6, *б*, то в формулу для v_1 вместо разности $P_1 - P_2$ входит величина $(\rho_m - \rho)gh$, где ρ_m – плотность жидкости в манометре. Трубки Вентури созданы даже для измерения скорости тока крови в сосудах. С помощью подобных датчиков можно измерять и объемный расход, т. е. поток жидкости, который равен $v_1 A_1$.

Отчего поднимается дым в печной трубе? Отчасти потому, что плотность теплого воздуха меньше, чем холодного, и поэтому нагретый воздух по закону Архимеда поднимается вверх. Но закон Бернулли здесь также дает свой вклад. Из-за ветра, дующего над выходным отверстием трубы, давление там ниже, чем в доме. Поэтому в трубе создается тяга. Даже в, казалось бы, безветренную ночь движение воздуха оказывается достаточным, чтобы дым шел вверх.

Чтобы гоферы[1)], луговые собачки, кроты и другие животные, живущие под землей, не погибали от удушья, их норы должны проветриваться. Любая нора имеет по меньшей мере два входа. Потоки воздуха над разными входами всегда немного различны. Из-за этого возникает небольшая разность давлений, благодаря которой в норе, прорытой с учетом закона Бернулли, циркулирует воздух. Поток воздуха будет сильнее, если входы сделаны на разных уровнях (как это обычно и бывает), поскольку скорость ветра имеет тенденцию увеличиваться с высотой.

Пример 13.3. Вода циркулирует в отопительной системе. Если в подвале дома вода поступает в трубу диаметром 4,0 см со скоростью 0,50 м/с под давлением 3,0 атм, то каковы скорость течения и давление в трубе диаметром 2,6 см на втором этаже, расположенном на 5,0 м выше?

Решение. Вычислим сначала с помощью уравнения неразрывности (13.1) скорость v_2:

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = (0{,}50\ \text{м/с})\,\frac{(\pi)(0{,}020\ \text{м})^2}{(\pi)(0{,}013\ \text{м})^2} = 1{,}2\ \text{м/с}.$$

Для того чтобы найти давление, воспользуемся уравнением Бернулли:

$$P_2 = P_1 + \rho g(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = (3{,}0\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2) + (1{,}0\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3)\times (9{,}8\ \text{м/с}^2)(-5{,}0\ \text{м}) + \frac{1}{2}(1{,}0\times 10^3\ \text{кг/м}^3)[(0{,}50\ \text{м/с})^2 - (1{,}2\ \text{м/с})^2] = 3{,}0\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2 - 4{,}9\cdot 10^4\ \text{Н/м}^2 - 6{,}0\cdot 10^2\ \text{Н/м}^2 = 2{,}5\cdot 10^5\ \text{Н/м}^2.$$

Заметим, что в этом случае вклад от слагаемого, содержащего скорость, очень мал.

В уравнении Бернулли совсем не учитывается влияние трения (вязкости), а также сжимаемость жидкости или газа. Величину энергии, переходящей во внутреннюю (или потенциальную) энергию благодаря сжатию, а также в

1) Гофер – американский грызун, землеройка.– *Прим. перев.*

тепловую энергию за счет трения, можно учесть, добавляя соответствующие слагаемые в правую часть уравнения (13.2). Эти слагаемые довольно трудно вычислить теоретически, и их обычно определяют на опыте. Мы не будем рассматривать здесь эти вопросы; заметим лишь, что учет этих слагаемых не повлияет существенно на приведенные выше объяснения различных явлений.

13.4. Вязкость

Как мы уже упоминали, в реальных жидкостях и газах существует внутреннее трение, называемое **вязкостью**. Вязкость можно представить себе как трение при движении слоев среды относительно друг друга. В жидкости вязкость обусловлена силами когезии между молекулами, а в газах – столкновениями атомов или молекул.

Вязкость различных сред неодинакова: сироп более вязок, чем вода; консистентная смазка более вязка, чем картерное масло; жидкости, вообще говоря, обладают большей вязкостью, чем газы. Количественным выражением вязкости является *коэффициент вязкости* η (греческая строчная буква «эта»), который определяется следующим образом. Между двумя плоскими пластинами находится слой жидкости (газа). Одна пластина удерживается неподвижно, а другая перемещается параллельно первой, как показано на рис. 13.7. Слои, непосредственно прилегающие к пластинам, удерживаются силами адгезии, действующими между молекулами среды и молекулами вещества пластин. Поэтому верхний слой жидкости движется с той же скоростью v, что и верхняя пластина, а нижний слой вместе с нижней пластиной остается неподвижным. Неподвижный слой тормозит движение вышележащего слоя, тот – следующего вышележащего и т. д. При этом скорость движения жидкости (газа) изменяется линейно от 0 до v, как показано на рисунке. Изменение скорости, деленное на расстояние между пластинами, т. е. отношение v/l, называется *градиентом скорости*. Чтобы переместить верхнюю пластину, требуется сила, в чем легко убедиться, двигая плоскую пластинку по лужице сиропа, налитой на стол. Для конкретной жидкости эта сила F оказывается пропорциональной площади пластинки A и скорости v и обратно пропорциональной расстоянию между пластинами l; таким образом, $F \sim vA/l$. Если сравнивать различные жидкости, то при прочих равных условиях эта сила тем больше, чем выше вязкость жидкос-

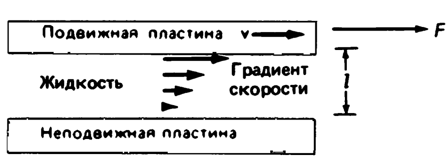


Рис. 13.7. Определение вязкости.

ти. Коэффициент пропорциональности в последней формуле и есть *коэффициент вязкости* η:

$$F = \eta Av/l. \tag{13.5а}$$

Отсюда $\eta = Fl/vA$. Следовательно, коэффициент вязкости в системе СИ измеряется в $\text{Н}\cdot\text{с/м}^2 = \text{Па}\cdot\text{с}$ (паскаль-секунда). В системе СГС коэффициент вязкости измеряется в $\text{дин}\cdot\text{с/см}^2$; эта единица называется *пуаз* (П). Значения коэффициента вязкости часто приводятся в *сантипуазах* (сП); 1 сП $= 10^{-2}$ П. В табл. 13.1 приведены коэффициенты вязкости различных жидкостей и газов; здесь же указана температура, при которой измерялась вязкость, так как температура оказывает весьма значительное влияние на вязкость; например, вязкость картерного масла с повышением температуры резко уменьшается.

Таблица 13.1. Коэффициенты вязкости некоторых жидкостей и газов

Жидкость или газ	Температура, °С	Коэффициент вязкости η, 10^{-3} Па·с*
Вода	0	1,8
	20	1,0
	100	0,3
Кровь	37	≈ 4
Плазма крови	37	$\approx 1,5$
Этиловый спирт	20	1,2
Масло для двигателя (марки SAE 10)	30	200
Глицерин	20	1500
Воздух	20	0,018
Водород	0	0,009
Водяной пар	100	0,013

* 1 Па·с = 10 П = $1\cdot10^3$ сП.

Формула (13.5а) справедлива, когда градиент скорости является постоянной величиной. В общем же случае градиент скорости может меняться, и тогда формула (13.5а) принимает вид

$$F = \eta A\,(dv/dy), \tag{13.5б}$$

где градиент скорости dv/dy представляет собой производную скорости по координате в направлении, перпендикулярном скорости.

Прямая пропорциональность между силой и скоростью, которая предполагается в формуле (13.5а), имеет место не для всех жидкостей и газов (среды, для которых это справедливо, называются *ньютоновскими*). Для неньютоновских жидкостей коэффициент вязкости η сам зависит от скорости; примерами таких жидкостей являются кровь (содержащая взвешенные частицы) и другие суспензии.

*13.5. Ламинарное течение в трубах; формула Пуазейля

Если бы жидкость (газ) не обладала вязкостью, то для ее течения по горизонтальной трубе не требовалось бы прилагать никакую силу. Но благодаря вязкости стационарное течение любой реальной жидкости в трубе возможно лишь тогда, когда между концами трубы создана разность давлений – будь то вода в водопроводной трубе, нефть в нефтепроводе или кровь в системе кровообращения человека.

Объемный расход, или поток жидкости (т.е. объем жидкости), протекающей через поперечное сечение круглой трубы в единицу времени, зависит от вязкости жидкости, разности давлений и размеров трубы. Французский ученый Ж.-Л. Пуазейль (1799–1869), который занимался физическими аспектами кровообращения (и в честь которого названа единица вязкости пуаз), исследовал зависимость от этих параметров величины потока несжимаемой жидкости при ламинарном течении в цилиндрической трубе. Полученное им выражение называется **формулой Пуазейля**:

$$Q = \pi R^4 (P_1 - P_2)/8\eta L, \tag{13.6}$$

где R – внутренний радиус трубы, L – длина трубы, $P_1 - P_2$ – разность давлений на концах трубы, η – вязкость, а Q – объемный расход, или поток жидкости.

Выведем формулу Пуазейля. Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости (газа) внутри цилиндрической трубы с внутренним радиусом R (рис. 13.8). Благодаря адгезии между жидкостью и стенками трубы скорость жидкости у стенок равна (или почти равна) нулю. Будем считать поэтому, что скорость цилиндрического слоя жидкости, прилегающего к внутренней стенке трубы, равна нулю. Скорость каждого следующего слоя[1] из-за вязкого трения между ними лишь немного больше, чем скорость предыдущего слоя. Таким образом, скорость увеличивается к центру трубы и достигает максимума на осевой линии. Этот градиент скорости схематически показан на рис. 13.8. Определим сначала v как функцию от r для сплошного цилиндра жидкости радиусом r ($r < R$),

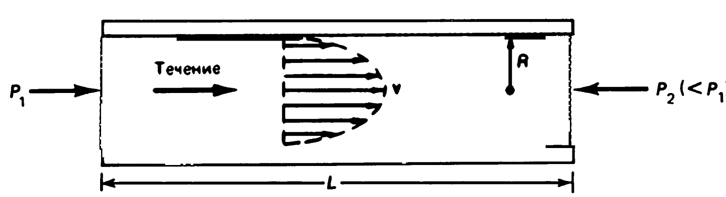
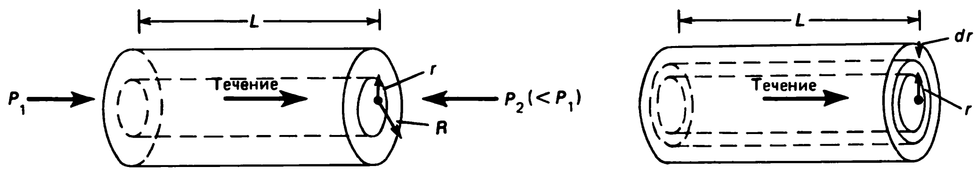


Рис. 13.8. Жидкость плотностью ρ и вязкостью η, текущая по трубе радиусом R вправо. Стрелками показаны значения скорости потока жидкости по сечению трубы.

[1] Слово «ламинарный» означает «слоистый». Таким образом, в нашей модели «ламинарное течение» мы понимаем как течение жидкости, разделенной на слои.



а б

Рис. 13.9. К выводу формулы Пуазейля. Поток жидкости представляется в виде: *а* – сплошного цилиндра радиусом *r*; *б* – набора кольцевых цилиндров радиусом *r* и шириной *dr* (см. текст).

ось которого совпадает с осью трубы, как показано на рис. 13.9, *а*. На этот цилиндр за счет разности давлений на концах трубы действует следующая сила:

$$F = (P_1 - P_2)\pi r^2,$$

где πr^2 – площадь торца цилиндра. Движение цилиндра жидкости тормозится силой вязкого трения между ним и прилегающим к нему слоем; величина этой силы дается формулой (13.5б), где в качестве A нужно взять площадь боковой поверхности цилиндра $A = (2\pi r)(L)$:

$$F = -\eta(2\pi r L)(dv/dr);$$

здесь знак минус означает, что сила направлена противоположно движению. Поскольку мы рассматриваем стационарное течение, ускорение равно нулю. Следовательно, эти две силы взаимно компенсируются:

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -2\pi r\eta L(dv/dr).$$

Отсюда находим следующее выражение для градиента скорости:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2)r}{2\eta L}.$$

Проинтегрируем это выражение и найдем v как функцию от r, где r – расстояние от оси трубы (с учетом того, что $v = 0$ при $r = R$):

$$\int_0^v dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L}\int_R^r r\,dr,$$

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L}\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^r,$$

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2). \qquad (13.7)$$

Как и следовало ожидать, наибольшая скорость достигается на оси трубы ($r = 0$); она пропорциональна квадрату радиуса трубы, а также *градиенту давления* $\Delta P/\Delta L = (P_1 - P_2)/L$.

Зная теперь v как функцию от r, можно определить полный поток (объемный расход) Q в трубе: $Q = dV/dt$. Поскольку скорость v в поперечном сечении непостоянна, нельзя записать просто $Q = Av$, как в формуле (13.1). Поэтому разделим поперечное сечение трубы на узкие кольца шириной dr (рис. 13.9, *б*), вычислим величину потока жидкости для каждого из этих колец и просуммируем по всем кольцам, чтобы получить полный поток. Площадь узкого кольца на рис. 13.9, *б* равна произведению длины окружности $2\pi r$ на ширину dr:

$$dA = 2\pi r\,dr.$$

Так как скорость жидкости зависит только от r [выражение (13.7)], в пределах одного кольца ее можно считать постоянной. Таким образом, поток через узкое кольцо запишется в виде

$$dQ = v\,dA = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,2\pi r\,dr.$$

Суммирование по всем кольцам дает полный поток в трубе:

$$Q = \int_{r=0}^{r=R} dQ = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi(P_1 - P_2)R^4}{8\eta L}.$$

Мы видим, что последнее выражение для полного потока жидкости совпадает с формулой (13.6). Таким образом, мы вывели формулу Пуазейля в предположении, что течение жидкости (или газа) в трубе является ламинарным.

Пример 13.4. Масло для двигателя (марки SAE 10 из табл. 13.1) пропускается в экспериментальной модели по тонкой трубочке диаметром 1,80 мм. Длина трубки 5,5 см. Какой должна быть разность давлений, чтобы поддерживать поток жидкости на уровне 5,6 мл/мин?

Решение. В единицах СИ поток равен $Q = (5{,}6\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3)/(60\ \text{с}) = 9{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{м}^3/\text{с}$. Переведя и остальные данные в систему СИ, подставим соответствующие значения в формулу (13.6):

$$P_1 - P_2 = \frac{8\eta LQ}{\pi R^4} = \frac{8(2{,}0\cdot 10^{-1}\ \text{Н}\cdot\text{с/м}^2)(5{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{м})(9{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{м}^3/\text{с})}{3{,}14(0{,}90\cdot 10^{-3}\ \text{м})^4} = 4{,}0\cdot 10^3\ \text{Н/м}^2,$$

что дает около 0,040 атм.

Согласно формуле Пуазейля, поток жидкости Q пропорционален градиенту давления $(P_1 - P_2)/L$ и обратно пропорционален вязкости жидкости (газа). Это как раз то, чего и следовало ожидать. Однако может показаться удивительным, что Q зависит от *четвертой* степени радиуса трубы. Это означает, что при одном и том же градиенте давления увеличение радиуса трубы вдвое приведет к увеличению потока в шестнадцать раз! Таким образом, даже небольшое изменение радиуса трубы приводит к значительному изменению потока; для того же, чтобы поддерживать поток на прежнем уровне, пришлось бы заметно изменить разность давлений.

Интересный пример зависимости вида R^4 можно найти в системе кровообращения человеческого организма. Однако, поскольку формула Пуазейля справедлива лишь для ламинарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью η, она не может в точности выполняться для крови; дело в том, что течение крови не вполне ламинарно, кровь содержит взвешенные частицы (диаметр которых почти равен диаметру капилляров), а ее вязкость η зависит от скорости течения v. Тем не менее и в этом случае формула Пуазейля является хорошим приближением в первом порядке. Поток крови в организме регулируется крошечными мышцами, окружающими сосуды. При сокращении этих мышц диаметр сосуда уменьшается и поток, который в соответствии с формулой (13.6) пропорционален R^4, резко уменьшается уже при небольшом уменьшении радиуса. Таким образом, едва заметными сокращениями этих мышц очень точно контролируется поступление крови к различным органам. Однако если, скажем, вследствие атеросклероза (затвердевания стенок сосудов) и отложений холестерина радиус сосудов уменьшается, то для поддержания нормального кровотока требуется более высокий градиент давления. Если радиус сосудов уменьшится вдвое, то сердцу придется увеличить давление в 16 раз. В таких условиях сердце работает с перегрузкой, но, как правило, уже не может обеспечить требуемую величину потока, т. е. нормальное кровообращение. Таким образом, повышенное артериальное давление указывает и на то, что сердце работает с перегрузкой, и на то, что поток крови через артерии ниже нормы.

*13.6. Турбулентное течение в трубах; число Рейнольдса

Если скорость течения велика, то течение в трубе становится турбулентным и формула Пуазейля уже не справедлива. При данной разности давлений поток Q в турбулентном течении оказывается меньше, чем рассчитанный по формуле (13.6). Это объясняется тем, что при турбулентном течении трение значительно выше, чем при ламинарном.

Возникновение турбулентности часто бывает внезапным и определяется так называемым *числом Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = 2\bar{v}r\rho/\eta\,, \tag{13.8}$$

где $\bar{v}$ – средняя скорость течения жидкости (газа)[1], ρ – плотность, η – вязкость, r – радиус трубы. Опыты показы-

---

[1] Средняя скорость $\bar{v}$ определяется как скорость течения, которая, будучи постоянной по всему сечению трубы, обеспечивала бы такую же величину потока жидкости Q.

вают, что обычно при Re < 2000 течение ламинарное, а при Re > 2000 оно становится турбулентным.

Пример 13.5. Средняя скорость крови в аорте ($r = 1{,}0$ см) в фазе расслабления равна примерно 30 см/с. Является ли течение крови ламинарным или турбулентным?

Решение. Чтобы ответить на этот вопрос, найдем число Рейнольдса, пользуясь значениями ρ и η из табл. 12.1 и 13.1:

$$\mathrm{Re} = \frac{(2)(0{,}30\ \text{м/с})(0{,}010\ \text{м})(1{,}05\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3)}{(4{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{Н}\cdot\text{с/м}^2)} = 1600.$$

Течение, по-видимому, будет ламинарным, но близким к возникновению турбулентности.

Из этого примера видно, что, поскольку 1 Н = 1 кг·м/с^2, число Рейнольдса не имеет размерности. Это *безразмерная величина*, значение которой не зависит от выбора системы единиц измерения.

*13.7. Движение тела в жидкости; осаждение частиц и лобовое сопротивление

В предыдущем разделе мы узнали, какое влияние оказывает вязкость (вместе с другими факторами) на движение жидкости (газа) в трубе. Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию, а именно движение тела внутри жидкости или газа. Этим телом может быть препятствие в потоке жидкости (например, утес посреди реки) или же какой-либо предмет, движущийся в жидкой или газовой среде: автомобиль или планер, подводная лодка или, возможно, молекула, осаждаемая на центрифуге.

Когда тело движется относительно жидкости (газа), на него действует сила со стороны среды. Эта сила называется *силой лобового сопротивления*; она возникает благодаря вязкости среды, а также (при больших скоростях) вследствие возникновения турбулентности позади тела.

Для описания движения тела относительно жидкости или газа удобно ввести еще одно число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}' = vL\rho/\eta\,, \tag{13.9}$$

где ρ и η – плотность и вязкость жидкости, v – скорость тела относительно среды, а L – характерная длина тела. Следует четко отличать это число Рейнольдса от числа Рейнольдса для течения жидкости (газа) в трубе; хотя они и похожи по виду, но относятся к разным явлениям.

Когда число Рейнольдса в рассматриваемом теперь случае меньше единицы[1)], обтекающий тело поток являет-

[1)] Число Рейнольдса равно единице для тела длиной 1 мм, движущегося в воде со скоростью 1 мм/с, или для тела длиной 2 мм, движущегося в воздухе со скоростью 7 мм/с. Таким образом, наше рассмотрение связано главным образом с малыми телами: дождевыми каплями, частицами цветочной пыльцы и молекулами в центрифуге.

ся, по существу, ламинарным; опытным путем установлено, что сила вязкого трения F_v прямо пропорциональна скорости объекта:

$$F_v = kv. \tag{13.10}$$

Значение коэффициента k зависит от размеров и формы тела, а также от вязкости жидкости (газа). В частности, для сферы радиусом r мы имеем

$$k = 6\pi r\eta \qquad \text{[сфера]}.$$

Таким образом, сила вязкого трения, действующая на малое сферическое тело в ламинарном потоке, дается формулой Стокса:

$$F_v = 6\pi r\eta v \qquad \text{[для сферы]}.$$

При бóльших значениях числа Рейнольдса (обычно в интервале 1–10) в потоке позади тела возникает турбулентное течение, называемое спутным следом (см. рис. 13.1, *б*), и для сферы сила лобового сопротивления будет больше, чем это предсказывает формула Стокса. Однако для тел обтекаемой формы турбулентность слабее, и, следовательно, сила сопротивления уменьшается. При наличии турбулентности лобовое сопротивление, как показывает опыт, растет уже пропорционально квадрату скорости: $F_v \sim v^2$. Таким образом, лобовое сопротивление увеличивается гораздо быстрее с возрастанием скорости, чем при ламинарном обтекании. Когда число Рейнольдса достигает значения порядка 10^6, лобовое сопротивление резко возрастает; при этом турбулентность возникает не только позади тела, но и в прилегающем к нему слое жидкости (газа) – в так называемом *пограничном слое* – вдоль всей поверхности тела.

Под *осаждением (седиментацией)* понимают падение малых тел в жидкой или газообразной среде. Так осаждаются в океане частицы, образующие донные отложения, или красные кровяные тельца в плазме крови в лаборатории.

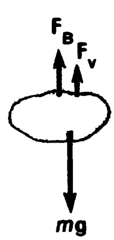


Рис. 13.10. Силы, действующие на небольшое тело, свободно падающее в жидкости.

На тело массой m, падающее в жидкости или газе в поле силы тяжести, действует несколько сил (рис. 13.10): сила тяжести mg, выталкивающая сила F_B со стороны жидкости и сила вязкого сопротивления F_v. Согласно второму закону Ньютона, сумма этих сил равна произведению массы тела на его ускорение:

$$mg - F_B - F_v = ma.$$

Выталкивающая сила F_B равна весу вытесненной жидкости: $F_B = \rho_f Vg$, где ρ_f – плотность жидкости (газа), V – объем тела (равный объему вытесненной жидкости), а g – ускорение свободного падения. Мы можем также написать $mg = \rho_0 Vg$, где ρ_0 – плотность тела. Используя (13.10), уравнение для сил можно переписать в виде

$$(\rho_0 - \rho_f)Vg - kv = ma. \tag{13.11}$$

Первый член представляет собой эффективный вес тела в жидкости. Когда скорость тела увеличивается, сила вязкого сопротивления возрастает, до тех пор пока она не уравняется с эффективным весом тела. При этом ускорение становится равным нулю и рост скорости прекращается. Это максимальное значение v_T скорости называется *установившейся скоростью* или *скоростью осаждения*; ее можно найти из выражения (13.11), полагая в нем $a = 0$:

$$v_T = \frac{(\rho_0 - \rho_f) Vg}{k}. \qquad (13.12)$$

Скорость осаждения малых тел, таких, как макромолекулы и другие составные части клеток, очень невелика. Ее можно увеличить с помощью центрифуги (гл. 5), поскольку в центрифуге на частицу действует такая сила, как если бы ускорение свободного падения увеличилось до значения $\omega^2 r$ [см. выражение (9.6)]; здесь ω – угловая скорость вращения ротора центрифуги, а r – расстояние от тела (частицы) до оси вращения. Таким образом, формулу (13.12) можно применить и к условиям центрифуги, заменив ускорение свободного падения g на ускорение $\omega^2 r$:

$$v_T = \frac{(\rho_0 - \rho_f) V\omega^2 r}{k}. \qquad (13.13)$$

Центрифугирование используется часто для разделения сходных, но различающихся немного частиц или макромолекул (например, двух типов нуклеиновых кислот), а также для получения ценной информации о размерах и массе частиц.

Заключение

Течение жидкости, при котором слои жидкости (газа) скользят упорядоченно и плавно вдоль так называемых линий тока, называется *ламинарным*. Если же течение является неупорядоченным и содержит завихрения, оно называется *турбулентным*. *Вязкость* относится к внутреннему трению, препятствующему свободному течению жидкости. Вязкое трение можно представить себе как трение между смежными слоями жидкости, движущимися относительно друг друга.

Объемный (массовый) расход, или поток жидкости (газа), определяется как объем (масса) жидкости, проходящей через данное поперечное сечение в единицу времени. *Уравнение неразрывности* утверждает, что для установившегося ламинарного потока жидкости (газа) в трубе со стенками (необязательно постоянного сечения) массовый расход (произведение плотности среды, скорости и площади поперечного сечения трубы) есть величина постоянная во всех точках трубы: $\rho A v = \text{const}$. Если среда несжимаема, то $Av = \text{const}$.

Закон Бернулли утверждает, что давление ниже в том месте, где скорость течения больше, и наоборот. *Уравне-*

ние Бернулли для стационарного ламинарного течения несжимаемой жидкости в трубке тока (непостоянного поперечного сечения и переменного уровня по высоте) имеет вид

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

для любой пары точек вдоль трубки тока.

Вопросы

1. Может ли ламинарный поток быть сжимаемым или несжимаемым? Вязким или невязким? Стационарным или нестационарным? Вихревым или безвихревым? Для каждого положительного ответа приведите пример, отрицательный ответ объясните.

2. Может ли турбулентный поток быть сжимаемым или несжимаемым? Вязким или невязким? Стационарным или нестационарным? Вихревым или безвихревым? Для каждого положительного ответа приведите пример, отрицательный ответ объясните.

3. Под действием каких сил жидкость на рис. 13.2 ускоряется при переходе от сечения A_1 к сечению A_2?

4. Почему струя воды из крана сужается книзу?

5. Если держать на весу две полоски бумаги в нескольких сантиметрах друг от друга (рис. 13.11) и подуть между ними, то как будут

Рис. 13.11.

двигаться полоски? Проделайте этот опыт и объясните его результат.

6. Во время игры в бейсбол питчер (метающий) при подаче придает мячу закрутку, чтобы мяч летел по дуге. Используя уравнение Бернулли, разберите обстоятельно причину искривления траектории мяча. Объясните, почему закрученный мяч с гладкой поверхностью отклоняется в противоположную сторону, нежели мяч с ворсистой обшивкой (такой, как бейсбольный или теннисный).

7. Почему самолеты обычно взлетают против ветра?

8. Детей предупреждают, чтобы они не стояли близко к краю платформы, когда мимо проходит поезд, поскольку поток воздуха может втянуть под колеса. Возможно ли это? Объясните.

9. Во время бури или смерча с домов иногда срывает крыши. Используя уравнение Бернулли, объясните, отчего это происходит.

10. Почему брезентовый верх автомобиля раздувается при быстрой езде?

11. Если два судна, идущие параллельным курсом, проходят близко друг от друга, они рискуют столкнуться. Почему?

12. Объясните, почему скорость ветра увеличивается с увеличением расстояния от поверхности земли. (*Подсказка*: см. рис. 13.7.) Какую пользу извлекает из этого крот, нора которого имеет два входа на разных уровнях?

13. Одинаковые стальные шарики опускают в одинаковые сосуды с водой. В одном сосуде температура воды 10 °С, в другом 40 °С. В каком сосуде шарик скорее достигнет дна?

14. Почему машинное масло (и любая другая жидкость) выливается из жестянки быстрее и ровнее, если в крышке банки проделано не одно отверстие, а два с противоположных сторон? При каких условиях струя будет плавной, когда в крышке сделано одно отверстие?

15. Когда колибри парит над цветком, она затрачивает в 20 раз больше энергии, чем в свободном полете. Почему?

*16. Кровяные тельца стремятся двигаться вместе с током крови ближе к оси сосудов. Почему?

*17. Покажите, что течение вязкой жидкости в трубе (рис. 13.8) является вихревым.

Задачи

Раздел 13.2

1. (I) Пользуясь данными примера 13.1, рассчитайте среднюю скорость кровотока в крупных

артериях, суммарная площадь поперечного сечения которых равна примерно 2,0 $см^2$.

2. (I) С помощью воздуховода радиусом 15 см воздух в комнате размером 10 м × 5,1 м × 3,2 м полностью обновляется за 10 мин. Какова средняя скорость воздушного потока в трубе?

3. (I) Сколько времени потребуется, чтобы заполнить водой бассейн глубиной 3,1 м, шириной 9,5 м и длиной 21,0 м, если вода поступает из шланга диаметром 1,9 см со скоростью 1,5 м/с?

4. (II) Струя воды из крана сужается книзу. Выведите формулу для диаметра струи в зависимости от расстояния y до крана. Начальная скорость воды при вытекании из крана равна v_0, а диаметр отверстия крана D.

Раздел 13.3

5. (I) Покажите, что в отсутствие течения ($v_1 = v_2 = 0$) уравнение Бернулли превращается в формулу (12.6) для гидростатического давления.

6. (I) С какой скоростью вытекает вода из отверстия в дне бака, наполненного до высоты 4,6 м? Вязкость не учитывать.

7. (I) Каким должно быть избыточное давление в водопроводе, чтобы струя из пожарного шланга била на высоту 25 м?

8. (I) Каким должен быть напор (в метрах), чтобы вода вытекала из крана со скоростью 8,0 м/с? Вязкость не учитывать.

9. (II) Если скорость ветра над вашим домом равна 25 м/с, то какая сила действует на крышу площадью 250 $м^2$?

10. (II) Если давление (абсолютное) воды в водопроводе на уровне земли равно 2,75 × × 10^5 Н/$м^2$, то достаточно ли этого давления, чтобы подать воду на верхний этаж проектируемого здания высотой 50 м? Если не достаточно, то какую максимальную высоту может иметь здание?

11. (II) Чему равен объемный расход, или поток воды, вытекающей из водопроводного крана диаметром 1,8 см при напоре 10 м?

12. (II) Чему равна подъемная сила крыла, обусловленная эффектом Бернулли, если площадь крыла равна 50 $м^2$, а скорости потока воздуха над крылом и под ним равны соответственно 320 и 290 м/с?

13. (II) Покажите, что мощность, необходимая для прокачивания жидкости по трубе, равна произведению объемного расхода (потока) Q на разность давлений $P_1 - P_2$.

14. (II) Вода из водопроводной магистрали диаметром 5,0 см на уровне земли поступает в административное здание под давлением 3,3 атм со скоростью 0,50 м/с. На верхнем этаже на высоте 25 м труба сужается до диаметра 2,5 см. Вычислите скорость течения и давление в трубе на верхнем этаже. (Вязкость не учитывать.)

15. (II) Масса самолета равна $2{,}0 \cdot 10^6$ кг. Скорость воздушного потока под крылом площадью 1200 $м^2$ составляет 100 м/с. Какой должна быть скорость потока над крылом, чтобы самолет держался в воздухе? Рассмотрите только эффект Бернулли.

16. (II) Рабочий объем четырехцилиндрового автомобильного двигателя равен 2000 $см^3$; примерно таков объем воздуха, засасываемого во все четыре цилиндра за один оборот коленчатого вала. Если двигатель развивает 1500 об/мин, а радиус диффузора в карбюраторе равен 2,5 см, то а) с какой скоростью движется воздух в диффузоре (трубка Вентури)? б) Чему равно в диффузоре давление (в атмосферах)?

17. (II) Покажите, что если учесть скорость снижения уровня в баке на рис. 13.4, то скорость жидкости, вытекающей из отверстия внизу, равна

$$v_1 = \sqrt{2gh/(1 - A_1^2/A_2^2)},$$

где $h = y_2 - y_1$, а A_1 и A_2 – площади соответственно отверстия и поверхности жидкости в баке.

18. (II) Пусть на поверхность жидкости в сосуде на рис. 13.4 действует внешнее давление P_0. а) Выведите формулу для скорости v_1, с которой жидкость вытекает из отверстия внизу, где

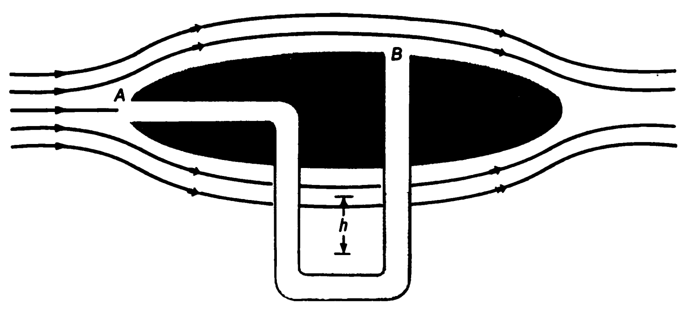


Рис. 13.12. Трубка Пито.

давление P_a равно атмосферному. (Считайте скорость снижения уровня v_2 равной нулю.) б) Найдите v_1 для воды, если $P_0 = 0,85$ атм, а $y_2 - y_1 = 2,1$ м.

19. (II) *Трубка Пито* – это устройство для измерения скорости потока (рис. 13.12). Жидкость (газ) проходит мимо отверстия B со скоростью v, а у отверстия A находится в покое. Разность давлений $P_A - P_B$ измеряется манометром. а) Запишите выражение для скорости v через плотность движущейся среды ρ_f, манометрическую разность высот h и плотность жидкости в манометре ρ_M. б) Миниатюрная трубка Пито с ртутным манометром используется для измерения скорости кровотока. Чему равна эта скорость, если $h = 20$ мм?

20. (II) Труба диаметром 6,0 см, плавно сужаясь, переходит в трубу диаметром 4,0 см. Когда по трубе идет вода, избыточное давление в этих сечениях равно соответственно 32 и 24 кПа. Чему равен поток, или объемный расход?

21. (II) *Реактивная тяга.* а) Пользуясь уравнением Бернулли и уравнением неразрывности, покажите, что скорость истечения газов из ракеты дается выражением

$$v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho},$$

где ρ – плотность газа, P – давление газа внутри ракеты, P_0 – атмосферное давление сразу за выходным отверстием. Считайте, что плотность газа остается постоянной, площадь A_0 выходного отверстия (сопла) много меньше площади поперечного сечения A ракеты (пусть она представляет собой большой цилиндр), а скорость газа не столь велика, чтобы возникла заметная турбулентность. б) Покажите, что тяга, создаваемая выходящими из ракеты газами, равна

$$F = 2A_0(P - P_0).$$

22. (II) а) Покажите, что скорость потока, измеряемая с помощью трубки Вентури, дается выражением

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

(рис. 13.6, *а*). б) Для манометра, показанного на рис. 13.6, *б*, выразите скорость потока v_1 через h и другие параметры. в) Трубка Вентури используется для измерения скорости течения воды. Диаметр самой трубки равен 3,0 см, а диаметр сужения 1,0 см. Измеренная разность давлений $P_1 - P_2$ равна 18 мм рт. ст. Вычислите скорость потока воды.

23. (III) Пусть отверстие в баке на рис. 13.4 располагается на высоте h_1 от дна, а поверхность жидкости – на высоте h_2 от дна. Бак стоит на земле на горизонтальной площадке. а) На каком расстоянии от стенки бака струя попадет на площадку? б) На какой высоте h'_1 нужно проделать второе отверстие, чтобы струя из него попала в ту же точку?

24. (III) а) Покажите, что уровень жидкости в баке на рис. 13.4 $h = y_2 - y_1$ опускается со скоростью

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2ghA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}},$$

где A_1 и A_2 – площади соответственно отверстия и поверхности жидкости (вязкость не учитывается). б) Интегрируя выражение в п. «а», найдите h как функцию времени. Положите $h = h_0$ при $t = 0$. в) За какое время выльется вода из цилиндра высотой 9,4 см, в которой налито 1,0 л воды, если отверстие находится у самого дна и имеет диаметр 0,50 см?

Раздел 13.4

25. (II) Вискозиметр (прибор для измерения вязкости) состоит из двух концентрических цилиндров диаметром 10,20 и 10,60 см. Исследуемую жидкость наливают в зазор между цилиндрами до уровня 12,0 см. Внешний цилиндр закрепляется, а внутренний вращается с частотой 62 об/мин, причем вращающий момент сил равен 0,024 Н·м. Какова вязкость жидкости?

26. (II) а) Покажите, что вязкая жидкость на рис. 13.7 испытывает деформацию сдвига, во многом аналогичную твердому телу (разд. 11.4). б) Покажите, что скорость изменения во времени деформации сдвига равна v/l. в) Покажите, что коэффициент вязкости определяется как

$$\eta = \frac{\text{Напряжение сдвига}}{\text{Скорость изменения деформации сдвига}}.$$

*Раздел 13.5

*27. (I) Оцените объемный расход (поток) воды в трубе диаметром 1,0 см и длиной 15 м, если разность давлений на ее концах равна 0,35 атм, а температура 20 °С.

*28. (I) Садовник решил, что поливка сада с помощью шланга диаметром 1 см занимает слишком много времени. Во сколько раз быстрее он сможет полить сад из шланга диаметром 1,6 см, если все остальное останется без изменения?

*29. (II) Пользуясь данными примера 13.1 и табл. 13.1, вычислите перепад давлений вдоль аорты на длине, равной 1 см.

*30. (II) Если градиент давления является постоянным, то во сколько раз должен уменьшиться диаметр кровеносного сосуда, чтобы поток крови (объемный расход) уменьшился на 80%?

*31. (II) Пациенту делают переливание крови. Кровь поступает по трубке из поднятого вверх сосуда в иглу, введенную в вену. Внутренний диаметр иглы 0,50 мм, длина иглы 4,0 см; требуется вводить 4,0 см^3 крови в минуту. На какой высоте от иглы должен находиться сосуд? Значения ρ и η возьмите из табл. 12.1 и 13.1. Давление крови в вене превышает атмосферное на 20 мм рт. ст.

*32. (II) а) Чему должна равняться разность давлений на концах двухкилометрового нефтепровода диаметром 40 см, чтобы нефть ($\rho = 950$ кг/м^3, $\eta = 2{,}0$ П) поступала в количестве 400 см^3/с? б) Какое количество тепловой энергии выделяется при этих условиях в единицу времени?

*33. (II) Какой диаметр должен иметь воздуховод длиной 30 м, чтобы вентиляционно-отопительная система полностью обновляла воздух в помещении размером 10 × 18 × 4,0 м каждые 10 мин? Насос системы создает избыточное давление $4{,}0 \cdot 10^{-4}$ атм.

*34. (II) Воду необходимо подавать по трубе диаметром 10,0 см на расстояние 300 м. Дальний конец трубы на 20 м выше насоса и открывается в атмосферу. Какое избыточное давление должен создавать насос, чтобы вода вообще текла по трубе?

*35. (II) Покажите, что кривая зависимости v от r (скорости ламинарного течения от расстояния до центра трубы) представляет собой параболу [см. рис. 13.8 и формулу (13.7)].

*36. (II) Скорость течения воды в центре трубы диаметром 5,2 см и длиной 20 м равна 18 см/с. Определите: а) разность давлений на концах трубы; б) объемный расход (поток).

*37. (II) Вязкая жидкость течет по круглой трубе (рис. 13.8). Покажите, что средняя скорость течения (скорость, постоянная по поперечному сечению, при которой объемный расход был бы прежним) равна половине скорости течения в центре трубы (т. е. половине максимальной скорости).

*38. (II) Вода в фонтане бьет на 14,6 м вверх из трубы диаметром 1,0 см. Какое давление должен создавать насос, находящийся под землей на глубине 4,2 м от выпускного отверстия? (Учтите вязкость, а сопротивлением воздуха пренебрегите.) Отметьте любые сделанные вами упрощающие предположения.

*39. (II) С помощью сифона переливают воду при температуре 20 °С из одного сосуда в другой (рис. 12.21). а) Определите объемный расход, если диаметр шланга равен 1,2 см, а разность уровней воды в сосудах 64 см. б) На какую максимальную высоту можно поднять изгиб шланга, чтобы сифон еще действовал?

*Раздел 13.6

*40. (I) При большой физической нагрузке скорость кровотока иногда увеличивается вдвое. Пользуясь данными примера 13.5, рассчитайте число Рейнольдса и определите, турбулентным или ламинарным будет течение крови в аорте.

*41. (I) Рассчитайте число Рейнольдса для течения крови в капилляре, если скорость течения равна $4{,}7 \cdot 10^{-2}$ см/с.

*42. (II) Чему равен максимальный объемный расход воды Q в трубе диаметром 10 см, при котором еще не возникает турбулентность?

*Раздел 13.7

*43. (I) Чему равна установившаяся скорость всплытия воздушного пузырька радиусом 1,0 мм (считая радиус постоянным) в масле вязкостью $\eta = 0{,}20$ Па·с и плотностью $\rho = 900$ кг/м^3?

*44. (I) Чему равна установившаяся скорость стального шарика радиусом 2,0 см, падающего в воздухе (обтекание считать ламинарным)?

*45. (II) В ультрацентрифуге, ротор которой вращается с частотой 30 000 об/мин, частица, находящаяся в среднем на расстоянии 8,0 см от оси вращения, осаждается за 30 мин. Какое время потребовалось бы для ее осаждения под действием силы тяжести в той же пробирке, установленной в лаборатории вертикально?

46. (II) а) Покажите, что установившаяся скорость падения маленького шарика плотностью ρ_0 в жидкости (газе) с плотностью ρ_f и вязкостью η дается выражением

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{(\rho_0 - \rho_f) r^2 g}{\eta}.$$

б) Чему равна установившаяся скорость падения сферической дождевой капли радиусом $r = 0{,}020$ см в воздухе?

*47. (II) Вязкость η жидкости можно определить, измеряя установившуюся скорость падения v_T маленького шарика в жидкости. Найдите выражение для η через радиус r, плотность ρ шарика и плотность ρ_f жидкости. Предположите, что турбулентности не возникает.

48. (II) а) Покажите, что выталкивающая сила, действующая на небольшое тело в жидкости внутри центрифуги, дается выражением

$$F_B = \rho_f V \omega^2 r,$$

где ω – угловая скорость вращения ротора центрифуги, V – объем тела, r – расстояние до оси вращения, а ρ_f – плотность жидкости. б) Сравните зависимость F_B от положения частицы с такой же зависимостью выталкивающей силы, действующей на частицу, осаждаемую в поле силы тяжести.

49. (II) Покажите, что давление в жидкости во вращающейся центрифуге на расстоянии r от оси вращения дается выражением

$$P = (1/2)\,\rho_f\,\omega^2\,(r^2 - r_0^2),$$

где ρ_f – плотность жидкости, r_0 – расстояние от оси вращения до поверхности жидкости в пробирке, а ω – угловая скорость вращения ротора центрифуги.