14 Колебания

Многие тела способны колебаться, или осциллировать: груз на конце пружины, камертон, колесико балансира в часах, маятник, пластмассовая линейка, крепко прижатая одним концом к краю стола, струны гитары или фортепиано. Пауки обнаруживают попавшую в их сети добычу по дрожанию паутины, корпус автомобиля колеблется вверх-вниз на рессорах, когда автомобиль проезжает неровности, дома и мосты дрожат при проезде тяжелых грузовиков и даже при сильном ветре. Вообще, поскольку твердые тела в большинстве своем упруги (см. гл. 11), почти все материальные предметы колеблются (хотя бы недолго), после того как на них подействует импульс силы. Электрические колебания происходят в радиоприемниках и телевизорах. На атомном уровне атомы колеблются в молекулах, а в твердом теле атомы совершают колебания относительно своих фиксированных положений в решетке. Колебательное движение имеет огромную важность, поскольку оно широко распространено и встречается во многих разделах физики. Его не следует рассматривать как какой-то «новый» раздел физики, поскольку ньютонова механика дает полное описание колебаний механических систем.

14.1. Колебания пружины

Говоря о *колебаниях*, или *осцилляциях*, тела, мы подразумеваем повторяющееся движение его туда и обратно по одной и той же траектории. Иными словами, движение является **периодическим**. Простейшим примером периодического движения служат колебания груза на конце пружины. Многие другие виды колебательных движений проявляют большое сходство с этими колебаниями; поэтому мы разберем этот пример подробно. Будем считать, что массой пружины можно пренебречь и что пружина установлена горизонтально, как показано на рис. 14.1, *а*. К одному концу пружины прикреплен груз массой m, который движется без трения по горизонтальной поверхности. Любая пружина имеет определенное значение длины, при котором с ее стороны на груз не действует сила; в этом случае говорят, что пружина

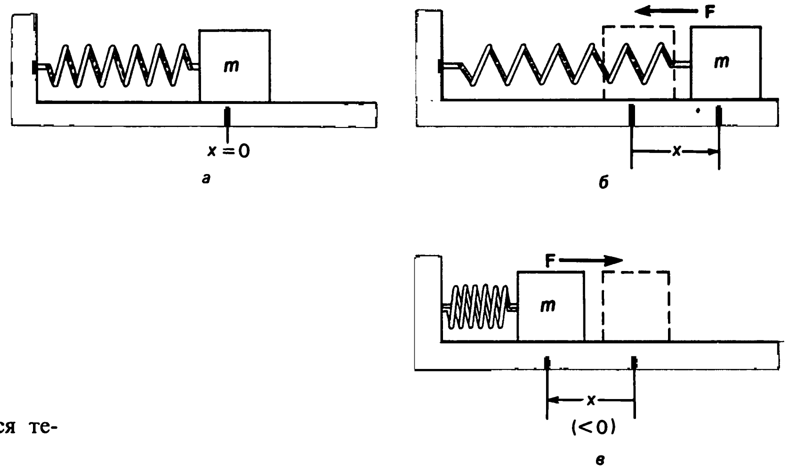

Рис. 14.1. Колеблющееся тело на конце пружины.

находится в **положении равновесия**. Если сдвинуть груз вправо, растягивая пружину, или влево, сжимая ее, то пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть его в положение равновесия; такую силу называют возвращающей. Для нашей системы возвращающая сила F прямо пропорциональна расстоянию x, на которое сжимается или растягивается пружина (рис. 14.1, *б* и *в*):

$$F = -kx. \qquad (14.1)$$

Формула (14.1) справедлива до тех пор, пока пружина не сжимается настолько, что ее витки приходят в соприкосновение, или не растягивается сверх предела упругости (рис. 11.9). Знак минус означает, что возвращающая сила всегда противоположна по направлению перемещению x. Если на рис. 14.1 мы направим ось, например, вправо, то при растягивании пружины x будет положительным, а возвращающая сила F будет направлена влево. Заметим, что положение равновесия мы выбрали в точке $x = 0$. Когда пружину сжимают, сила направлена вправо (рис. 14.1, *в*). Постоянная k в формуле (14.1) называется жесткостью пружины. Для того чтобы растянуть пружину на длину x, к ней необходимо приложить внешнюю силу, равную по меньшей мере $F = +kx$. Чем больше значение k, тем бóльшая сила необходима для растягивания пружины на одну и ту же длину. Иными словами, чем жестче пружина, тем больше постоянная k.

Что же произойдет, если пружину растянуть на длину $x = A$, как показано на рис. 14.2, *а*, и затем отпустить? Пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть его в положение равновесия. Но поскольку эта сила сообщает грузу ускорение, груз приходит в положение равновесия со значительной скоростью. Заметим, что в положении равновесия сила, действующая на груз, уменьшается до нуля, а скорость его в этой точке макси-

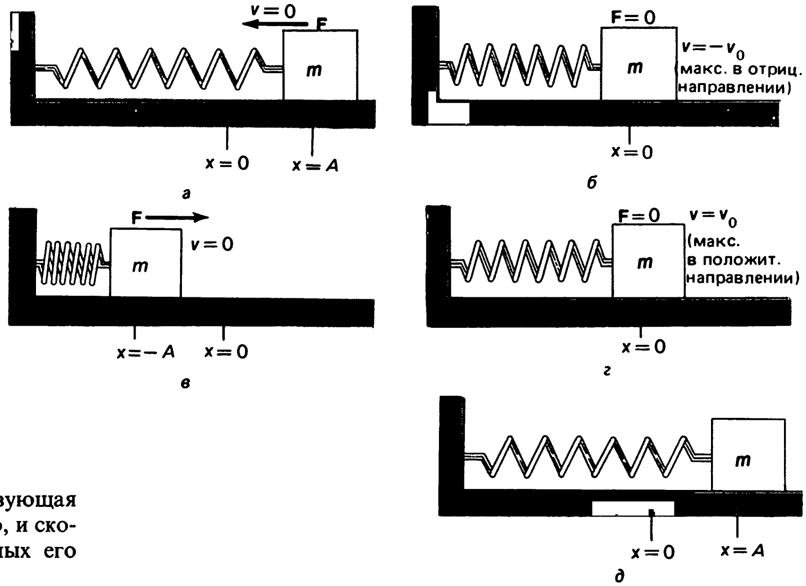

Рис. 14.2. Сила, действующая на колеблющееся тело, и скорость тела в различных его положениях.

мальна (рис. 14.2, *б*). Когда груз, проскочив положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его, и в точке $x = -A$ груз на мгновение останавливается (рис. 14.2, *в*), а затем начинает двигаться в противоположном направлении (рис. 14.2, *г*), пока не придет в точку $x = A$ (рис. 14.2, *д*), откуда он начал движение. Затем весь этот процесс повторяется.

Для изучения колебательного движения нам придется ввести несколько терминов. Расстояние x груза от положения равновесия до точки, в которой в данный момент времени находится груз, называют **смещением**. Максимальное смещение – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется **амплитудой** и обозначается, как правило, буквой A. Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от $x = A$ к $x = -A$ и обратно в $x = A$, называется *полным колебанием*. **Период** T – это время, за которое совершается одно полное колебание. Наконец, **частота** f определяется как число полных колебаний в 1 с. Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 герц = 1 полное колебание в секунду. Очевидно, что

$$f = 1/T, \qquad T = 1/f. \tag{14.2}$$

Например, если частота равна 5 Гц, то период колебаний составляет 1/5 с.

Колебания пружины, подвешенной вертикально, по существу, ничем не отличаются от колебаний горизонтальной пружины. Из-за действия силы тяжести длина вертикальной пружины в положении равновесия будет больше, чем если бы та же пружина была установлена горизонтально. Однако если смещение отсчитывать от нового положения равновесия, то формулу (14.1) для этой пружины можно использовать без изменений с тем же значением k. (Доказать это мы предлагаем читателю в задаче 9, помещенной в конце настоящей главы.)

14.2. Гармонические колебания

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком [например, $F = -kx$ в формуле (14.1)], совершает **гармонические колебания**. Саму такую систему часто называют **гармоническим осциллятором**. В гл. 11 (разд. 11.4) мы показали, что при не слишком больших смещениях сжатие и растяжение многих твердых тел происходит в соответствии с формулой (14.1). Поэтому колебания в природе чаще всего бывают гармоническими или близкими к гармоническим.

Определим теперь, как изменяется смещение x в зависимости от времени. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона: $F = ma$. Поскольку ускорение равно $a = d^2x/dt^2$, мы можем записать уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \tag{14.3а}$$

где m – масса колеблющегося тела[1]. Преобразуя это уравнение, его можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{14.3б}$$

Уравнение (14.3б) называется *уравнением движения* гармонического осциллятора. В математике это уравнение называется *дифференциальным уравнением*, поскольку в него входят производные. Нам необходимо выяснить, какая функция времени $x(t)$ удовлетворяет данному уравнению. Вид решения подсказывает такой опыт: если к колеблющемуся грузу прикрепить карандаш (рис. 14.3) и протягивать под ним с постоянной скоростью лист бумаги, то карандаш вычертит кривую, показанную на рисунке. Эта кривая является *синусоидой* (график синуса или косинуса в зависимости от положения груза в момент времени $t = 0$), умноженной на амплитуду A. Действительно, из (14.3а) видно, что вторая производная от x равна величине x с обратным знаком, умноженной на

---

[1] При наличии груза массой m' на конце пружины сама пружина также совершает колебания, и по крайней мере часть ее массы мы должны учесть в уравнении; действительно, можно показать (см. задачи в конце настоящей главы), что необходимо учесть приблизительно треть массы пружины m_s. Таким образом, в записанном нами уравнении $m = m' + m_s/3$. Во многих случаях масса m_s достаточно мала, так что ею можно пренебречь.

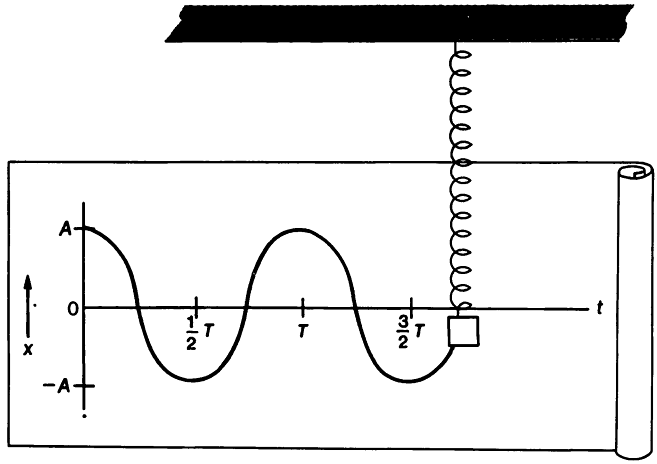

Рис. 14.3. Синусоидальный характер гармонических колебаний; здесь $x = A\cos(2\pi t/T)$.

коэффициент k/m; этим же свойством обладают и синус, и косинус:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\omega t) = -\omega^2\sin\omega t,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos\omega t) = -\omega^2\cos\omega t,$$

где ω – постоянная величина. Таким образом, уравнению (14.3а) или (14.3б) удовлетворяют как $x = \sin\omega t$, так и $x = \cos\omega t$, если постоянная ω выбрана правильно. Однако для общности попробуем записать решение $x(t)$ в общем виде:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

где a и b – произвольные постоянные. Продифференцируем это решение дважды:

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t = -\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

Подставляя записанные выражения для x и d^2x/dt^2 в уравнение (14.3б), получаем

$$-\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + \frac{k}{m}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = 0,$$

или

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = 0.$$

Таким образом, наше предполагаемое решение удовлетворяет уравнению движения при любых t, если

$$k/m - \omega^2 = 0,$$

или

$$\omega^2 = k/m. \tag{14.4}$$

Таким образом,

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{14.5}$$

есть решение уравнения движения в том и только в том случае, когда выполняется соотношение (14.4).

Выражение (14.5) представляет собой общее решение, поскольку оно содержит две произвольные постоянные a и b. Эти две постоянные действительно необходимы, поскольку в уравнение (14.3) входит вторая производная d^2x/dt^2, и, следовательно, для получения $x(t)$ нужно выполнить два интегрирования, каждое из которых порождает одну произвольную постоянную. В реальных физических задачах постоянные a и b определяются **начальными условиями**. Если, например, груз отвели в положение его максимального смещения $x = A$ и отпустили без толчка, то движение происходит по косинусоиде[1] (как на рис. 14.3), причем $a = A$ и $b = 0$:

$$x = A\cos\omega t.$$

Если же предположить, что в момент времени $t = 0$ груз находился в точке $x = 0$ и по нему ударили, придав ему начальную скорость в положительном направлении x, то в (14.5) мы должны положить $a = 0$ (поскольку $x = 0$ при $t = 0$), а b положить равной A, так что выражение (14.5) примет вид

$$x = A\sin\omega t.$$

Могут иметь место и другие случаи, когда ни a, ни b не равны нулю; например, если при $t = 0$ пружину оттянуть на некоторое расстояние, а затем груз толкнуть, то значение x при $t = 0$ окажется меньше A. Но в любом случае постоянные a и b однозначно определяются заданием каких-либо двух параметров в данный момент времени, например заданием смещения и скорости.

Решение (14.5) можно записать в следующем более удобном виде:

$$x = A\cos(\omega t + \phi). \tag{14.6}$$

То, что выражения (14.6) и (14.5) эквивалентны друг другу, следует из тригонометрического тождества

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi;$$

постоянные A и ϕ в (14.6) связаны с постоянными a и b в (14.5) соотношениями $A\cos\phi = a$ и $-A\sin\phi = b$. Выражение (14.6) имеет более простую физическую интерпретацию, чем (14.5). Как видно из рис. 14.4, величина A

---

[1] Дифференцируя (14.5) по времени, мы имеем $v = -a\sin\omega t + b\cos\omega t = b$ при $t = 0$, так что $b = 0$, если $v(t = 0) = 0$.

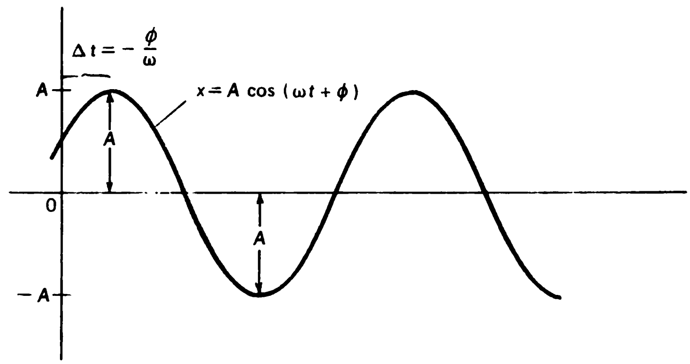

Рис. 14.4. Смещение $x = A\cos(\omega t + \phi)$ при $\phi < 0$.

представляет собой амплитуду [значение, которое достигается в те моменты времени, когда косинус в (14.6) имеет максимальную величину, т. е. равен единице], величина ϕ, называемая **начальной фазой**, показывает отставание или опережение, с которым достигается максимальное смещение A по отношению к моменту времени $t = 0$. При $\phi = 0$ мы имеем $x = A\cos\omega t$, как на рис. 14.3, а при $\phi = -\pi/2$

$$x = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin\omega t,$$

т. е. мы имеем чистую синусоиду.

Заметим, что величина ϕ не влияет на форму кривой $x(t)$, а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t, скажем $t = 0$. Таким образом, гармоническое колебание является всегда *синусоидальным*. Действительно, гармоническое колебание часто *определяется* как движение, траектория которого является чисто синусоидальной.

Поскольку движение колеблющегося тела повторяется с периодом, равным T, в момент времени $t = T$ тело должно находиться в той же точке и двигаться в том же направлении, что и в момент времени $t = 0$. А поскольку синус и косинус это функции, которые изменяются с периодом 2π рад, из (14.6) мы имеем

$$\omega T = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f,$$

где f частота колебаний. (Величину ω называют *круговой* или *циклической* частотой колебаний, чтобы отличить ее от частоты f.) Выражение (14.6) можно, таким образом, переписать в виде

$$x = A\cos(2\pi t/T + \phi), \tag{14.7а}$$

или

$$x = A\cos(2\pi f t + \phi), \tag{14.7б}$$

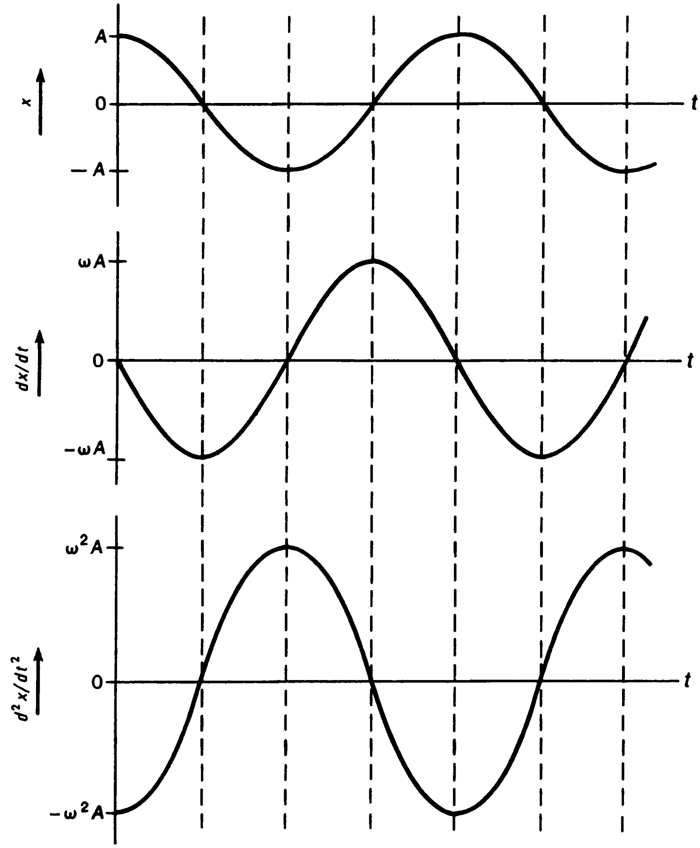

Рис. 14.5. Смещение x, скорость dx/dt и ускорение d^2x/dt^2 гармонического осциллятора при $\phi = 0$.

где в соответствии с (14.4)

$$f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}, \tag{14.8а}$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \tag{14.8б}$$

Заметим, что *частота и период колебаний не зависят от амплитуды*. Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменим частоту колебаний этой системы! Из формулы (14.8а) следует, что, чем больше масса колеблющегося тела, тем ниже частота и, чем жестче пружина, тем выше частота. Здравый смысл подсказывает нам то же самое: с большой массой связана бóльшая инерционность и меньшее ускорение, а жесткая пружина создает бóльшую силу и большее ускорение (в первом случае колеблющееся тело «реагирует» на приложенную силу «быстрее», а во втором – «медленнее»). Дифференцируя выражение (14.6), можно получить скорость и ускорение колеблющейся массы:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi), \tag{14.9}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi). \tag{14.10}$$

Скорость и ускорение гармонического осциллятора тоже изменяются по синусоидальному закону. На рис. 14.5 построены зависимости смещения, скорости и ускорения гармонического осциллятора от времени для случая, когда $\phi = 0$. Мы видим, что скорость достигает максимума

$$v_{\text{макс}} = \omega A = \sqrt{k/m}\,A,$$

когда груз проходит положение равновесия в точке $x = 0$; скорость равна нулю в точках максимального смещения $x = \pm A$. Это согласуется с нашими рассуждениями по поводу рис. 14.2. Максимальное значение ускорения

$$a_{\text{макс}} = \omega^2 A = (k/m)\,A$$

соответствует $x = \pm A$, а при $x = 0$ ускорение равно нулю, чего и следовало ожидать, поскольку $ma = F = -kx$.

В общем случае, когда $\phi \neq 0$, постоянные A и ϕ можно связать с начальными значениями величин x, v и a, положив в выражениях (14.6), (14.9) и (14.10) $t = 0$:

$$x_0 = x(0) = A\cos\phi,$$

$$v_0 = v(0) = -\omega A \sin\phi = -v_{\text{макс}}\sin\phi,$$

$$a_0 = a(0) = -\omega^2 A\cos\phi = -a_{\text{макс}}\cos\phi.$$

Пример 14.1. Когда к пружине подвешивают груз массой 0,300 кг, она удлиняется на 0,150 м. Пружину затем растягивают еще на 0,100 м от положения равновесия и отпускают. Вычислим а) жесткость пружины k; б) амплитуду колебания; в) его максимальную скорость $v_{\text{макс}}$; г) его максимальное ускорение; д) его период T и частоту f; е) зависимость смещения x от времени; ж) скорость при $t = 0{,}150$ с.

Решение. а) Поскольку пружина растягивается на 0,150 м, когда к ней подвешивают груз массой 0,300 кг, из формулы (14.1) находим

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{(0{,}300\ \text{кг})(9{,}80\ \text{м/с}^2)}{0{,}150\ \text{м}} = 19{,}6\ \text{Н/м}.$$

б) Поскольку пружину оттягивают на 0,100 м и отпускают, не давая ей начального толчка, $A = 0{,}100$ м.

в) В соответствии с выражением (14.9) имеем

$$v_{\text{макс}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{19{,}6\ \text{Н/м}}{0{,}300\ \text{кг}}}(0{,}100\ \text{м}) = 0{,}808\ \text{м/с}.$$

г) Поскольку $F = ma$, максимальное ускорение имеет место в тех точках, в которых сила оказывается тоже максимальной, т. е. при $x = A = 0{,}100$ м. Следовательно,

$$a_{\text{макс}} = \frac{kA}{m} = \frac{(19{,}6\ \text{Н/м})(0{,}100\ \text{м})}{(0{,}300\ \text{кг})} = 6{,}53\ \text{м/с}^2$$

д) По формулам (14.8а) и (14.8б) вычисляем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}300\ \text{кг}}{19{,}6\ \text{Н/м}}} = 0{,}777\ \text{с},$$

$$f = 1/T = 1{,}29\ \text{Гц}.$$

е) Движение начинается в точке максимального смещения вниз. Если направить ось x вверх, то $x = -A$ при $t = 0$. Следовательно, нам нужно выбрать синусоиду, которая при $t = 0$ принимает наибольшее отрицательное значение; такой функцией является косинус со знаком минус:

$$x = -A\cos 2\pi ft,$$

так что при $t = 0$ имеем $x = -A\cos 0 = -A$. Подставляя числовые данные, получаем

$$x = -0{,}100\cos 8{,}10t;$$

здесь t измеряется в секундах, а x – в метрах. Заметим, что в (14.6) начальная фаза в этом случае $\phi = \pi$ рад, или 180°.

ж) Скорость в любой момент t вычисляется следующим образом:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A(-2\pi f)\sin 2\pi ft = 0{,}810\sin 8{,}10t.$$

При $t = 0{,}150$ с получаем $v = (0{,}810) \times \sin(1{,}22) = 0{,}761$ м/с.

В данном разделе мы нашли общее аналитическое решение следующего дифференциального уравнения [см. (14.3б)], которое описывает гармонические колебания:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Не все дифференциальные уравнения решаются так же просто. Однако при заданных начальных условиях решения, как правило, всегда удается получить методами численного интегрирования (разд. 2.10). И даже для простых уравнений, подобных (14.3б), численное решение может дать дополнительную информацию (см. задачи в конце настоящей главы).

14.3. Энергия гармонического осциллятора

Для гармонического осциллятора, например груза массой m на конце безмассовой пружины, возвращающая сила дается выражением

$$F = -kx.$$

Потенциальная энергия как функция смещения имеет вид (см. гл. 6 и 7)

$$U = -\int F dx = \frac{1}{2}kx^2,$$

где мы выбрали постоянную интегрирования равной нулю, чтобы получить $U = 0$ при $x = 0$.

Полная механическая энергия равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

где v – скорость, которую имеет груз массой m на расстоянии x от положения равновесия. В случае гармонических колебаний трение отсутствует, поэтому полная механическая энергия E сохраняется. Когда груз совершает колебания, кинетическая энергия переходит в потенциальную, и наоборот. В крайних точках ($x = \pm A$) скорость равна $v = 0$ и вся энергия переходит в потенциальную:

$$E = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Таким образом, *полная механическая энергия гармонического осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.* В положении равновесия ($x = 0$) вся энергия переходит в кинетическую:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{макс}}^2,$$

где $v_{\text{макс}}$ – максимальная скорость, которая достигается при колебаниях. В промежуточных точках как кинетическая, так и потенциальная энергия не равна нулю, а поскольку энергия сохраняется, мы имеем

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{макс}}^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (14.11)$$

Отсюда можно получить полезное соотношение между скоростью v^2 и смещением x:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}, \quad (14.12а)$$

или, поскольку $v_{\text{макс}} = A\sqrt{k/m}$, находим

$$v = \pm\, v_{\text{макс}}\sqrt{1 - x^2/A^2}. \quad (14.12б)$$

Мы видим снова, что скорость v максимальна при $x = 0$ и равна нулю при $x = \pm A$.

На рис. 14.6 приведена кривая потенциальной энергии $U(x) = (1/2)kx^2$. Горизонтальная линия соответствует определенному значению полной энергии $E = (1/2)kA^2$. Как уже отмечалось в разд. 7.6 (рис. 7.8), расстояние от этой линии до кривой U равно кинетической энергии, а движение ограничено значениями x, заключенными в пределах от A до $-A$. Эти результаты, разумеется, полностью

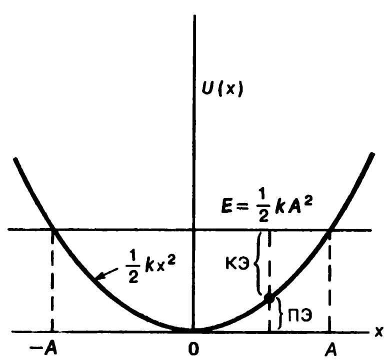

Рис. 14.6. Потенциальная энергия $U = (1/2)kx^2$. КЭ + ПЭ = $= E =$ const для любого значения x, причем $-A \leqslant x \leqslant A$.

согласуются с полным решением уравнения движения, полученным в предыдущем разделе.

Пример 14.2. Вычислим для гармонического осциллятора из примера 14.1 а) полную энергию; б) зависимость потенциальной энергии (ПЭ) и кинетической энергии (КЭ) от времени; в) скорость в момент времени, когда груз находится на расстоянии 0,050 м от положения равновесия; г) кинетическую и потенциальную энергии при смещении груза на расстояние, равное половине амплитуды ($x = \pm A/2$).

Решение. а) Подставляя в формулу (14.11) значения $k = 19{,}6$ Н/м и $A = 0{,}100$ м, находим

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(19{,}6 \text{ Н/м})(0{,}100 \text{ м})^2 = 9{,}80 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

б) В примере 14.1 при решении пп. «е» и «ж» мы нашли, что $x = -0{,}100\cos 8{,}10t$ и $v = 0{,}810\cos 8{,}10t$. Следовательно,

$$\text{ПЭ} = \frac{1}{2}kx^2 = (9{,}80 \cdot 10^{-2} \text{ Дж})\cos^2 8{,}10t,$$

$$\text{КЭ} = \frac{1}{2}mv^2 = (9{,}80 \cdot 10^{-2} \text{ Дж})\sin^2 8{,}10t.$$

в) Вычисляя по формуле (14.12), находим

$$v = v_{\text{макс}}\sqrt{1 - x^2/A^2} = 0{,}70 \text{ м/с}.$$

г) При $x = A/2 = 0{,}050$ м имеем

$$\text{ПЭ} = (1/2)kx^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж},$$

$$\text{КЭ} = E - \text{ПЭ} = 7{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

14.4. Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности

Гармонические колебания обнаруживают простую и интересную связь с движением частицы по окружности с постоянной скоростью. Пусть тело массой m вращается по окружности радиусом A со скоростью $v_{\text{М}}$ на крышке стола, как показано на рис. 14.7. Если смотреть сверху, то видно, что движение происходит по окружности. Но человек, который смотрит «в торец» стола, наблюдает колебательное движение туда и обратно, и, как мы сейчас покажем, это движение в точности соответствует гармоническим колебаниям. То, что видит человек с торца стола, представляет собой, по существу, проекцию кругового движения на ось x (рис. 14.7, *б*). Для того чтобы убедиться в том, что это движение аналогично гармоническому колебанию, вычислим x-проекцию скорости $v_{\text{М}}$, которая на рис. 14.7 обозначена через v. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{v}{v_{\text{М}}} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A},$$

откуда находим

$$v = v_{\text{М}}\sqrt{1 - x^2/A^2}.$$

Эта формула в точности совпадает с (14.12б) для скорости груза на пружине, совершающего гармонические колебания, причем $v_{\text{М}} = v_{\text{макс}}$. Кроме того, из рисунка видно, что

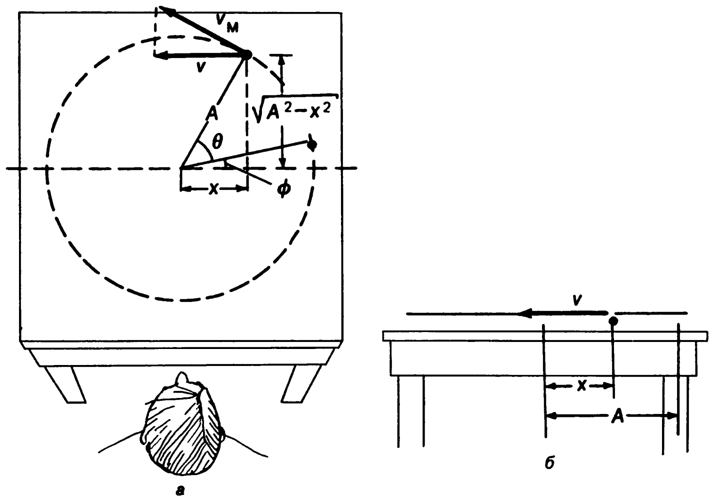

Рис. 14.7. **Движение по окружности (*а*) наблюдается сбоку как гармоническое колебание (*б*).**

если принять угол поворота при $t = 0$ за ϕ, то через время t частица переместится на угол $\theta = \omega t$, где $\omega = v_M/A$. Таким образом,

$$x = A\cos(\theta + \phi) = A\cos(\omega t + \phi);$$

поскольку $v_M = 2\pi A/T$, мы имеем $\omega = v_M/A = 2\pi/T = 2\pi f$, где T – время, за которое совершается полный оборот по окружности, а f – частота вращения. Налицо полная аналогия с колебаниями гармонического осциллятора. Следовательно, проекция траектории движения частицы с постоянной скоростью по окружности на ось x представляет собой гармоническое колебание.

Проекция кругового движения на ось y также совершает гармоническое колебание. Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два гармонических колебательных движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. (Мы еще вернемся к этому вопросу в разд. 14.9.)

14.5. Математический маятник

Математический маятник представляет собой систему, состоящую из небольшого груза («чечевица» маятника) и тонкой нитки, на конце которой подвешен этот груз (рис. 14.8). Предполагается, что нить нерастяжима, а ее массой можно пренебречь по сравнению с массой груза. Движение математического маятника напоминает простое гармоническое колебание: груз качается по дуге окружности с одинаковой амплитудой по обе стороны от положения равновесия (когда нить вертикальна) и проходит нижнюю точку с максимальной скоростью. Но являются ли эти колебания гармоническими? Иными сло-

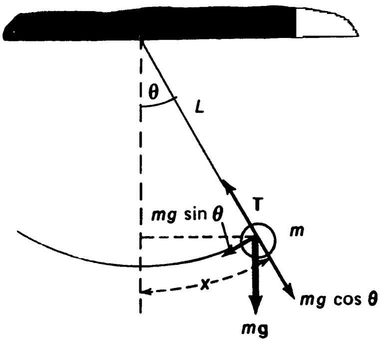

Рис. 14.8. Математический маятник.

вами, пропорциональна ли возвращающая сила смещению? Выясним это.

Смещение x маятника вдоль дуги равно $x = L\theta$, где θ – угол отклонения нити от вертикали, а L – расстояние от точки подвеса до ЦМ груза (рис. 14.8). Таким образом, если возвращающая сила пропорциональна x или θ, то колебания будут гармоническими. В роли возвращающей силы выступает составляющая силы тяжести груза, касательная к дуге:

$$F = -mg\sin\theta.$$

Поскольку мы видим, что сила F пропорциональна синусу угла, а не самому углу θ, колебания *не являются* гармоническими. Однако если угол θ мал, то значение синуса почти не отличается от величины угла в радианах. В этом нетрудно убедиться, посмотрев на разложение синуса в ряд[1], или взглянув в тригонометрические таблицы (на внутренней стороне переплета), или же обратив внимание на то, что на рис. 14.8 длина дуги x ($= L\theta$) очень мало отличается от длины хорды ($= L\sin\theta$), показанной штриховой линией; для углов меньше 15° значения θ и $\sin\theta$ различаются меньше чем на 1%. Следовательно, для малых углов равенство

$$F \approx -mg\theta$$

является очень хорошим приближением. С учетом того, что $x = L\theta$, мы имеем

$$F \approx -(mg/L)x.$$

Таким образом, при малых отклонениях от вертикали движение математического маятника представляет собой гармонические колебания, описываемые формулой (14.1), в которой теперь нужно положить $k = mg/L$. Период колебаний математического маятника можно вычислить по формуле (14.8б), в которой k заменяется на mg/L:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}},$$

или

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad \text{[математический маятник, малые колебания].} \qquad (14.13)$$

Удивительно то, что период колебаний не зависит от массы маятника! Вы могли заметить это, наблюдая, как на одних и тех же качелях раскачиваются взрослые и дети.

В разд. 14.2 мы показали, что период гармонических колебаний не зависит от амплитуды. Говорят, что первым

---

[1] $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots .$

обратил на это внимание Галилей, наблюдая за качающейся люстрой в соборе в Пизе. Это открытие привело к созданию маятниковых часов – первого по-настоящему точного прибора для измерения времени, не имевшего конкурентов в течение нескольких столетий.

Но поскольку колебания маятника не являются строго гармоническими, их период все-таки зависит от амплитуды. Общая формула для периода колебаний маятника записывается в виде бесконечного ряда:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_м}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_м}{2} + \ldots\right), \tag{14.14}$$

где $\theta_м$ – максимальное угловое смещение маятника. В формуле (14.14) каждый следующий член ряда меньше предыдущего; поэтому нам достаточно учесть лишь столько членов, сколько необходимо для обеспечения требуемой точности. При $\theta_м = 15°$ формула (14.13) дает погрешность меньше 0,5%; с увеличением угла погрешность резко возрастает.

Уменьшение амплитуды колебаний маятника в часах из-за трения влияло бы на точность их хода. Однако энергия пружины или гири компенсирует потери на трение, и амплитуда поддерживается постоянной; благодаря этому часы идут точно.

Маятник используется в геологии. Геологов интересуют неоднородности земной коры, а для этого необходимо измерять с высокой точностью ускорение свободного падения в данной точке на поверхности Земли. Для этой цели используют тщательно изготовленные приборы, главной частью которых является прецизионный маятник, как это иллюстрируется в следующем примере.

Пример 14.3. В некотором месте на поверхности Земли геолог измеряет ускорение свободного падения с помощью математического маятника, имеющего длину 37,10 см и амплитуду 6,0°. Оказалось, что частота его колебаний равна 0,8152 Гц. Какое ускорение свободного падения измерил геолог?

Решение. В выражении (14.14) сумма ряда, записанного в скобках, приблизительно равна

$$1 + \frac{1}{4}(0{,}0523)^2 + \frac{9}{64}(0{,}0523)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + 7\cdot10^{-4} + 1\cdot10^{-6} + \ldots \approx 1{,}0007$$

с требуемой нам точностью до четвертого знака. Таким образом, частота дается выражением

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\left(\frac{1}{1{,}0007}\right),$$

откуда находим g:

$$g = (2\pi f)^2 L (1{,}0007)^2 =$$

$$= (6{,}283\cdot0{,}8152\ с^{-1})^2 (0{,}3710\ м)(1{,}0014) =$$

$$= 9{,}795\ м/с^2.$$

* 14.6. Физический маятник

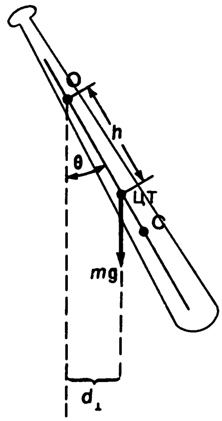

Рис. 14.9. **Физический маятник, подвешенный в точке О.**

Физическим маятником в отличие от идеализированного математического маятника, вся масса которого сосредоточена в маленьком грузике (материальной точке) на конце нити, называют реальное твердое тело, совершающее колебания под действием собственного веса. В качестве примера физического маятника на рис. 14.9 изображена бейсбольная бита, подвешенная в точке О. Сила тяжести приложена в центре тяжести (ЦТ) тела, расположенном на расстоянии h от оси вращения. Физический маятник удобнее всего изучать с помощью уравнений динамики вращательного движения. Момент силы, действующий на физический маятник, относительно точки О дается выражением

$$\tau = -mgh\sin\theta.$$

Согласно второму закону Ньютона, для вращательного движения [формула (9.12)] имеем

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

здесь I – момент инерции тела, а $\alpha = d^2\theta/dt^2$ – угловое ускорение. Таким образом, мы можем написать следующие уравнения:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0,$$

где момент инерции I вычисляется относительно оси, проходящей через точку О. Поскольку для малых угловых смещений $\sin\theta \approx \theta$, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0.$$

Это уравнение очень напоминает уравнение (14.3б) для гармонических колебаний с той лишь разницей, что здесь мы имеем θ вместо x и mgh/I вместо k/m. Таким образом, при малых угловых смещениях физический маятник совершает гармонические колебания по закону

$$\theta = \theta_{\text{м}}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right),$$

где $\theta_{\text{м}}$ – максимальное угловое смещение от вертикали. Период колебаний физического маятника [см. выражение (14.8б)] записывается в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad \text{[малое угловое смещение].} \qquad (14.15)$$

При больших угловых смещениях в (14.15) следует ввести такую же поправку, как и ту, которую мы вводили в формулу для математического маятника [ряд в скобках в формуле (14.14)].

Заметим, что вращательное движение будет соответствовать гармоническим колебаниям, если момент силы пропорционален угловому смещению с обратным знаком:

$$\tau = -k\theta,$$

где k – постоянная, зависящая от параметров системы.

Пример 14.4. *Измерение момента инерции.* Удобный способ измерения момента инерции тела относительно любой оси состоит в измерении периода колебаний этого тела относительно этой оси. Предположим, например, что центр тяжести неоднородной палки массой 1,6 кг расположен на расстоянии 42 см от одного из ее концов. Если заставить палку качаться на оси, проходящей через этот конец, то частота свободных колебаний палки будет равна 2,5 Гц. Чему равен момент инерции палки относительно этого ее конца?

Решение. Момент инерции вычислим по формуле (14.15), подставив в нее $T = 1/f = 0{,}40$ с и $h = 0{,}42$ м:

$$I = mghT^2/4\pi^2 = 0{,}27\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Момент инерции однородного стержня длиной l относительно оси, проходящей через его конец (рис. 9.13), равен $I = (1/3)Ml^2$. Как, по-вашему, длина нашей неоднородной палки больше или меньше чем 84 см?

Пример 14.5. Тонкий прямой однородный стержень длиной $l = 1{,}00$ м и массой $m = 160$ г подвешен за конец на оси. а) Чему равен период его малых колебаний? б) Какова длина математического маятника, имеющего такой же период?

Решение. а) Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через один из его концов (рис. 9.13), равен $I = (1/3)ml^2$. Учитывая, что центр масс находится посередине стержня, т.е. $h = l/2$, для периода колебаний получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{2(1{,}00\ \text{м})}{3(9{,}8\ \text{м/с}^2)}} = 1{,}64\ \text{с}.$$

б) Математический маятник с таким же периодом колебаний имеет длину[1])

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{gI}{mgh} = \frac{I}{mh},$$

которая для однородного стержня, закрепленного на одном из своих концов, равна $L = (2/3)l$ или в нашем случае 0,67 м.

Точка физического маятника, которая располагается на расстоянии

$$L = I/mh$$

от оси вращения O на линии, проходящей через ЦТ, называется *центром качаний* (точка C на рис. 14.9). Центр качаний однородного стержня длиной l находится на расстоянии $L = (2/3)l$ от оси вращения. Как мы видели в последнем примере, период колебаний математического маятника длиной $L = I/mh$ такой же, как и у физического маятника. Иными словами, физический маятник качается

[1]) Эта длина называется *приведенной длиной* физического маятника.– *Прим. перев.*

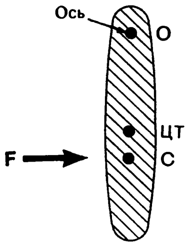

Рис. 14.10. Тело, подвешенное в точке O, испытывает короткий удар с силой **F**, направленной горизонтально и приложенной в центре качаний.

с тем же периодом, что и в случае, если бы вся его масса была сосредоточена в центре качания. Центр качания имеет еще два интересных свойства. 1) Если C является центром качания относительно оси, проходящей через O, то O является центром качания относительно оси, проходящей через C, причем период колебаний в обоих случаях одинаков. 2) Если по подвешенному на оси телу нанести в плоскости колебаний в горизонтальном направлении удар в центр качаний (рис. 14.10), то в точке подвеса не ощущается никакой силы реакции. Интересный пример этого второго свойства можно позаимствовать из бейсбола. Ударяя битой по мячу, игрок чувствует в пальцах «ожог», если удар не приходится по центру качаний. Центр качаний называют также *центром удара*. В задачах, помещенных в конце настоящей главы, мы предлагаем читателю получить оба указанных свойства. Заметим, что положение центра качаний зависит от того, где находится точка подвеса.

Интересно, что при ходьбе нога тоже движется как физический маятник. При каждом шаге нога, рассматриваемая как маятник, совершает полупериод колебаний. При ходьбе мы передвигаем ноги в соответствии с их собственной частотой колебаний. Чтобы убыстрить или замедлить свою ходьбу или же перейти в бег, нам нужно приложить дополнительную силу со стороны мышц. Однако за то же время можно пройти большее расстояние (и меньше устать), если передвигаться большими шагами, придерживаясь собственной частоты колебаний (поскольку период колебаний почти не зависит от амплитуды).

14.7. Затухающие гармонические колебания

В реальных условиях амплитуда колебаний любой колеблющейся пружины и любого качающегося маятника постепенно уменьшается до тех пор, пока колебания вовсе не прекратятся. На рис. 14.11 приведена типичная зависимость амплитуды колебаний от времени. Такие колебания называются **затухающими гармоническими колебаниями**. Затухание[1] колебаний обусловлено, как правило, сопротивлением воздуха и трением внутри колебательной системы. Энергия колебаний постепенно переходит в тепло, и амплитуда колебаний уменьшается.

Но коль скоро в реальных колебательных системах колебания всегда оказываются затухающими, есть ли смысл говорить о незатухающих гармонических колебаниях? Дело в том, что анализировать незатухающие колебания математически гораздо проще. И если затухание не слишком велико, то колебания можно рассматри-

[1] Затухание означает вообще уменьшение, ограничение, иногда гашение или тушение.

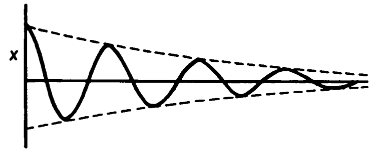

Рис. 14.11. Затухающие гармонические колебания.

вать как гармонические, на которые накладывается затухание (уменьшение амплитуды, показанное на рис. 14.11 штриховыми линиями). Хотя в действительности затухание приводит к изменению частоты колебаний, эффект этот невелик, если затухание мало. Рассмотрим это более детально. Сила, вызывающая затухание, зависит от скорости колебательного движения; она противодействует движению, и во многих случаях ее можно считать прямо пропорциональной скорости:

$$F_{зат} = -bv,$$

где b – постоянная. В случае колебаний груза на конце пружины возвращающая сила со стороны пружины равна $F_x = -kx$, и второй закон Ньютона ($F = ma$) мы можем записать в виде

$$ma = -kx - bv.$$

Перенесем все члены в левую часть этого уравнения и сделаем замену $v = dx/dt$ и $a = d^2x/dt^2$; в результате получим следующее уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{14.16}$$

Попытаемся угадать решение этого уравнения. Если постоянная затухания b мала, то x зависит от времени t так, как показано на рис. 14.11, и эта зависимость выглядит как косинус, умноженный на некоторую функцию, которая убывает со временем (эта функция на рисунке представлена штриховыми линиями). Простой функцией, которая ведет себя подобным образом, является экспонента $e^{-\alpha t}$, так что попробуем записать наше решение в виде

$$x = Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t, \tag{14.17}$$

где предполагается, что A, α и ω' – постоянные, причем $A = x$ при $t = 0$. (Для удобства выберем начальную фазу равной нулю: $\phi = 0$.) Запишем первую и вторую производные функции (14.17) по времени:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t - \omega' Ae^{-\alpha t}\sin\omega' t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t + \alpha A\omega' e^{-\alpha t}\sin\omega' t + \omega'\alpha Ae^{-\alpha t}\sin\omega' t -$$

$$- \omega'^2 Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t.$$

Подставим эти выражения в уравнение (14.16) и после преобразований получим

$$Ae^{-\alpha t}\left[\left(m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k\right)\cos\omega' t + \left(2\omega'\alpha m - b\omega'\right)\sin\omega' t\right] = 0. \quad (14.18)$$

Левая часть этого уравнения должна обращаться в нуль при любых t, что возможно лишь при определенных значениях α и ω'. Чтобы определить α и ω', выберем два значения t, при которых вычисление этих величин упрощается. При $t = 0$ $\sin\omega' t = 0$, так что выражение (14.18) принимает вид $A(m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k) = 0$, откуда получаем[1)]

$$m\alpha^2 - m\omega'^2 - b\alpha + k = 0. \quad (14.19а)$$

При $t = \pi/2\omega'$ имеем $\cos\omega' t = 0$, так что уравнению (14.18) можно удовлетворить, только если

$$2\alpha m - b = 0. \quad (14.19б)$$

Отсюда мы находим

$$\alpha = b/2m,$$

а из (14.19а) получаем

$$\omega' = \sqrt{\alpha^2 - \frac{b\alpha}{m} + \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m}}.$$

Таким образом, мы видим, что выражение (14.17) действительно является решением уравнения движения для гармонического осциллятора с затуханием, если α и ω' определяются записанными выше выражениями.

Таким образом, смещение x при затухающих гармонических колебаниях, когда постоянная затухания b не слишком велика, запишется в виде

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t, \quad (14.20)$$

где

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \quad (14.21)$$

Разумеется, в (14.20) к аргументу косинуса можно добавить начальную фазу ϕ. Решение для x в виде формулы (14.20) с $\phi = 0$ ясно показывает, что константа A представляет просто начальное смещение: $x = A$ при $t = 0$. Частота определяется выражением

$$f = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}, \quad (14.22)$$

откуда мы видим, что в случае затухающих колебаний частота меньше, а период больше, чем для незатухающих гармонических колебаний. (На практике, когда затухание обычно невелико, ω' мало отличается от $\omega = \sqrt{k/m}$.)

---

1) Этому уравнению удовлетворяет также $A = 0$, но оно дает тривиальное и неинтересное решение $x = 0$ для всех значений t, т.е. означает отсутствие колебаний.

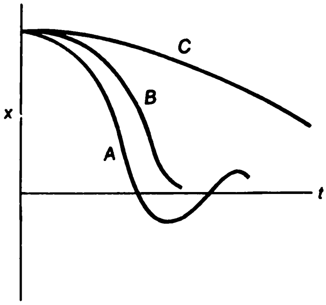

Рис. 14.12. Кривая A - докритическое затухание; кривая B - критическое затухание; кривая C - закритическое затухание.

Этого и следовало ожидать: ведь трение замедляет движение. Когда трение отсутствует ($b = 0$), выражение (14.22) совпадает с (14.8а). Постоянная $\alpha = b/2m$ определяет, насколько быстро амплитуда колебаний уменьшается до нуля (рис. 14.11). Промежуток времени $t_l = 2m/b$, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз, называется средним временем жизни или временем релаксации колебания. Следует заметить, что, чем больше b, тем быстрее колебания прекращаются.

Решение (14.20) теряет силу, когда b столь велико, что

$$b^2 > 4mk,$$

поскольку тогда частота ω' [формула (14.21)] становится мнимой величиной. В этом случае система просто возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Рассмотрим такое поведение системы. На рис. 14.12 представлены три хорошо известных случая сильно затухающих колебаний. Кривая C соответствует случаю, когда затухание столь велико ($b^2 \gg 4mk$), что системе для возвращения в положение равновесия требуется длительное время; это система с *закритическим затуханием*. Кривая A соответствует *докритическому затуханию* ($b^2 < 4mk$), когда система, прежде чем прийти в положение равновесия, совершает несколько колебаний. Кривая B описывает колебание с *критическим затуханием* (демпфированием) ($b^2 = 4mk$); в этом случае система приходит в равновесие за самое короткое время. Примерами систем, в которых демпфирование колебаний оказывается полезным, являются устройства для закрывания дверей и амортизаторы автомобиля. Обычно их конструируют таким образом, чтобы затухание было критическим. Однако по мере износа этих устройств демпфирование ослабляется: двери начинают хлопать, а автомобиль раскачивается, наезжая на неровности дороги. Стрелки измерительных приборов (вольтметров, амперметров, индикаторов уровня в магнитофонах) имеют обычно демпфирование критическое или чуть ниже критического. Если бы демпфирование было слишком слабым, то стрелка долго колебалась бы, прежде чем установиться на определенном значении. Если бы оно было очень велико, то стрелка медленно ползла бы к правильному значению и не успевала отслеживать быстрые изменения (скажем, уровня записи).

14.8. Вынужденные колебания; резонанс

Колебательная система, выведенная из положения равновесия, начинает колебаться с собственной частотой. Ранее в этой главе мы получили формулы, связывающие собственную частоту колебаний (или период) с параметрами системы для упругих объектов (подобно пружине) и маятников.

Однако во многих случаях система не просто колеблется сама по себе, а испытывает еще и действие внешней силы, которая также изменяется с определенной частотой. Например, мы могли бы дергать груз, закрепленный на пружине (рис. 14.1), с частотой $\omega = 2\pi f$. Груз тогда будет колебаться с частотой ω внешней силы, даже если эта частота не совпадает с частотой собственных колебаний пружины, которую мы обозначим здесь через ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

Это пример **вынужденных колебаний**. Другой пример детские качели, представляющие собой, по существу, маятник, имеющий собственную частоту колебаний. Когда мы раскачиваем сидящего на качелях ребенка, мы имеем дело с вынужденными колебаниями гармонического осциллятора. Вообще существует много видов вынужденных гармонических колебаний, и некоторые из них мы обсудим в этой и последующих главах.

При вынужденных колебаниях амплитуда колебаний, а следовательно, и энергия, передаваемая колебательной системе, зависят от того, насколько различаются частоты ω и ω_0, а также от величины затухания колебаний. Пусть внешняя сила синусоидальна и может быть представлена в виде

$$F_{\text{внешн}} = F_0 \cos \omega t,$$

где $\omega = 2\pi f$ круговая частота внешней силы, действующей на осциллятор. Тогда уравнение движения (с учетом затухания) можно записать в виде

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega t$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \tag{14.23}$$

Стоящая в правой части уравнения внешняя сила является единственным членом, который не содержит x или его производных. В задаче 54 (см. в конце настоящей главы) читателю предоставляется возможность показать, что решение уравнения (14.23) записывается в виде

$$x = A_0 \sin(\omega t + \phi_0), \tag{14.24}$$

где

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}}, \tag{14.25а}$$

а

$$\phi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}. \tag{14.25б}$$

В действительности общим решением уравнения (14.23) является сумма решения (14.24) и еще одного члена вида (14.20), который описывает собственные затухающие ко-

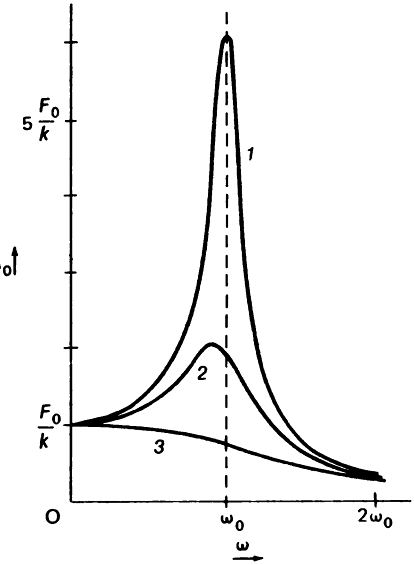

Рис. 14.13. **Зависимость амплитуды вынужденных гармонических колебаний от частоты вынуждающей силы. Кривые** *1*, *2* **и** *3* **соответствуют слабому, сильному и критическому затуханию соответственно** ($Q = m\omega_0/b = 6$; 2; 0,71).

лебания осциллятора; но этот второй член через некоторое время обращается в нуль, так что в большинстве случаев можно обойтись только решением вида (14.24).

Амплитуда вынужденных гармонических колебаний A_0 сильно зависит от разницы между частотой возбуждения и собственной частотой системы. На рис. 14.13 построены зависимости амплитуды A_0 [по формуле (14.25а)] от частоты ω вынуждающей силы для трех значений постоянной затухания b. Кривая *1* соответствует слабому затуханию [$b = (1/6)m\omega_0$], кривая *2* - довольно значительному затуханию [$b = (1/2)m\omega_0$], а кривая *3* - закритическому затуханию ($b = \sqrt{2}m\omega_0$). Когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте колебаний системы, амплитуда резко возрастает, если только затухание не слишком велико. При малом затухании рост амплитуды при приближении к $\omega = \omega_0$ оказывается чрезвычайно сильным. Это явление называется **резонансом**. Собственная частота колебаний системы ω_0 называется резонансной частотой[1]. Если $b = 0$, резонанс наблюдается на частоте $\omega = \omega_0$, а резонансный пик (амплитуда A_0) уходит в бесконечность; при этом энергия постоянно вводится в систему и не рассеивается. В реальных системах b никогда не обращается в нуль, поэтому резонансный пик имеет конечную высоту; вершина пика не приходится точно на $\omega = \omega_0$ [из-за наличия в знаменателе выражения (14.25а) члена $b^2\omega^2/m^2$], хотя и имеет

[1] Иногда резонансную частоту определяют как частоту, при которой амплитуда максимальна; в таком случае она зависит от постоянной затухания. За исключением случаев, когда затухание очень велико, эта частота близка к ω_0.

место практически при $\omega = \omega_0$, если только затухание не особенно велико. Если же затухание велико, то пик выражен слабо или вовсе отсутствует (кривая *3* на рис. 14.13).

Высота и ширина резонансного пика часто характеризуются параметром Q, который называется *добротностью* и определяется следующим образом:

$$Q = m\omega_0/b. \tag{14.26}$$

На рис. 14.13 кривая *1* имеет $Q = 6$, кривая *2* $Q = 2$ и кривая *3* $Q = 1/\sqrt{2}$. Чем меньше постоянная затухания b, тем больше Q и тем выше резонансный пик. Значение Q характеризует также ширину резонансного пика: если ω_1 и ω_2 – частоты, на которых квадрат амплитуды A_0 составляет половину максимального значения (речь идет о квадрате потому, что приток мощности в систему пропорционален A_0^2; см. задачи в конце настоящей главы), то *ширина* резонансного пика $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ связана с Q соотношением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \tag{14.27}$$

(Доказательство этого соотношения, справедливого только в случае слабого затухания, мы предлагаем читателю в задаче 58, помещенной в конце главы.) Чем больше Q, тем острее и выше резонансный пик.

Простой иллюстрацией резонанса является раскачивание ребенка на качелях. Качели, как и любой маятник, имеют собственную частоту колебаний. Если бы вы закрыли глаза и подталкивали качели с какой-то случайной частотой, то качели болтались бы туда-сюда, но раскачать их сильно не удалось бы. Но если подталкивать качели, сообразуясь с их собственной частотой, то ампли-

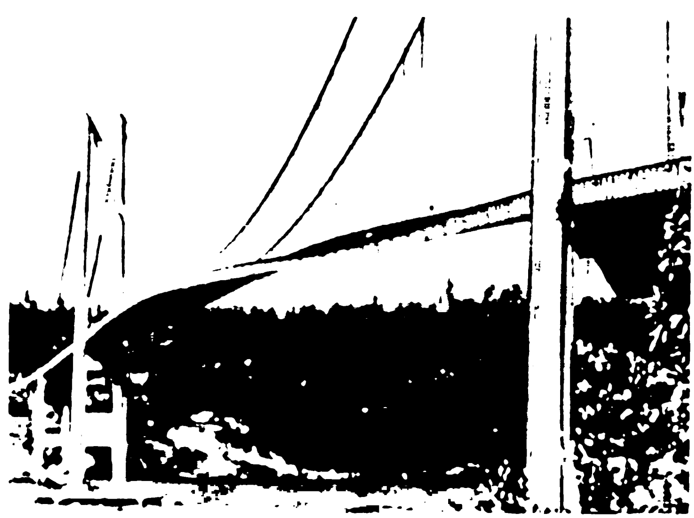

Рис. 14.14. Сильный порывистый ветер вызвал колебания Такомского моста с большой амплитудой, что привело к его разрушению 7 ноября 1940 г. (Wide World Photo.)

туда будет быстро нарастать. Таким образом, при резонансе достаточно относительно небольшого усилия, чтобы достичь большой амплитуды колебаний.

Говорят, что великий тенор Энрико Карузо мог заставить бокал разлететься вдребезги, спев в полный голос ноту надлежащей высоты. Это тоже пример резонанса: здесь звуковые волны возбуждают вынужденные колебания стенок бокала. При резонансе колебания стенок могут достичь такой амплитуды, что стекло не выдержит и разобьется.

Поскольку любое тело обладает, вообще говоря, упругостью, резонансные явления играют важную роль во многих ситуациях. Особенно важны они в строительстве, хотя возникновение их не всегда предсказуемо. В газетах сообщалось, например, что железнодорожный мост обрушился из-за того, что выбоина на колесе проходящего поезда возбудила резонансные явления в конструкции моста. Во избежание подобной катастрофы солдатам, марширующим по мосту, подается команда «сбить ногу». И причиной знаменитой катастрофы Такомского моста (рис. 14.14) в 1940 г. были отчасти резонансные явления.

Резонанс имеет большое значение и для других областей физики, таких, как электричество и магнетизм, физика атомов и молекула. В следующих главах мы рассмотрим много примеров резонанса. Мы покажем также, что колеблющиеся тела во многих случаях имеют не одну, а несколько резонансных частот.

* 14.9. Сложение двух гармонических колебаний

Рассмотрим частицу, совершающую гармонические колебания в двух перпендикулярных направлениях, скажем вдоль осей x и y. Такие два линейных колебательных движения можно записать в виде

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \phi_x), \qquad y = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y).$$

Результирующая траектория движения в плоскости xy зависит от соотношения частот, амплитуд и фаз этих колебаний. Рассмотрим несколько конкретных случаев.

1. *Одинаковые частоты*: $\omega_x = \omega_y = \omega$.

а. *Одинаковые фазы*: $\phi_x = \phi_y = \phi$. Движение частицы изображается в плоскости xy прямой линией, тангенс угла наклона которой равен A_y/A_x. В этом легко убедиться, поскольку

$$x = A_x \cos(\omega t + \phi)$$

и

$$y = A_y \cos(\omega t + \phi) = (A_y/A_x)x,$$

а это - уравнение прямой с тангенсом угла наклона, равным A_y/A_x. На рис. 14.15, *а* показан случай, когда $A_y = 2A_x$.

б. *Фазы различаются на* $\pi/2$: $\phi_y - \phi_x = \pm\pi/2$, амплитуды равны: $A_x = A_y = A$. Движение происходит по окружности (по

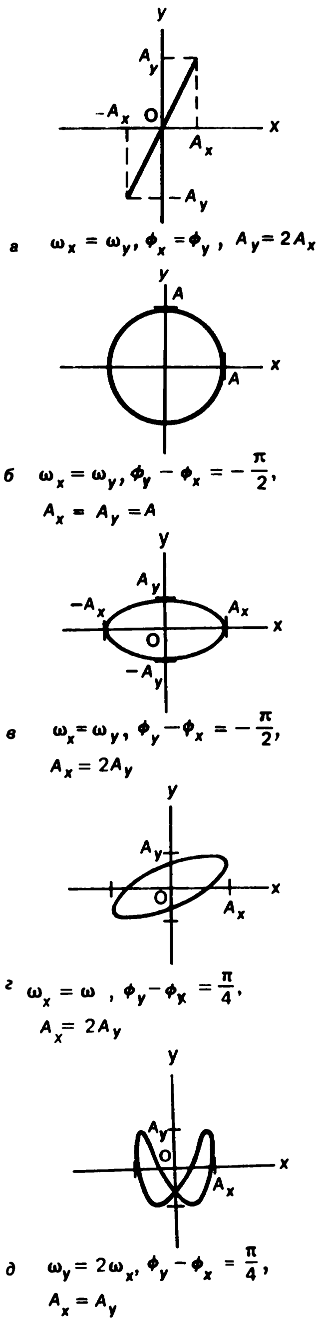

Рис. 14.15. Сложение двух гармонических колебаний, совершаемых под прямым углом друг к другу.

часовой стрелке или против), что можно показать следующим образом: пусть $\phi_x = \phi$, тогда $\phi_y = \phi - \pi/2$, где знак минус взят для определенности. Таким образом,

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \qquad y = A\cos(\omega t + \phi - \pi/2).$$

Поскольку $\cos(\omega t + \phi - \pi/2) = \sin(\omega t + \phi)$, мы можем написать

$$x^2 + y^2 = A^2\cos^2(\omega t + \phi) + A^2\sin^2(\omega t + \phi) = A^2.$$

Это уравнение окружности в плоскости xy с радиусом A (рис. 14.15, *б*). Полученный результат совпадает с нашим заключением в разд. 14.4 о том, что движение по окружности может рассматриваться как сумма двух простых гармонических колебаний, совершающихся в перпендикулярных направлениях.

в. $\phi_y - \phi_x = \pm\pi/2$, $A_x \neq A_y$. В случае когда фазы различаются на $\pi/2$, а амплитуды не одинаковы, движение происходит по эллипсу, как показано на рис. 14.15, *в*, причем большая и малая оси эллипса равны $2A_x$ и $2A_y$. В приведенном примере $A_x = 2A_y$.

г. $\phi_y - \phi_x \neq 0, \neq \pi/2, \neq \pi$. В этом случае частица движется по эллипсу независимо от того, одинаковы амплитуды или нет. В приведенном на рис. 14,15, *г* примере $\phi_y - \phi_x = \pi/4$ и $A_x = 2A_y$.
2. *Неодинаковые частоты*: $\omega_x \neq \omega_y$. Когда частоты у двух колебаний разные, движение может быть очень сложным. В общем случае траектория оказывается даже незамкнутой и движение, таким образом, не является периодическим. Однако если отношение частот ω_x/ω_y кратно целому числу, то траектория оказывается замкнутой и движение является периодическим (хотя, возможно, очень сложным). В примере на рис. 14,15, *д* $\omega_y = 2\omega_x$, а $\phi_y - \phi_x = \pi/4$. Такого типа траектории называют *фигурами Лиссажу*. Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на экране осциллографа, подавая на горизонтальный и вертикальный входы синусоидальные сигналы; меняя амплитуды, частоты и фазы, можно получать множество красивых кривых.

Представляет интерес также сложение гармонических колебаний вдоль одного и того же направления; этот вопрос мы обсудим в следующих главах.

Заключение

Колеблющееся тело совершает *гармонические колебания*, если возвращающая сила пропорциональна смещению: $F = -kx$. Максимальное смещение при колебаниях называется *амплитудой* колебаний. *Период* T – это время, за которое совершается один цикл колебания (туда и обратно), а число колебаний в секунду называется *частотой* f; период и частота связаны соотношением $T = 1/f$. Период колебаний груза, закрепленного на конце пружины, равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$; смещение в зависимости от времени записывается в виде $x = A\cos(2\pi ft + \phi)$, где A – амплитуда, а ϕ – *начальная фаза*; значения A и ϕ зависят от *начальных условий* (x и v при $t = 0$). В простых гармонических колебаниях происходит непрерывный переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно; полная энергия $E = (1/2)mv^2 + (1/2)kx^2$ сохраняется.

Математический маятник длиной L совершает колебания, близкие к гармоническим, если амплитуда его колебаний мала и трением можно пренебречь; при этих условиях период колебаний маятника равен $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, где g – ускорение свободного падения.

При наличии трения (т. е. для всех реальных пружин и маятников) колебания являются *затухающими*. Амплитуда колебаний уменьшается со временем, а энергия постепенно превращается в тепло. Когда трение очень велико, колебания вообще не происходят (*закритическое* затухание). Если трение таково, что до прихода в положение равновесия система совершает одно или несколько колебаний, то затухание называют *докритическим* и смещение описывается выражением $x = Ae^{-\alpha t}\cos\omega' t$, где α и ω' – постоянные величины. При *критическом затухании* (демпфировании) колебаний нет и система возвращается в положение равновесия в кратчайшее время.

Если к системе, способной совершать колебания, приложена внешняя переменная сила, то амплитуда колебаний может стать очень большой, когда частота внешней силы приближается к *собственной* (или *резонансной*) частоте колебаний системы. Это явление называется *резонансом*.

Вопросы

1. Приведите примеры колебательных систем в повседневной жизни. В каких случаях совершаются гармонические или близкие к ним колебания?

2. Сравните формулы для x, v и a при равноускоренном прямолинейном движении и соответствующие формулы для гармонических колебаний. В чем сходство и различие между ними?

3. Если частица совершает гармонические колебания с амплитудой A, то какое расстояние она проходит за один период?

4. Реальные пружины обладают массой. Как будут отличаться истинный период колебаний и их частота от значений, полученных для груза, колеблющегося на конце безмассовой пружины?

5. Могут ли в какой-то момент совпасть направление векторов смещения и скорости простого гармонического осциллятора? А направления векторов смещения и ускорения?

6. Каким образом можно удвоить максимальную скорость гармонического осциллятора?

7. Чему равна начальная фаза ϕ в выражении (14.6), если при $t = 0$ смещение колеблющейся частицы равно а) $x = A$; б) $x = 0$; в) $x = -A$; г) $x = A/2$?

8. Если формула (14.1) $F = -kx$ применима к силам упругости в твердом теле, то что можно сказать о силах, действующих между молекулами твердого тела?

9. Тело массой m подвешено на конце пружины, имеющей жесткость k. Пружину разрезали пополам и подвесили к ней то же тело. Во сколько раз изменилась частота колебаний?

10. Два тела с одинаковыми массами подвешены к двум одинаковым пружинам. Тела оттягивают вниз - одно на 10 см, другое на 20 см и затем одновременно отпускают. Какое из них первым пройдет положение равновесия?

11. Рыбу массой 10 кг прицепили к крючку пружинного безмена и отпустили. Опишите показания весов как функцию времени.

12. Является ли движение поршня в автомобильном двигателе гармоническим колебанием? Объясните.

13. Если маятниковые часы идут точно на уровне моря, то будут ли они спешить или отставать, если их поднять на гору?

14. Согласно (14.14), с увеличением амплитуды период колебаний маятника возрастает. Какие физические причины обусловливают это?

15. Можно ли ожидать, что формула (14.14) справедлива для математического маятника при $\theta > 90°$? Объясните.

16. Если удвоить амплитуду колебаний гармонического осциллятора, то как изменяются его частота, максимальная скорость, максимальное ускорение и полная механическая энергия?

17. Качели с ребенком отвели высоко вверх,

отпустили и в дальнейшем не подталкивали. Как будет меняться частота качаний со временем?

* 18. Опишите возможное движение твердого тела, закрепленного таким образом, что оно может вращаться относительно своего центра тяжести. Является ли это тело физическим маятником?

* 19. Тонкий однородный стержень массой m подвешен за один конец и качается с частотой f. Если к свободному концу прикрепить маленький шарик массой $2m$, то как изменится частота колебаний? Объясните.

20. Обращается ли в нуль в какой-то момент времени ускорение гармонического осциллятора? Когда именно? А в случае затухающих колебаний?

21. Камертон с собственной частотой 264 Гц стоит на столе в передней части комнаты. В задней части комнаты стоят два камертона – один с собственной частотой 260 Гц, а другой с собственной частотой 420 Гц. При возбуждении первого камертона камертон на 260 Гц тоже начинает звучать, а камертон с собственной частотой 420 Гц не отзывается. Объясните, почему.

22. Приведите несколько примеров резонанса из повседневной жизни.

23. Может ли дребезжание автомобиля быть связано с резонансом? Объясните.

24. При строительстве зданий в наши дни стараются использовать все более легкие материалы. Как это влияет на собственные частоты колебаний строительных конструкций и на возможные резонансные явления, когда близко проходят грузовики, поезда или действуют другие источники вибраций?

* 25. В каком направлении происходит движение в примере 1б (разд. 14.9) – по часовой стрелке или против? Что нужно изменить, чтобы движение происходило по той же траектории, но в противоположном направлении?

* 26. Частица участвует в двух колебательных движениях во взаимно перпендикулярных направлениях, причем $\omega_x = \omega_y$, $\phi_x = \phi_y \pm \pi$. Опишите результирующее движение частицы.

Задачи

Раздел 14.2

1. (I) Резиновая лента имеет длину 45 см, когда к ней подвешен груз весом 18,0 Н, и 68 см с грузом весом 22,5 Н. Чему равна жесткость k этой ленты?

2. (I) Когда человек массой 80 кг садится в автомобиль массой 1200 кг, рессоры проседают на 1,4 см. С какой частотой будет качаться кузов при наезде на ухаб? (Затуханием пренебрегите.)

3. (I) а) Запишите уравнение, описывающее движение пружины, если известно, что, когда ее растягивают на 20 см от положения равновесия и отпускают, она колеблется с периодом 1,5 с? б) Определите смещение пружины при $t = 1{,}8$ с.

4. (I) Таракан массой 0,30 г попался в сеть к пауку. Паутина колеблется с частотой 15 Гц. а) Определите значение k для этой паутины. б) С какой частотой будет колебаться паутина, если в нее попадет насекомое массой 0,10 г?

5. (I) Когда к пружине подвешивают груз массой 0,80 кг, она колеблется с частотой 2,4 Гц. Какова будет частота колебаний, если подвесить к пружине груз массой 0,50 кг?

6. (II) Груз на конце пружины оттягивают на 0,8 см от положения равновесия и отпускают. На каком расстоянии от равновесия а) скорость груза будет равна половине максимальной? б) ускорение будет равно половине максимального?

7. (II) В некоторых двухатомных молекулах сила взаимодействия между атомами может быть приближенно представлена в виде $F = -C/r^2 + D/r^3$, где C и D – положительные постоянные. а) Постройте график зависимости F от r, когда r изменяется от 0 до $2D/C$. б) Покажите, что равновесие имеет место при $r = r_0 = D/C$. в) Пусть $\Delta r = r - r_0$ представляет собой небольшое смещение от положения равновесия, в котором $\Delta r \ll r_0$. Покажите, что такое небольшое смещение приводит приблизительно к гармоническому колебанию. г) Определите значение k. д) Чему равен период таких колебаний? (*Подсказка*: считайте, что один из атомов закреплен неподвижно.)

8. (II) Воду в U-образной трубке смещают из положения равновесия на расстояние Δx. (Иначе говоря, разность уровней в коленах трубки равна $2\Delta x$.) Если не учитывать трение, то будут ли колебания воды гармоническими? Найдите выражение для жесткости k. Зависит ли коэффициент жесткости k от плотности жидкости, сечения трубки и высоты водяного столба?

9. (II) Груз массой m подвешен на вертикальной пружине. Покажите, что равновесная длина пружины на $l = mg/k$ больше, чем в случае, когда пружина расположена горизонтально, как на рис. 14.1. Покажите также, что формула (14.1) $F = -kx$ справедлива и для вертикальной пружины, где x – смещение от положения равновесия, а k имеет одно и то же значение для горизонтальных и вертикальных колебаний пружины.

10. (II) Груз массой m на конце пружины колеблется с частотой 0,62 Гц; когда к нему

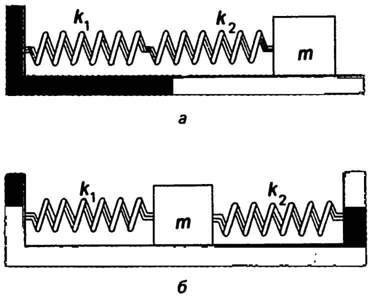

Рис. 14.16.

прикрепляют дополнительную массу 700 г, частота колебаний становится равной 0,48 Гц. Чему равно значение m?

11. (II) Брусок массой m подвешен на двух одинаковых параллельных пружинах с жесткостью k каждая. Чему равна частота колебаний системы?

12. (II) На конце пружины с коэффициентом жесткости k прикреплено тело массой m. В момент $t = 0$ телу сообщается молотком импульс J. Запишите уравнение, описывающее дальнейшее движение системы через m, k, J и t.

13. (II) Смещение гармонического осциллятора в зависимости от времени дается выражением $x = 2{,}4\cos(5\pi t/4 + \pi/6)$, где x измеряется в метрах, а t – в секундах. Найдите: а) период и частоту колебаний; б) смещение и скорость в момент времени $t = 0$, в) скорость и ускорение в момент времени $t = 1{,}0$ с.

14. (II) Камертон колеблется с частотой 264 Гц; размах колебаний кончика каждого из зубцов вилки составляет 1,5 мм от положения равновесия. Вычислите: а) максимальную скорость; б) максимальное ускорение кончика зубца камертона.

15. (II) Груз массой m осторожно прикрепляют к концу свободно висящей пружины. Когда груз освобождают, он опускается на 30 см вниз, а затем идет вверх. Чему равна частота колебаний?

16. (II) Прямоугольный деревянный брусок плавает в спокойной воде. Покажите, что, если пренебречь трением, брусок, когда его слегка притопят и отпустят, совершает гармонические колебания. Выведите формулу для эффективного «коэффициента жесткости».

17. (III) Груз массой m прикреплен к двум пружинам с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 двумя различными способами (рис. 14.16, *а* и *б*). Покажите, что период колебаний на рис. 14.16, *а* дается выражением

$$T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)},$$

а на рис. 14.6, *б* – выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Трением пренебрегите.

18. (III) Два тела с одинаковыми массами m_1 и m_2 соединены с тремя одинаковыми пружинами с коэффициентами жесткости k, как показано на рис. 14.17. а) Примените к каждой из масс второй закон Ньютона ($F = ma$) и запишите два дифференциальных уравнения движения для смещений x_1 и x_2. б) Определите возможные частоты колебаний, предположив, что решения уравнений движения записываются в виде $x_1 = A_1\cos\omega t$, $x_2 = A_2\cos\omega t$.

19. (III) Пружина с коэффициентом жесткости 250 Н/м колеблется с амплитудой 8,00 см, когда к ней подвешен груз массой 0,300 кг. а) Напишите выражение, описывающее смещение этой системы во времени. Считайте, что груз проходит положение равновесия в направлении положительных значений x в момент времени $t = 0{,}060$ с. б) В какие моменты времени пружина имеет наибольшую и наименьшую длину? в) Какая сила действует со стороны пружины на груз в момент времени $t = 0$? г) Чему равно смещение x при $t = 0$? д) Чему равна максимальная скорость и через какое время после $t = 0$ она впервые достигается?

Раздел 14.3

20. (I) Тело массой 1,0 кг совершает колебания по закону $x = 0{,}42\cos 7{,}40t$, где t измеряется в секундах, а x – в метрах. Найдите: а) амплитуду; б) частоту; в) полную энергию; г) кинетическую и потенциальную энергии при $x = 0{,}16$ м.

21. (I) а) При каком смещении гармонического осциллятора его кинетическая энергия равна потенциальной? б) Какую долю полной энергии составляет кинетическая (потенциальная)

Рис. 14.17.

энергия, когда смещение равно половине амплитуды?

22. (II) Груз массой 0,350 кг на конце пружины совершает 2,0 колебания в секунду с амплитудой 0,18 м. Вычислите: а) скорость при прохождении положения равновесия; б) скорость на расстоянии 0,10 м от положения равновесия; в) полную энергию системы; г) выражение, описывающее смещение системы при колебаниях.

23. (II) Для того чтобы взвести пружину детского ружья на 0,10 м и зарядить в нее шарик массой 0,200 кг, нужно приложить силу 60 Н. С какой скоростью шарик вылетает из ствола?

24. (II) Деревянный плот массой 300 кг плавает на озере. Когда на него встает человек массой 75 кг, плот погружается на 5,0 см. После того как человек спрыгивает, плот некоторое время колеблется. а) Чему равна частота колебаний? б) Найдите полную энергию колебаний (пренебрегая затуханием).

25. (II) Пуля массой 0,012 кг попадает в брусок массой 0,300 кг, прикрепленный к горизонтальной пружине с коэффициентом жесткости $5{,}2 \cdot 10^3$ Н/м, другой конец которой закреплен неподвижно. Амплитуда колебаний бруска после попадания в него пули составляет 12,4 см. Какой была скорость пули, если учесть, что после попадания пуля и брусок движутся вместе?

26. (II) Энергия колебаний одной системы в десять раз больше, чем другой, но коэффициент жесткости k первой системы в два раза больше, чем у второй. Как соотносятся амплитуды колебаний этих систем?

27. (II) Человек массой 75 кг прыгает из окна на сетку, используемую пожарными для спасения людей, с высоты 15 м; при этом сетка провисает на 1,2 м. Считая сетку простой пружиной, вычислите, насколько она провиснет, если этот же человек просто ляжет на нее. Насколько бы сетка провисла, если бы на нее спрыгнули с высоты 30 м?

28. (II) В момент времени $t = 0$ по грузу массой 650 г, прикрепленному на конце горизонтальной пружины ($k = 64$ Н/м), ударяют молотком, который сообщает грузу начальную скорость 1,16 м/с. Вычислите: а) период и частоту колебаний; б) амплитуду колебаний; в) максимальное ускорение; г) координату как функцию времени; д) полную энергию; е) кинетическую энергию при $x = 0{,}65A$ (A – амплитуда).

29. (II) Получите формулу, описывающую зависимость смещения x от времени для гармонического осциллятора, используя закон сохранения энергии (14.11). (*Подсказка*: проинтегрируйте выражение (14.12а) с учетом того, что $v = dx/dt$.)

30. (III) Пусть на конце пружины колеблется тело массой m. Масса пружины m_s мала по сравнению с m, но пренебречь ею нельзя. Покажите, что «эквивалентная масса» этой колебательной системы равна $m + (1/3)m_s$ и период колебаний запишется в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + (1/3)m_s}{k}},$$

где k – коэффициент жесткости пружины. (*Подсказка*: считайте, что пружина сжимается и растягивается по всей длине и все участки пружины колеблются в фазе.)

Раздел 14.5

31. (I) Какую длину должен иметь математический маятник, чтобы его период колебаний был равен точно одной секунде?

32. (I) Период колебаний математического маятника на Земле равен 0,60 с. Каким будет его период колебаний на Марсе, где ускорение свободного падения составляет 0,37 земного?

33. (II) Длина математического маятника равна 0,36 м; его отводят на 10° от вертикали и отпускают. а) Чему равна частота колебаний? б) С какой скоростью точечная масса на его конце проходит нижнюю точку?

34. (II) Чему равен период математического маятника длиной 80 см а) на земле; б) в свободно падающем лифте?

35. (II) Длина математического маятника равна 0,24 м. В момент времени $t = 0$ его запускают, отклонив на угол 14° от вертикали. Вычислите, пренебрегая трением, угол отклонения маятника при а) $t = 0{,}25$ с; б) $t = 1{,}60$ с; в) $t = 5{,}00$ с.

36. (II) Выведите выражение для максимальной скорости v_0 материальной точки на конце математического маятника, выразив ускорение свободного падения через g, длину через L и угол колебаний через θ.

37. (II) Математический маятник качается с амплитудой 10,0°. Какую долю своего периода он находится между +5,0 и −5,0°? Колебания считайте гармоническими.

38. (II) Математический маятник качается с частотой f. Чему равна частота его колебаний, если весь маятник движется с ускорением $g/2$, направленным а) вверх; б) вниз; в) горизонтально?

39. (II) Какой может быть максимальная амплитуда маятника, чтобы формула (14.13) выполнялась с точностью а) 1,0%; б) 0,1%?

40. (II) Маятник точных часов колеблется с амплитудой ± 12,0°. Если из-за неисправности в механизме амплитуда колебаний будет со-

ставлять $\pm 1{,}0°$, то на сколько минут часы отстанут или уйдут вперед за сутки?

*Раздел 14.6

*41. (II) Однородное круглое колесо радиусом R подвешено за его край. Чему равна частота его малых колебаний относительно точки подвеса?

*42. (II) Маятник состоит из маленького груза массой M и однородной нити массой m и длиной L. а) Напишите формулу для периода колебаний. б) Какова была бы относительная погрешность (в процентах) расчетов, если бы мы вычисляли период колебаний этого маятника по формуле (14.13) для математического маятника?

*43. (II) *Крутильный маятник.* Плоский цилиндр (диск) с моментом инерции I подвешен на проводе (рис. 14.18). Если повернуть диск на

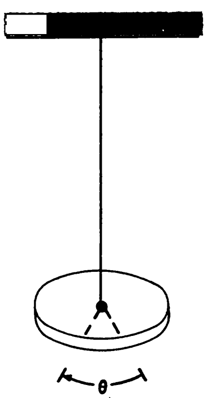

Рис. 14.18.

угол θ от положения равновесия, то он начнет колебаться. Закрученный провод создает возвращающий момент силы

$\tau = -K\theta$,

где K – постоянная, а угол θ не слишком велик. а) Выведите уравнение движения (зависимость θ от времени) и покажите, что колебания являются гармоническими. б) Получите формулу для периода колебаний. Примером крутильного маятника может служить колесико балансира в часах; возвращающий момент создается здесь специальной пружиной («волоском»).

*44. (II) Колесико балансира в часах представляет собой тонкое кольцо радиусом 0,95 см с частотой колебаний 3,10 Гц. Если для закручивания колесика на 60° требуется момент силы $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ Н·м, то чему равна масса колесика?

*45. Рассматривая ногу как физический маятник, определите период колебаний а) непосредственным измерением для собственной ноги; б) пользуясь формулой (14.15). Ногу можно считать длинным стержнем с шарниром на конце; пусть масса ноги в п. «б» равна 12,0 кг, длина 0,80 м, центр тяжести находится на расстоянии 0,50 м от ступни.

*46. (III) Пусть С – центр качаний тела, закрепленного на оси в точке О. Покажите, что если тело закрепить на параллельной оси, проходящей через С, то а) период колебаний останется прежним; б) центром качаний будет точка О. (*Подсказка*: воспользуйтесь теоремой Штейнера о моменте инерции тела относительно параллельной оси.)

*47. (III) Покажите, что если тело испытывает удар в его центре качаний С (рис. 14.10), то во время удара в точке подвеса О не возникает силы реакции. (*Подсказка*: рассмотрите поступательное перемещение центра масс и вращение относительно центра масс.)

Раздел 14.7

48. (II) Брусок массой 750 г колеблется на конце пружины с коэффициентом жесткости $k = 56{,}0$ Н/м. Брусок движется в жидкости, где на него действует сила сопротивления $F = -bv$; $b = 0{,}162$ Н·с/м. а) Чему равен период колебаний? б) На какую долю уменьшается амплитуда после каждого колебания? в) Выразите зависимость координаты от времени, если при $t = 0$ $x = 0$, а при $t = 1{,}00$ с $x = 0{,}120$ м.

49. (II) а) Покажите, что полная механическая энергия $E = mv^2/2 + kx^2/2$ для гармонического осциллятора со слабым затуханием уменьшается со временем по закону

$$E = (1/2)kA^2 e^{-(b/m)t} = E_0 e^{-(b/m)t},$$

где E_0 – полная механическая энергия при $t = 0$. (Считайте, что $\omega' \gg b/2m$.) б) Покажите, что за один период теряется доля полной энергии, равная

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi b}{m\omega_0} = \frac{2\pi}{Q},$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, а $Q(= m\omega_0 / b)$ – *добротность* колебательной системы. Чем больше Q, тем дольше поддерживаются колебания в системе. Физический смысл параметра Q мы рассматривали в разд. 14.8.

50. (II) Гармонический осциллятор с затуханием за период колебаний теряет 5,0% механической энергии. а) На сколько процентов его

частота отличается от «собственной» частоты $\omega_0 = \sqrt{k/m}$? б) Через сколько периодов амплитуда колебаний уменьшится в e раз?

Раздел 14.8

51. (II) а) Чему равна разность фаз ϕ между вынуждающей силой и смещением при резонансе ($\omega = \omega_0$)? б) Каково при этом смещение в момент времени, когда вынуждающая сила имеет максимальное значение? А в момент времени, когда $F = 0$?

52. (II) Постройте точную резонансную кривую от $\omega = 0$ до $\omega = 2\omega_0$ при $Q = 4{,}0$.

53. (II) Амплитуда вынужденных колебаний гармонического осциллятора достигает значения $28{,}6F_0/m$ при резонансе на частоте 382 Гц. Чему равна добротность Q системы?

54. (II) Покажите прямой подстановкой, что выражение (14.24) [с учетом (14.25)] есть решение уравнения движения (14.23) для вынужденных колебаний гармонического осциллятора.

55. (II) Продифференцируйте выражение (14.25а) и покажите, что резонансный максимум амплитуды наблюдается при частоте

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2/2m^2}\,.$$

56. (III) Рассмотрите математический маятник длиной 0,50 м, добротность которого равна $Q = 400$. а) Сколько времени потребуется, чтобы амплитуда малых колебаний уменьшилась на две трети? б) Если амплитуда колебаний равна 2,0 см, а масса маятника 0,20 кг, то чему равна скорость уменьшения начальной энергии (в ваттах)? в) Если необходимо возбудить резонанс синусоидальной внешней силой, то насколько точно должна совпадать ее частота с частотой собственных колебаний маятника?

57. (III) *Передача мощности вынужденным колебаниям.* а) Покажите, что мощность, передаваемая вынужденным колебаниям внешней силой $F_{\text{внешн}}$, записывается в виде

$$P = F_{\text{внешн}} v = \frac{F_0^2 \omega \cos\phi_0 \cos^2 \omega t - (1/2) F_0^2 \omega \sin\phi_0 \sin 2\omega t}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 b^2/m^2}}.$$

б) Покажите, что средняя за один или много периодов передаваемая мощность дается выражением

$$\bar{P} = \frac{\omega F_0^2 \cos\phi_0}{2m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 b^2/m^2}} = \frac{1}{2}\omega A_0 F_0 \cos\phi_0$$

или

$$\bar{P} = (1/2) F_0 v_{\text{макс}} \phi_0,$$

где $v_{\text{макс}}$ – максимальное значение производной dx/dt. в) Постройте кривую зависимости $\bar{P}$ от ω, если ω изменяется от 0 до $2\omega_0$, при $Q = 6{,}0$. Обратите внимание, что, хотя при $\omega = 0$ амплитуда не равна нулю, мощность $\bar{P}$ при $\omega = 0$ равна нулю.

58. (III) Выведите формулу (14.27).

*Раздел 14.9

*59. (II) Запишите в координатах x и y выражения для траекторий движения, показанных а) на рис. 14.15, *г*; б) на рис. 14.15, *д*. Положите $\phi_y = 0$.

*60. (II) Покажите аналитически, что два гармонических колебания во взаимно перпендикулярных направлениях при сложении приводят к эллипсу ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), когда $\omega_x = \omega_y$, $\phi_y - \phi_x = \pm\pi/2$, $A_x \neq A_y$.

*61. (II) Частица движется с постоянной скоростью 24 м/с по окружности с центром в начале координат. В момент времени $t = 0$ частица находится в точке $x = 3{,}0$ м, $y = 4{,}2$ м. а) Найдите выражения, описывающие траекторию этой частицы в плоскости x, y. б) Чему равна частота вращения? в) Чему равна начальная фаза?

*62. (II) Сигналы, подаваемые на горизонтальный и вертикальный входы осциллографа, определяются выражениями соответственно

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \quad y = A\cos\omega t.$$

Найдите траекторию движения (т.е. форму кривой, описываемой траекторией) для следующих случаев: а) $\phi = 0°$; б) $\phi = 60°$; в) $\phi = -60°$; г) $\phi = 90°$.

*63. (II) Нарисуйте фигуру Лиссажу для случая $\omega_x = 3\omega_y$, $A_x = A_y$, $\phi_y - \phi_x = \pi/2$.

*Численное программирование на калькуляторе

*64. (III) *Гармонические колебания.* Уравнение [(14.3б)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

является дифференциальным уравнением. В разд. 14.2 мы нашли общее аналитическое решение этого уравнения. Не все дифференциальные уравнения решаются так же просто, как это, и приходится прибегать к численным методам решения. В качестве иллюстрации проведем численное интегрирование для системы из примера 14.1 с теми же параметрами и начальными условиями (см. разд. 2.10) и рассчитаем смещение x как функцию времени t на интервале 0–1,20 с. (*Подсказка*: необходимо интегрировать дважды; вначале численно интегрируют уравнение

$$dv = -(k/m)\,x\,dt,$$

а затем $dx = v\,dt$.) Постройте график полученного вами решения и убедитесь в том, что в каждой точке на графике оно отличается от аналитического решения не более чем на 1%. (Если расхождения окажутся больше, то следует уменьшить шаг интегрирования по времени и повторить вычисления.)

*65. (III) *Затухающие гармонические колебания.* Дифференциальное уравнение (14.16) описывает затухающие гармонические колебания в случае, когда сила, вызывающая затухание, прямо пропорциональна скорости v. Пусть постоянная затухания b в примере 14.1 может принимать значения а) 1,90 кг/с и б) 7,25 кг/с. Воспользуйтесь численным интегрированием (см. задачу 64) и постройте график зависимости x от t на интервале 0–2,50 с для обоих случаев («а» и «б»). в) Найдите значение b, при котором затухание будет критическим; постройте график для этого случая, вновь используя численное интегрирование. Для всех трех случаев сравните полученные графики с аналитическим решением и убедитесь в том, что расхождение не превышает 2%.

*66. (III) *Затухание, пропорциональное* v^2. Пусть гармонический осциллятор из примера 14.1 тормозится силой, пропорциональной квадрату скорости: $F_{зат} = -cv^2$, где $c = 0{,}275$ кг·с/м. Проинтегрируйте численно дифференциальное уравнение от $t = 0$ до $t = 2{,}00$ с с точностью 2% и постройте график решения.

*67. (III) *Математический маятник.* а) Покажите, что дифференциальное уравнение движения математического маятника (разд. 14.5) имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

б) Пусть грузик математического маятника находится на 1,20 м ниже точки подвеса; грузик отводится на угол $\theta_М = 45°$ и отпускается в момент времени $t = 0$. Численно проинтегрируйте уравнение движения, чтобы определить θ как функцию времени в интервале от $t = 0$ до $t = 3{,}50$ с точностью не хуже 1%. в) Постройте график решения; на этом же графике изобразите аналитическое решение, полученное в предположении малой амплитуды $\theta_М$. г) Чему равен период колебаний, найденный численным интегрированием? Какое значение дают расчеты по формуле (14.14)? Чему равен период малых колебаний ($\theta_М$ мало)? Что можно сказать о зависимости периода T от угловой амплитуды $\theta_М$?