15 Волновое движение

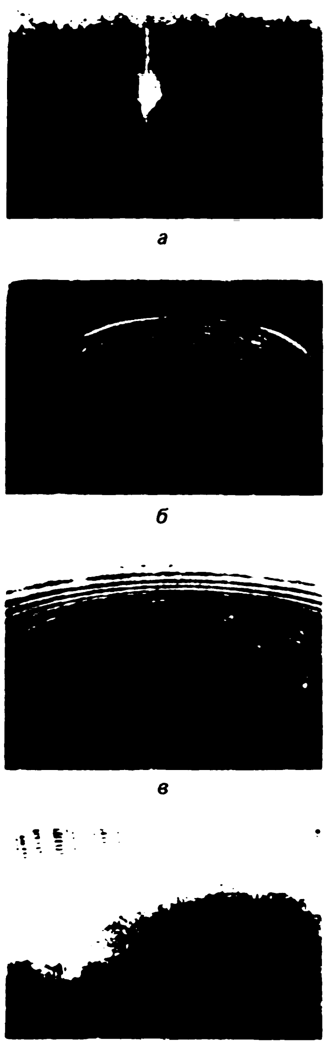


Рис. 15.1. Волны на воде, распространяющиеся от источника (Д. Джанколи).

От камня, брошенного в озеро, образуются расходящиеся круговые волны (рис. 15.1). Если вы подергаете вверх и вниз за конец шнура, проложенного прямо по столу, то по нему тоже побегут волны (рис. 15.2). Волны на воде и волны, бегущие по шнуру,– это два наглядных примера волнового движения. Звук также распространяется в виде волны, и свет представляет собой электромагнитные волны. Элементарные частицы вещества, такие, как электроны, в некоторых отношениях тоже подобны волнам. Таким образом, изучение волновых явлений очень важно, поскольку они встречаются во многих областях физики. В настоящей главе мы сосредоточим внимание на изучении *механических волн*, т.е. волн, которые распространяются только в веществе, например волны на воде или волны в натянутой струне. Другие виды волнового движения мы обсудим в последующих главах.

Источниками волн – будь то морские волны, волны в струне, волны землетрясений или звуковые волны в воздухе – являются колебания. Например, в случае звука колебательные движения совершает не только источник звука (колеблющееся тело), но также и приемник звука - барабанная перепонка уха и мембрана микрофона. Колеблется и сама среда, через которую распространяется волна.

Наблюдая за набегающими на берег волнами, вы, возможно, задавались вопросом: приносят ли волны воду к берегу? Нет, волны в действительности не переносят вещество, через которое они распространяются[1]. Бегущие по воде волны, очевидно, обладают скоростью. Но каждая частица воды при этом совершает лишь колебания относительно положения равновесия. Это легко наблюдать по листьям, плавающим на поверхности пруда. Листья не движутся вперед вместе с волной, а просто колеблются вверх и вниз; такое же движение совершает и вода. Аналогично волна по шнуру на рис. 15.2 бежит вправо, но каждый участок шнура только колеблется туда

1) Это не следует путать с ударом волн, когда в результате взаимодействия волны с берегом ее уже нельзя рассматривать как простое волновое движение. Точно так же ветер может прибивать плавающие предметы к берегу или сносить их в море.

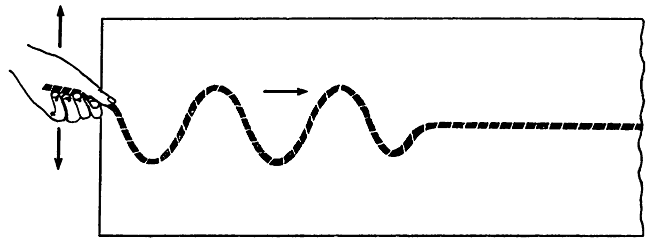


Рис. 15.2. Волна, бегущая по шнуру.

и обратно. Это общее свойство волн; сами волны могут распространяться через среду на большие расстояния, но сама среда (вода, шнур) совершает лишь ограниченное движение. Таким образом, хотя волна сама по себе и не является материальным телом, ее распространение возможно только в материальной среде (веществе). Волна представляет собой колебания, которые при своем распространении не переносят с собой вещество.

Волны переносят энергию из одной точки пространства в другую. Волна на воде приобретает энергию за счет брошенного в воду камня или порыва ветра в открытом море. Энергия переносится волнами к берегу. Если вам случалось оказаться под морской волной, когда она разрушается, то вы на себе почувствовали, какую энергию она несет. Рука, дергающая шнур на рис. 15.2, передает ему энергию, причем эта энергия может быть передана другому концу шнура. При всех видах волнового движения происходит перенос энергии.

15.1. Характеристики волнового движения

Посмотрим, как образуется волна и за счет чего происходит ее распространение. Рассмотрим вначале отдельный (уединенный) волновой «всплеск», или импульс. Уединенный волновой импульс можно возбудить в шнуре быстрым движением руки вверх-вниз (рис. 15.3). Рука тянет конец шнура вверх, а поскольку концевой участок шнура связан с соседними участками, то им также передается сила, действующая вверх, и они тоже начнут двигаться вверх. Один за другим последовательные участки шнура поднимаются вверх, и вдоль шнура движется наружу «горб» волны. Тем временем рука, держащая конец шнура, опускается в исходное положение вниз, и участки шнура, уже пришедшие в верхнюю точку движения, в той же последовательности возвращаются назад. Таким образом, источником распространяющегося волнового импульса является возмущение, а его распространение обусловлено силами взаимодействия между соседними участками шнура. Аналогичным образом создаются и распространяются волны в других средах.

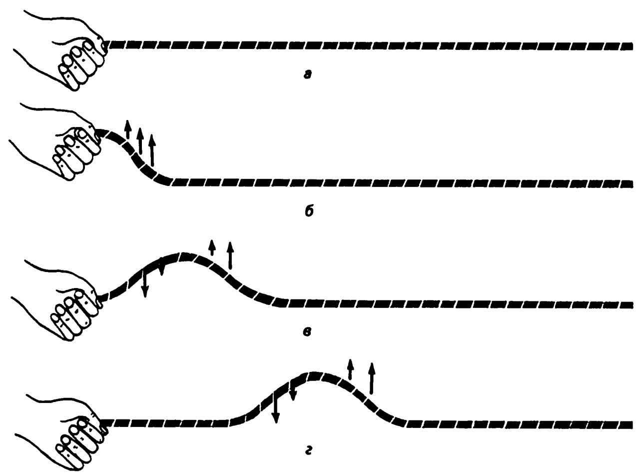


Рис. 15.3. Движение волнового импульса по шнуру. Стрелками показаны скорости частиц шнура.

Источником *непрерывной* или *периодической* волны, подобной той, зарождение которой показано на рис. 15.2, является непрерывно действующее колебательное возмущение; таким образом, источником волн являются *колебания*. На рис. 15.2 колебания конца шнура создаются рукой. Волны на воде можно возбудить любым колеблющимся предметом, помещенным на поверхность воды, в том числе и рукой. Источником колебаний может быть и сама вода, возбуждаемая дуновением ветра или брошенным в нее предметом (камнем, теннисным мячом). Вибрирующий камертон и «шкура» барабана возбуждают звуковые волны в воздухе; как мы увидим позднее, колеблющиеся электрические заряды порождают световые волны. И вообще почти любой колеблющийся предмет порождает волны.

Таким образом, источником любой волны является *колебание*, которое и распространяется от источника в виде волны. Если источник движется синусоидально, совершая гармонические колебания, то и волна, если среда является абсолютно упругой, будет иметь форму синусоиды как в пространстве, так и во времени. Иными словами, если сделать мгновенную фотографию волнового движения в какой-то момент времени, то волна будет выглядеть как функция синус или функция косинус. Если же рассматривать движение среды в каком-то одном месте в течение длительного периода времени (например, наблюдая колебания поверхности воды между двумя близко стоящими сваями на пирсе), то этот небольшой участок воды будет двигаться вверх-вниз, совершая гармоническое колебание, описываемое синусоидальной функцией времени.

На рис. 15.4 показаны основные параметры, используемые для характеристики периодической синусоидальной волны. Высшие точки волнового движения назы-

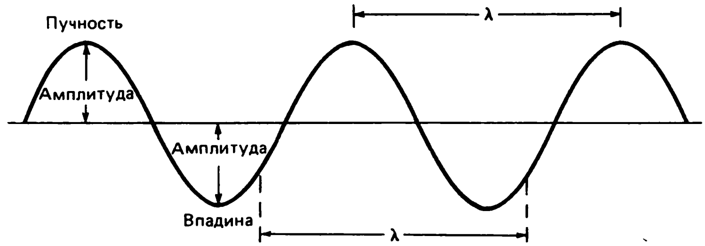


Рис. 15.4. Параметры непрерывной волны.

ваются пучностями, а низшие – впадинами. **Амплитуда** – это максимальная высота пучности или глубина впадины, измеренная относительно нулевого уровня (или положения равновесия); полный размах колебаний от пучности до впадины равен удвоенной амплитуде. Расстояние между двумя соседними пучностями называется **длиной волны** λ (греческая строчная буква ламбда). Длина волны равна также расстоянию между *любыми* двумя последовательными одинаковыми по высоте точками волны. **Частота** f [иногда обозначаемая строчной греческой буквой ν (ню)] – это число гребней, проходящих через данную точку за единицу времени (или число полных колебаний). Период T, разумеется, равен $1/f$.

Скоростью волны v называется скорость, с которой перемещается, как мы наблюдаем, гребень волны. (Скорость волны следует отличать от скорости частиц самой среды. Например, скорость волны, бегущей по шнуру на рис. 15.2, направлена вдоль шнура, в то время как скорости частиц шнура направлены перпендикулярно ему.) Поскольку за период T гребень проходит расстояние, равное длине волны λ, скорость волны определяется как

$$v = \lambda/T \text{ или } v = \lambda f. \qquad (15.1)$$

Предположим, например, что длина волны равна 5 м, а частота 3 Гц. При этом за одну секунду через данную точку пройдут три гребня волны, отстоящие друг от друга на 5 м; первый гребень (или любая другая фиксированная точка волны) переместится за секунду на 15 м; следовательно, скорость волны равна 15 м/с.

Скорость волны зависит от свойств среды, в которой волна распространяется. В растянутой струне, например, она зависит от силы натяжения струны F_T и от массы на единицу длины струны μ (строчная греческая буква мю); для волн с небольшой амплитудой мы имеем следующее соотношение:

$$v = \sqrt{F_T/\mu}\,. \qquad (15.2)$$

Прежде чем дать вывод этой формулы, заметим, что по крайней мере качественно она согласуется с представлениями механики Ньютона. Иными словами, мы действительно должны были бы предположить, что сила натяжения должна быть в числителе, а линейная плотность

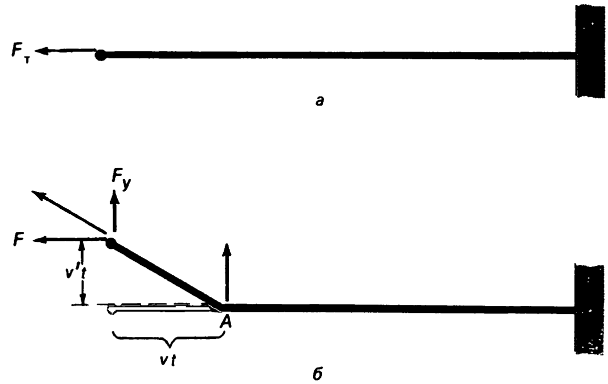


Рис. 15.5. К выводу формулы (15.2) простой волновой импульс.

(масса на единицу длины) – в знаменателе, поскольку, чем больше натяжение, тем больше должна быть и скорость, так как при этом каждый участок струны теснее связан с соседним. Чем больше линейная плотность, тем больше инертность струны, и, следовательно, волна должна распространяться по струне более замедленно.

Для вывода формулы (15.2) воспользуемся простой моделью струны, на которую действует сила натяжения F_T (рис. 15.5, *а*). Сила F_y тянет струну вверх со скоростью v'; как показано на рис. 15.5, *б*, все точки струны слева от точки A движутся вверх со скоростью v', а точки справа от A все еще находятся в покое. Скорость распространения v этого волнового импульса равна скорости движения точки A, т. е. переднего фронта импульса. За время t точка A уходит вправо на расстояние vt, а конец струны перемещается вверх на расстояние $v't$. Из подобия треугольников получим следующее приближенное соотношение:

$$F_T / F_y = v/v',$$

которое справедливо для малых смещений ($v't \ll vt$), так что F_T заметно не изменяется. Как мы показали в гл. 8, импульс силы, действующий на тело, равен изменению импульса (количества движения) тела. Полный импульс силы за время t, направленный вверх, равен $F_y t = (v'/v) F_T t$; изменение импульса струны Δp равно произведению массы участка струны, движущегося вверх, на его скорость. А поскольку масса движущегося вверх участка равна произведению линейной плотности μ на длину этого участка vt, мы имеем

$$F_y t = \Delta p,$$

$$(v'/v) F_T t = (\mu v t) v'.$$

Отсюда находим $v = \sqrt{F_T/\mu}$, т. е. мы получили формулу (15.2). Хотя эту формулу мы вывели для частного случая, она справедлива и для волн любой другой формы, поскольку любую волну можно представить состоящей из большого числа малых участков рассмотренного вида.

Однако справедливость формулы (15.2) ограничивается лишь малыми смещениями, что мы и учитывали при ее выводе. Этот результат, полученный в рамках механики Ньютона, согласуется с экспериментом.

Пример 15.1. Волна, имеющая длину 0,50 м, движется вдоль провода длиной 300 м, общая масса которого равна 30 кг. Если на провод действует сила натяжения 4000 Н, то чему равны скорость и частота этой волны?

Решение. Скорость волны вычислим по формуле (15.2):

$$v = \sqrt{\frac{4000\ \text{Н}}{(30\ \text{кг})/(300\ \text{м})}} = 200\ \text{м/с}.$$

Частота при этом оказывается равной

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{200\ \text{м/с}}{0{,}50\ \text{м}} = 400\ \text{Гц}.$$

15.2. Типы волн

Мы уже упоминали, что волны могут распространяться на большие расстояния, а частицы среды совершают колебания лишь в ограниченной области пространства. Когда волна движется по шнуру, скажем, слева направо, участки шнура колеблются вверх и вниз, т. е. в направлении, перпендикулярном (или поперечном) движению самой волны. Такая волна называется **поперечной**. Существует и другой тип волн, называемый **продольными волнами**. В продольной волне частицы среды колеблются в *том же самом* направлении, в каком распространяется сама волна. Продольные волны легко наблюдать в мягкой растянутой пружине, попеременно сжимая и растягивая один ее конец, как показано на рис. 15.6, *б* (ср. с поперечными волнами на рис. 15.6, *а*). По пружине перемещаются области сжатия и разрежения. *Области сжатия* – это те области, в которых витки пружины сбли-

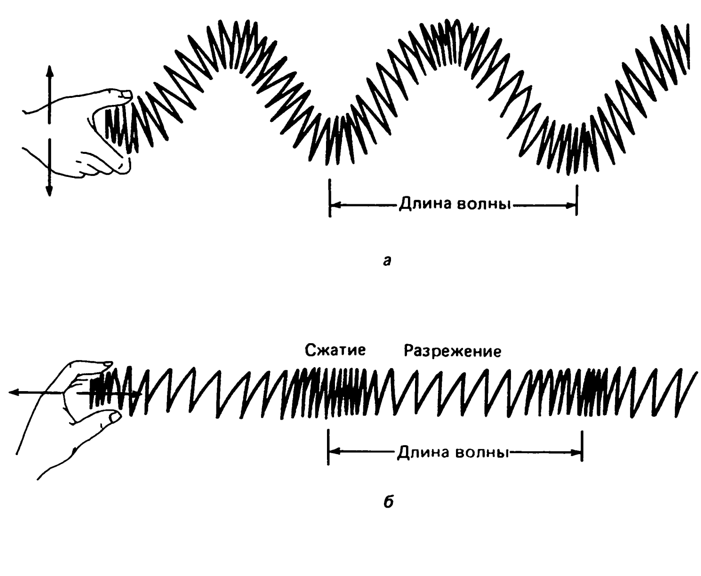


Рис. 15.6. *а* – поперечная волна; *б* – продольная волна.

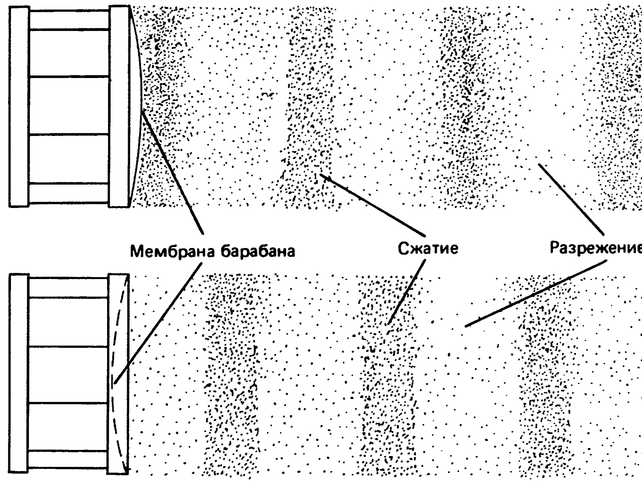
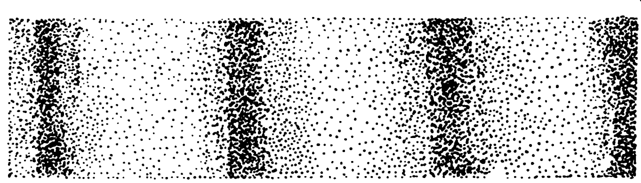


Рис. 15.7. **Образование звуковой (продольной) волны.**

жаются друг с другом, а *области разрежения* – те, в которых они расходятся. Области сжатия и разрежения соответствуют гребням и впадинам поперечной волны.

Важным примером продольной волны является звуковая волна в воздухе. Например, колеблющаяся мембрана барабана создает попеременно сжатие и разрежение в соседствующей с ней области воздуха, благодаря чему образуется продольная волна, распространяющаяся в воздухе (рис. 15.7).

Как и в случае поперечных волн, каждый участок среды, по которому идет продольная волна, совершает очень небольшие по размаху колебания, в то время как сама волна может распространяться на значительные расстояния. К продольной волне также применимы понятия длины волны, частоты и скорости. Длина вол-



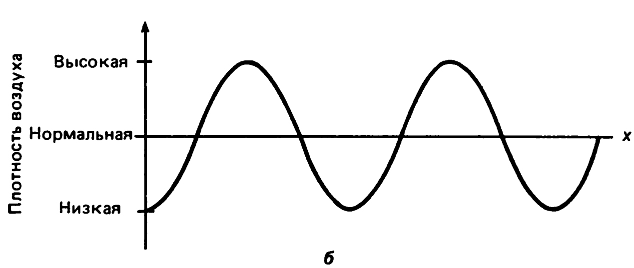


Рис. 15.8. *а* – продольная волна; *б* – ее графическое представление.

ны – это расстояние между двумя соседними областями сжатия (или разрежения), а частота – это число сжатий, проходящих в единицу времени через данную точку. Скорость волны – это скорость, с которой движется область сжатия (разрежения); она равна произведению длины волны на частоту.

Продольную волну можно представить графически как зависимость плотности молекул воздуха (или числа витков пружины) от координаты, как показано на рис. 15.8. Мы нередко будем пользоваться таким графическим представлением, поскольку оно более наглядно показывает то, что происходит в среде. Обратите внимание, что зависимость на рис. 15.8, *б* очень похожа на поперечную волну.

Выражение для скорости продольной волны аналогично формуле (15.2) для скорости поперечной волны в струне. Таким образом,

$$v = \sqrt{\frac{\text{Упругая сила}}{\text{Инертность}}}.$$

В частности, скорость продольной волны в длинном сплошном стержне дается выражением

$$v = \sqrt{E/\rho}\,, \tag{15.3}$$

где E – модуль упругости (разд. 11.4) вещества, а ρ – его плотность. Для продольной волны в жидкости или газе

$$v = \sqrt{B/\rho}\,, \tag{15.4}$$

где B – модуль всестороннего сжатия (разд. 11.4), а ρ – плотность.

Выведем формулу (15.4). Пусть мы имеем волновой импульс, распространяющийся в жидкости (газе) в длинной трубе, так что движение можно считать одномерным. Труба заполнена жидкостью, в которой при $t = 0$ плот-

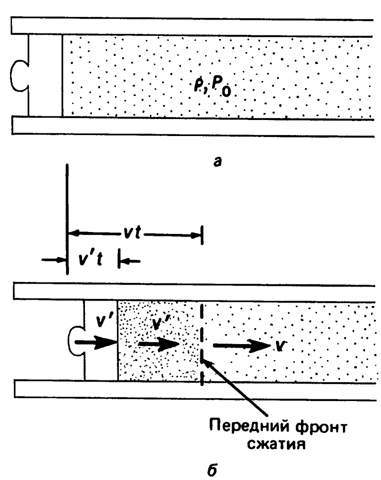


Рис. 15.9. **Определение скорости распространения одномерной продольной волны в жидкости, заключенной в длинной узкой трубе.**

ность ρ и давление P_0 постоянны во всем объеме (рис. 15.9, *а*). В момент времени $t = 0$ поршень в конце трубы начинает двигаться вправо со скоростью v', сжимая перед собой среду, причем за короткое время t поршень проходит расстояние $v't$. Сжимаемая поршнем среда также движется со скоростью v', однако передний фронт области сжатия движется с характерной скоростью v, с которой распространяется сжатие в данной среде; будем считать, что $v \gg v'$. Передний фронт сжатия (который при $t = 0$ совпадал с поверхностью поршня) за время t проходит, таким образом, расстояние vt (рис. 15.9, *б*). Пусть давление в области сжатия равно $P_0 + \Delta P$, т.е. на ΔP больше, чем в невозмущенной среде. Чтобы переместить поршень вправо, к нему нужно приложить внешнюю силу $(P_0 + \Delta P)A$, где A - площадь поперечного сечения трубы. *Результирующую* силу, действующую на среду в области сжатия, можно записать в виде

$$(P_0 + \Delta P)A - P_0 A = A\,\Delta P,$$

поскольку находящаяся справа невозмущенная среда действует с силой $P_0 A$ на передний фронт области сжатия. Следовательно, импульс силы, сообщаемый сжатой среде и равный изменению ее импульса, запишется в виде

$$A\,\Delta P t = (\rho A v t)v',$$

где $\rho A v t$ - масса жидкости, которой сообщается скорость v'. Следовательно, мы имеем

$$\Delta P = \rho v v'.$$

Согласно определению, модуль всестороннего сжатия B [формула (11.7а)] дается выражением

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} = -\frac{\rho v v'}{\Delta V/V_0},$$

где $\Delta V/V_0$ - относительное изменение объема вследствие сжатия. Первоначальный объем подвергающейся сжатию жидкости равен $V_0 = Avt$, а изменение ее объема составляет $\Delta V = -Av't$ (рис. 15.9, *б*). Таким образом,

$$B = -\frac{\rho v v'}{\Delta V/V_0} = -\rho v v'\left(\frac{Avt}{-Av't}\right) = \rho v^2$$

и

$$v = \sqrt{B/\rho}.$$

Последнее выражение и есть формула (15.4). Формула (15.3) выводится аналогично, но дополнительно учитывается то обстоятельство, что при продольном сжатии стержня он также слегка расширяется.

Пример 15.2. Шум приближающегося поезда можно услышать, приложив ухо к рельсу. Сколько времени идет по стальному рельсу звуковая волна, когда поезд находится от вас на расстоянии 1,0 км?

Решение. Подставляя в (15.3) значения модуля упругости и плотности стали из табл. 11.1 и 12.1, находим

$$v = \sqrt{\frac{2{,}0 \cdot 10^{11}\ \text{Н/м}^2}{7{,}8 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3}} = 5{,}1 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Таким образом, t = Расстояние/Скорость = $(1{,}0 \cdot 10^3\ \text{м})/(5{,}1 \cdot 10^3\ \text{м/с}) = 0{,}20$ с.

При землетрясениях, которые играют роль возмущений, в толще Земли распространяются как поперечные волны, называемые S-волнами, так и продольные волны (P-волны). В твердом теле тоже могут существовать как поперечные, так и продольные волны, поскольку атомы и молекулы могут колебаться относительно их положения равновесия в любом направлении. Однако в жидкости или газе могут распространяться только продольные волны, так как благодаря текучести этих сред в поперечном направлении на частицы не действует возвращающая сила. Это свойство помогло геофизикам сделать вывод о существовании жидкого ядра Земли, поскольку обнаружено, что в диаметральном направлении сквозь Землю проходят только продольные волны, поперечные же никогда не регистрируются. Единственным возможным объяснением этого является наличие у Земли жидкого (расплавленного) ядра.

Существуют еще волны и третьего типа, называемые *поверхностными волнами*, которые распространяются на границе раздела двух сред. Волны на воде – один из примеров поверхностных волн, существующих на границе между водой и воздухом. Если длина волны меньше глубины водоема, то каждая частица воды на поверхности движется по эллипсу (рис. 15.10), т. е. представляет собой комбинацию колебаний в продольном и поперечном на-

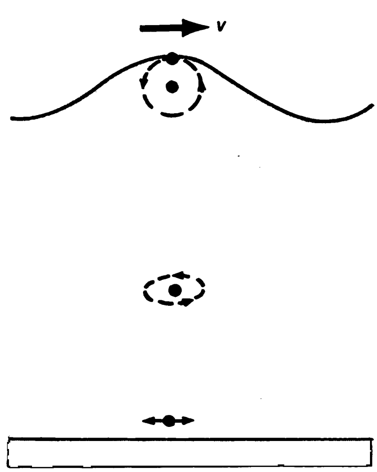


Рис. 15.10. Волна на воде – пример *поверхностной волны*, которая представляет собой комбинацию поперечного и продольного волновых движений.

правлениях. Под поверхностью (но вблизи от нее) движение частиц тоже является сочетанием продольного и поперечного (эллиптическое движение), у дна же наблюдается чисто продольное движение. При землетрясениях в земной коре возбуждаются также поверхностные волны; именно их действием и обусловлены главным образом разрушения, производимые землетрясением.

Волны, которые распространяются вдоль прямой линии (таковы, например, поперечные волны в натянутой струне или продольные волны в твердом стержне или трубе, заполненной жидкостью или газом), *называются линейными или одномерными волнами*. Поверхностные волны, такие, как волны на воде (рис. 15.1), являются *двумерными волнами*. Наконец, волны, которые распространяются от источника во всех направлениях (например, звук из громкоговорителя или волны, возбуждаемые землетрясением в толще Земли), представляют собой *трехмерные волны*. Нас будут интересовать одномерные волны как самый простой и наиболее изученный случай волнового движения.

15.3. Энергия, переносимая волнами

Волны переносят энергию из одного места в другое. Когда волны распространяются через среду, энергия передается в виде энергии колебаний от одной частицы среды к другой. В синусоидальной волне с частотой f частицы среды совершают гармонические колебания, так что каждая частица обладает энергией $E = (1/2)\,kD_{\text{м}}^2$, где $D_{\text{м}}$ - максимальное смещение (амплитуда колебаний) частицы от положения равновесия либо в продольном, либо в поперечном направлении [см. формулу (14.11), где мы заменили A на $D_{\text{м}}$]. С помощью (14.8) можно выразить k через частоту: $k = 4\pi^2 mf^2$. Таким образом,

$$E = 2\pi^2 mf^2 D_{\text{м}}^2.$$

Масса $m = \rho V$, где ρ - плотность среды, а V - ее объем. Кроме того, $V = Al$, где A - площадь поперечного сечения, через которое проходит волна, а l - расстояние, которое волна проходит за время t: $l = vt$ (здесь v - скорость волны). Таким образом, $m = \rho V = \rho Al = \rho Avt$ и

$$E = 2\pi^2 \rho Avtf^2 D_{\text{м}}^2. \qquad (15.5)$$

Если рассмотреть передний фронт синусоидальной волны, подошедший к области, где волнового движения не было (как на рис. 15.2), то станет ясно, что E в формуле (15.5) соответствует средней энергии, которая переносится волной через границу рассматриваемой области за время t. Формула (15.5) представляет собой важный результат, состоящий в том, что *энергия, переносимая волной, пропорциональна квадрату ее амплитуды*. Энергия, переносимая волной за единицу времени,– это *средняя мощность* $\bar{P}$:

$$\bar{P} = E/t = 2\pi^2 \rho A v f^2 D_M^2. \quad (15.6)$$

Наконец, **интенсивность** волны I определяется как средняя мощность, переносимая через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению потока энергии:

$$I = \bar{P}/A = 2\pi^2 v \rho f^2 D_M^2. \quad (15.7)$$

Мы видим, что *интенсивность волны пропорциональна квадрату ее амплитуды.*

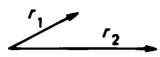


Рис. 15.11. Волна, распространяющаяся от источника, имеет сферическую форму; показаны два гребня (или сжатия), расположенные на расстояниях r_1 и r_2 от источника.

Если волны распространяются от источника во всех направлениях (примерами таких волн являются звуковые волны в воздухе, волны при землетрясениях, световые волны), то мы имеем дело с трехмерной волной. В изотропной среде (т. е. среде, свойства которой одинаковы по всем направлениям) такая волна имеет сферическую форму и называется *сферической волной* (рис. 15.11). По мере распространения волны от источника она распределяется по все большей площади, поскольку площадь сферы $4\pi r^2$ пропорциональна квадрату ее радиуса r. В силу сохранения энергии из (15.5) или (15.6) следует, что по мере увеличения площади A амплитуда волны D_M должна убывать. Иначе говоря, на различных расстояниях r_1 и r_2 от источника (рис. 15.11) $A_1 D_{M1}^2 = A_2 D_{M2}^2$, где D_{M1} и D_{M2} – амплитуды волны на расстояниях r_1 и r_2 соответственно. А поскольку $A_1 = 4\pi r_1^2$ и $A_2 = 4\pi r_2^2$, то $D_{M1}^2 r_1^2 = D_{M2}^2 r_2^2$, или

$$D_{M2}/D_{M1} = r_1/r_2.$$

Таким образом, амплитуда обратно пропорциональна расстоянию до источника; на вдвое большем расстоянии от источника амплитуда волны вдвое меньше и т. д. (если не учитывать затухание, обусловленное трением).

Интенсивность I также убывает с расстоянием. Поскольку I пропорциональна D_M^2 [см. (15.7)], интенсивность обратно пропорциональна *квадрату* расстояния до источника. Закон обратных квадратов справедлив для световых, звуковых и других типов волн. Можно прийти к этому выводу и по-другому: рассмотрим две точки r_1 и r_2 одновременно. Если мощность на выходе источника постоянна, то интенсивность в точке r_1 равна $I_1 = \bar{P}/4\pi r_1^2$, а в точке r_2 имеем $I_2 = \bar{P}/4\pi r_2^2$. Таким образом,

$$I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2. \quad (15.8)$$

Пример 15.3. Интенсивность сейсмической P-волны в 100 км от центра составляет $1{,}0 \cdot 10^6$ Вт/м^2. Чему равна интенсивность этой волны на расстоянии 400 км от центра землетрясения?

Решение. Интенсивность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника. Следовательно, на расстоянии 400 км она будет равна $(1/4)^2 = 1/16$ интенсивности, измеряемой на расстоянии 100 км, т. е. будет равна $6{,}2 \cdot 10^4$ Вт/м^2.

Иначе обстоит дело с одномерной волной (например, с поперечной волной в натянутой струне или продольной волной, распространяющейся в металлическом однородном стержне). Здесь площадь A сохраняется неизменной, и поэтому амплитуда $D_{\text{м}}$ также остается постоянной; таким образом, ни амплитуда, ни интенсивность волны не убывают с расстоянием.

Однако в практической ситуации всегда существует затухание, обусловленное трением, и часть энергии колебаний переходит в тепловую энергию. Поэтому амплитуда и интенсивность в одномерной волне с удалением ее от источника несколько уменьшаются. Соответственно и для трехмерной волны уменьшение амплитуды будет больше найденного выше, хотя обычно это уменьшение не слишком велико.

15.4. Математическое описание бегущей волны

Рассмотрим одномерную волну, распространяющуюся вдоль оси x. Это может быть поперечная волна в натянутой струне или продольная волна в твердом стержне или трубе, заполненной жидкостью или газом. Будем считать, что волна является синусоидальной, ее длина равна λ, а частота f. Пусть при $t = 0$ волна дается выражением

$$D = D_{\text{м}} \sin(2\pi x/\lambda), \tag{15.9}$$

где D – смещение волны в точке x, а $D_{\text{м}}$ – амплитуда (максимальное смещение) волны. Эта волна показана на рис. 15.12 сплошной линией. Выражение (15.9) описывает форму волны, которая повторяется с периодичностью, равной длине волны (как раз то, что нам нужно), поскольку смещение оказывается одним и тем же, например при $x = 0$, $x = \lambda$, $x = 2\lambda$ и т. д. (поскольку $\sin 4\pi = \sin 2\pi = \sin 0$).

Предположим теперь, что волна движется вправо со скоростью v. Тогда через время t каждый участок волны (в действительности весь профиль волны) сместится вправо на расстояние vt; на рис. 15.12 это изображено штриховой линией. Рассмотрим любую точку волны при $t = 0$, скажем гребень волны в точке x. За время t этот гребень пройдет расстояние vt, и его новая координата будет на vt

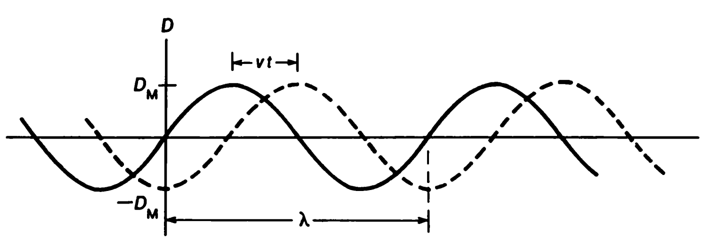


Рис. 15.12. Бегущая волна. За время t волновой профиль перемещается на расстояние vt.

больше прежней. Чтобы наше выражение описывало ту же самую точку на профиле волны, аргумент синуса должен остаться тем же, и поэтому в (15.9) x нужно заменить на $x - vt$:

$$D = D_{\text{M}} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]. \tag{15.10а}$$

Иными словами, если мы движемся вместе с выбранным гребнем, то аргумент синуса остается для нас неизменным (равным $\pi/2$, $5\pi/2$ и т. д.); по мере возрастания t значение x должно увеличиваться с той же скоростью, чтобы значение $x - vt$ оставалось постоянным.

Выражение (15.10а) дает математическое описание синусоидальной волны, движущейся вдоль оси x вправо (в сторону возрастания x). Оно определяет смещение D волны в любой точке x в любой момент времени t. Поскольку $v = \lambda f$ [см. выражение (15.1)], формулу (15.10*а*) можно переписать в более удобном виде:

$$D = D_{\text{M}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right), \tag{15.10б}$$

где $T = 1/f = \lambda/v$ – период, или в виде

$$D = D_{\text{M}} \sin(kx - \omega t), \tag{15.10в}$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ – круговая частота, а

$$k = 2\pi/\lambda. \tag{15.11}$$

Величина k называется **волновым числом.** (Не следует путать волновое число k с коэффициентом жесткости пружины k: это совершенно разные величины.) Все три выражения (15.10а)–(15.10в) эквивалентны друг другу; из них выражение (15.10в) имеет самый простой вид и, возможно, используется чаще всего. Величина $kx - \omega t$ и соответствующие ей величины в двух других выражениях называются фазой волны. Скорость волны v, называемую **фазовой скоростью**, поскольку она характеризует перемещение фазы волны, можно записать через ω и k:

$$v = \lambda f = (2\pi/k)(\omega/2\pi) = \omega/k. \tag{15.12}$$

Рассматривая волну, движущуюся вдоль оси x влево (в сторону уменьшения x), будем вновь исходить из формулы (15.9) и заметим, что при этом выбранная точка волнового профиля за время t изменяет свою координату на $-vt$; следовательно, в (15.9) координату x нужно заменить на $x + vt$. Таким образом, смещение волны, движущейся влево со скоростью v, запишется в виде

$$D = D_{\text{M}} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right] = \tag{15.13а}$$

$$= D_{\text{M}} \sin\left(2\pi x/\lambda + 2\pi t/T\right) = \tag{15.13б}$$

$$= D_{\text{M}} \sin(kx + \omega t). \tag{15.13в}$$

Иными словами, в (15.10) v заменяется на $-v$.

Посмотрим внимательнее на формулу (15.13в) [или 15.10в)]. При $t = 0$ мы имеем

$$D = D_{\mathrm{M}} \sin kx,$$

т. е. синусоидальный волновой профиль, с которого мы и начинали. Если взглянуть на волновой профиль в какой-то более поздний момент времени t_0, то получим

$$D = D_{\mathrm{M}} \sin(kx + \omega t_0).$$

Иными словами, если бы мы сфотографировали волну при $t = t_0$, то увидели бы синусоиду с фазовым сдвигом ωt_0. Таким образом, для данного момента времени $t = t_0$ волна имеет в пространстве синусоидальный профиль. Однако если мы рассмотрим фиксированную точку в пространстве, например $x = 0$, то увидим, как волна изменяется во времени:

$$D = D_{\mathrm{M}} \sin \omega t$$

[здесь мы использовали выражение (15.13в)]. А это в точности совпадает с выражением для гармонического колебания [см. формулу (14.6) в разд. 14.2]. При любом другом фиксированном значении x, скажем $x = x_0$, смещение имеет вид $D = D_{\mathrm{M}} \sin(\omega t + kx_0)$ и отличается только фазовым сдвигом kx_0. Таким образом, в любой фиксированной точке пространства смещение в волне совершает гармонические колебания. Формулы (15.10) и (15.13) объединяют оба этих свойства волнового движения и описывают *бегущую синусоидальную волну* (называемую также *гармонической волной*).

Рассмотрим теперь волну (или волновой импульс) произвольной формы. Если потери на трение малы, то волна, как показывает опыт, при своем распространении сохраняет форму. В таком случае можно применить те же рассуждения, которые приводятся сразу после формулы (15.9). Предположим, что профиль волны при $t = 0$ описывается функцией

$$D = f(x),$$

где D – смещение волны в точке x. Через некоторое время t, если волна движется вправо вдоль оси x, она, сохраняя ту же первоначальную форму, сместится вправо на расстояние vt, где v – фазовая скорость волны. Следовательно, мы должны заменить x на $x - vt$, чтобы получить смещение в момент времени t:

$$D = f(x - vt). \tag{15.14}$$

Если же волна движется влево, то x нужно заменить на $x + vt$, и тогда

$$D = f(x + vt). \tag{15.15}$$

Таким образом, любая волна, движущаяся вдоль оси x, должна описываться выражением вида (15.14) или (15.15), где функция f определяет форму или профиль волны.

Пример 15.4. Можно показать, что любая одномерная волна удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}, \qquad (15.16)$$

которое называется **волновым уравнением.** Здесь v – скорость волны. Величина $\partial^2 D/\partial t^2$ – это вторая производная от D по времени при постоянном значении x, а $\partial^2 D/\partial x^2$ – вторая производная от D по x при постоянном t. Эти производные называются частными и используются для функций двух и более переменных. а) Покажем, что синусоидальная волна (15.10в) удовлетворяет волновому уравнению. б) Покажем то же самое для волны общего вида (15.14).

Решение. а) Продифференцируем (15.10в) по времени t дважды:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\omega D_{\text{M}} \cos(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\omega^2 D_{\text{M}} \sin(kx - \omega t).$$

Первая и вторая производные по x запишутся соответственно в виде

$$\frac{\partial D}{\partial x} = k D_{\text{M}} \cos(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -k^2 D_{\text{M}} \sin(kx - \omega t).$$

Разделив вторые производные по времени на вторые производные по координате x, получим

$$\frac{\partial^2 D/\partial t^2}{\partial^2 D/\partial x^2} = \frac{-\omega^2 D_{\text{M}} \sin(kx - \omega t)}{-k^2 D_{\text{M}} \sin(kx - \omega t)} = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

Из выражения (15.12) имеем $\omega^2/k^2 = v^2$, так что (15.10) действительно удовлетворяет волновому уравнению (15.16).

б) Обозначим разность $x - vt$ через z. Тогда, если $D = f(x - vt) = f(z)$, используя правило дифференцирования по промежуточной переменной, находим

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(-v),$$

поскольку $\partial z/\partial t = -v$. Кроме того, мы имеем

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -v\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

поскольку $\partial z/\partial x = 1$. Вторая производная запишется в виде

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Поскольку $\partial^2 D/\partial t^2 = v^2(\partial^2 f/\partial z^2)$ и $\partial^2 D/\partial x^2 = \partial^2 f/\partial z^2$, мы приходим к волновому уравнению $\partial^2 D/\partial t^2 = v^2(\partial^2 D/\partial x^2)$.

Пример 15.5. Левому концу длинной горизонтальной натянутой струны сообщается простое гармоническое колебательное движение с частотой $f = 250$ Гц и амплитудой 2,6 см. Сила натяжения струны равна 140 Н, а линейная плотность струны $\mu = 0{,}12$ кг/м. При $t = 0$ конец струны смещен вверх на 1,6 см и движется вверх. Необходимо а) вычислить длину образующейся волны и б) написать выражение, описывающее бегущую волну.

Решение. а) Скорость волны равна $v = \sqrt{F_{\text{T}}/\mu} = \sqrt{(140\ \text{Н})/(0{,}12\ \text{кг/м})} = 34$ м/с. Тогда $\lambda = v/f = (34\ \text{м/с})/(250\ \text{Гц}) = 0{,}14\ \text{м} = 14$ см.

б) Пусть левый конец струны имеет координату $x = 0$. Фаза волны при $t = 0$, вообще говоря, не всегда равна нулю, как предполагалось в формулах (15.9) – (15.11) и (15.13). Волну, движущуюся вправо, можно записать в общем виде:

$$D = D_{\text{M}} \sin(kx - \omega t + \phi),$$

где ϕ – начальная фаза. В нашем случае амплитуда $D_{\text{M}} = 2{,}6$ см, а при $t = 0$ и $x = 0$ мы имеем $D = 1{,}6$ см. Следовательно,

$$1{,}6 = 2{,}6 \sin\phi,$$

откуда находим $\phi = 0{,}66$ рад $= 38°$. Кроме того, известно, что $\omega = 2\pi f = 1570\ \text{с}^{-1}$ и $k = 2\pi/\lambda = 45\ \text{м}^{-1}$. Таким образом, мы получаем следующее выражение для смещения в бегущей волне:

$$D = 0{,}026 \sin(45x - 1570t + 0{,}66),$$

где D и x измеряются в метрах, а t – в секундах.

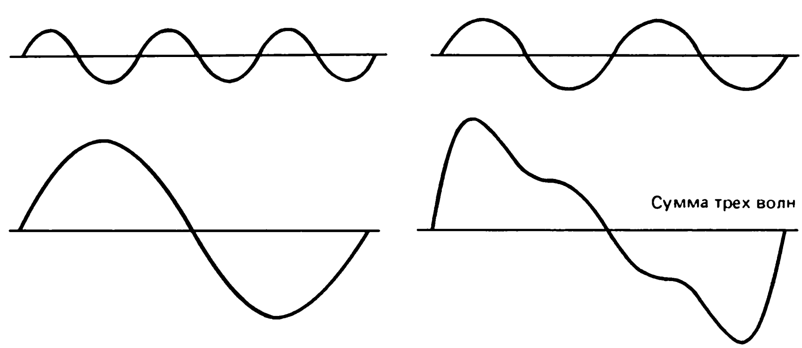
15.5. Принцип суперпозиции

Обнаружено, что, когда две или несколько волн одновременно проходят через одну и ту же область пространства, для многих типов волн *смещение равно векторной (или алгебраической) сумме смещений каждой из волн.* Это утверждение называется **принципом суперпозиции.** Он выполняется для механических волн в тех случаях, когда смещения не слишком велики и в колеблющейся среде сохраняется линейная зависимость между смещением и возвращающей силой[1]. Если же амплитуда механической волны настолько велика, что смещение, например, выходит за пределы области упругих деформаций среды и закон Гука перестает быть справедливым, то принцип суперпозиции нарушается[2]. Мы будем рассматривать главным образом системы, в которых принцип суперпозиции можно считать выполняющимся.

Одно из следствий принципа суперпозиции состоит в том, что волны, проходящие через какую-либо область пространства, продолжают двигаться независимо одна от другой. Возможно, вам приходилось наблюдать, как круги на воде (двумерные волны) от двух брошенных одновременно камней проходят один через другой.

Рис. 15.13. Принцип суперпозиции (одномерная волна). Результирующая волна образуется из трех волн синусоидального профиля с различными амплитудами и частотами (f_0, $2f_0$, $3f_0$). Амплитуда результирующей волны в любой точке пространства в данный момент времени равна алгебраической сумме амплитуд волновых компонент.

Принцип суперпозиции иллюстрируется на рис. 15.13. В этом случае мы имеем три волны (в натянутой струне) с различными амплитудами и частотами. В любой момент времени амплитуда волны представляет собой алгебраическую сумму амплитуд отдельных волн в этой точке в данный момент времени. Профиль волны уже не является простым синусоидальным; такая волна называется *сложной (или составной) волной.* (Для наглядности на рис. 15.13 амплитуды изображены в увеличенном масштабе.)



[1] Для электромагнитных волн в вакууме (гл. 33, т. 2 настоящей книги) принцип суперпозиции выполняется всегда.

[2] Примером нарушения принципа суперпозиции в электронике являются искажения в усилителях за счет внутренней модуляции, обусловленные тем, что колебания с различными частотами не складываются линейно.

Можно показать, что произвольный профиль волны можно представить в виде суммы простых синусоидальных волн с различными амплитудами, длинами волн и частотами. Такое представление известно как *теорема Фурье*. Сложная периодическая волна с периодом T может быть представлена в виде суммы синусоидальных волн с частотами, целыми кратными $f = 1/T$. Если волна не периодическая, то сумма превращается в интеграл, называемый интегралом Фурье. Это лишний раз подтверждает важность изучения синусоидальных волн и гармонических колебаний: ведь любой волновой профиль можно представить в виде суммы чисто синусоидальных волн.

Если возвращающая сила не совсем точно пропорциональна смещению, то скорость синусоидальной механической волны, распространяющейся в некоторой среде, будет зависеть от ее частоты. Это явление называется *дисперсией*. При этом синусоидальные волны, из которых составлена сложная волна, движутся с несколько различными скоростями. Отсюда следует, что профиль сложной волны по мере ее прохождения через такую диспергирующую среду будет меняться. Форма же чисто синусоидальной волны в этих условиях не изменяется, за исключением лишь того, что на нее будут оказывать влияние трение и другие диссипативные силы. Если же среда не обладает дисперсией и трение отсутствует, то даже сложная одномерная волна не будет испытывать искажений.

15.6. Отражение волн

Когда волна попадает на препятствие или доходит до границы среды, в которой она распространяется, она (по крайней мере частично) отражается. Вам, возможно, приходилось наблюдать отражение волн от скалы в море или от бортика плавательного бассейна. Вы могли услышать при этом эхо – звук, отраженный от удаленного препятствия.

На рис. 15.14 показано отражение волнового импульса, пробегающего по веревке. Проделайте этот опыт сами, и вы убедитесь, что импульс, отражаясь, переворачивается, если конец веревки закреплен (рис. 15.14, *а*), и не переворачивается, если ее конец свободен. В случае когда конец веревки закреплен в каком-либо основании (рис. 15.14, *а*), импульс, дойдя до закрепленного конца, действует на основание с силой, направленной вверх. В соответствии с третьим законом Ньютона основание действует на веревку с равной по величине и противоположной по направлению силой. Эта направленная вниз сила и «создает» перевернутый отраженный импульс. Принято говорить, что отраженный импульс меняет фазу на 180°.

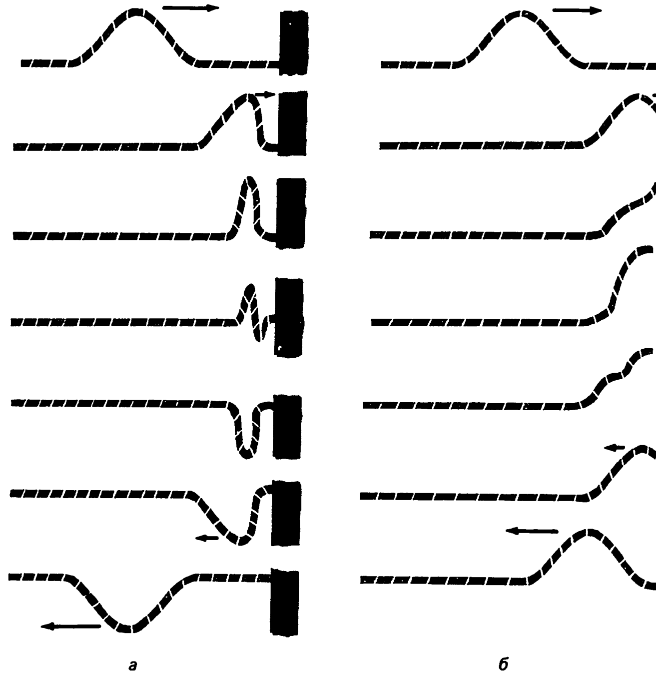


Рис. 15.14. **Отражение волнового импульса, распространяющегося по шнуру, от закрепленного** (*а*) **и незакрепленного** (*б*) **концов шнура.**

(«Переворот» импульса эквивалентен потере полуволны $\lambda/2$, или сдвигу фазы на $180°$; там, где был гребень волны, будет впадина, и наоборот). Таким образом, если конец веревки закреплен, то отраженная волна будет отличаться по фазе на $180°$ от падающей волны. На рис. 15.14, *б* конец веревки свободен; он не связан ни с основанием, ни с продолжением веревки. Поэтому, когда до него дойдет волновой импульс, конец веревки «перелетит»: смещение этого конца будет больше, чем когда импульс проходит, скажем, в середине веревки. Свободный конец потянет за собой и всю веревку, благодаря чему возникнет отраженный импульс, но теперь уже не перевернутый (фаза не изменяется).

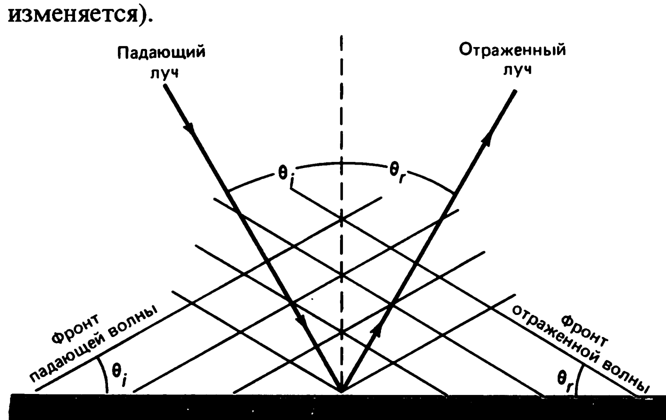


Рис. 15.15. **Закон отражения.**

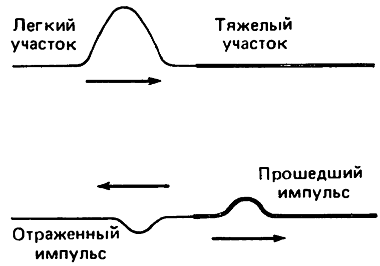


Рис. 15.16. Когда волновой импульс встречает на своем пути неоднородность, он частично отражается, а частично проходит.

Для двух- и трехмерных волн, таких, как волны на воде, удобно ввести понятие **волнового фронта**. Волновой фронт определяется как линия или поверхность, все точки которой имеют одну и ту же фазу. Линия, проведенная перпендикулярно волновому фронту в направлении распространения волны, называется *лучом*. Как показано на рис. 15.15, угол, который составляет с отражающей поверхностью приходящая, или *падающая*, волна, равен углу, под которым уходит от поверхности отраженная волна. Иными словами, *угол отражения равен углу падения*; угол падения определяется как угол, который составляет с перпендикуляром к поверхности падающий луч (или угол между волновым фронтом и касательной к нему); аналогично определяется и угол отражения, но только по отношению к отраженному лучу.

Когда волновой импульс на рис. 15.14, *а* достигает опоры (стены), отражается не вся энергия. Часть ее передается стене, где она частично переходит в тепловую энергию, а частично продолжает распространяться в виде волны в самой стене, т.е. в материале, из которого изготовлена стена. Возможно, это легче понять, если рассмотреть импульс, бегущий по веревке, которая состоит из двух частей: легкой и тяжелой (рис. 15.16). Когда волна достигает границы между участками, она частично отражается, а частично проходит дальше, как показано на рис. 15.16. Чем массивнее второй участок веревки, тем меньшая доля энергии приходится на прошедшую волну; если же «массивный участок» превращается в стену, то энергия прошедшей волны очень мала. В случае когда линейная плотность второго участка больше, чем первого, отраженный импульс меняет фазу на 180°; если же линейная плотность второго участка меньше, то фаза отраженного импульса не меняется.

15.7. Преломление

Когда волна падает на границу двух сред, часть ее энергии отражается, а часть поглощается или пропускается. Если двух- или трехмерная волна, распространяющаяся в одной среде, переходит через границу раздела в среду, где ее скорость иная, то прошедшая волна может начать дви-

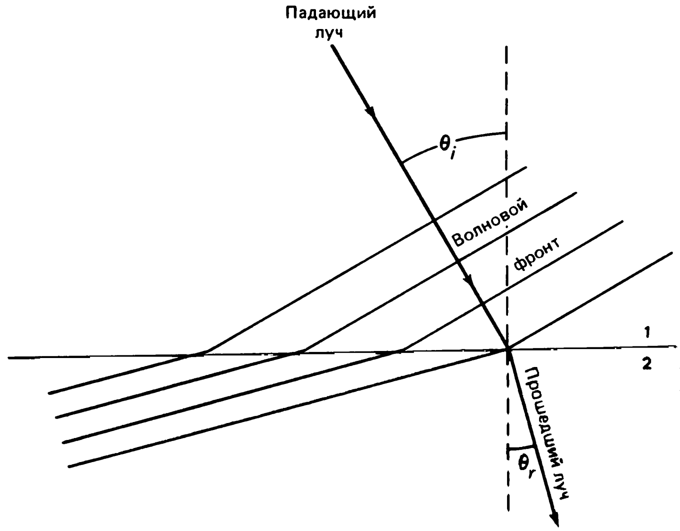


Рис. 15.17. **Преломление волн на границе раздела двух сред.**

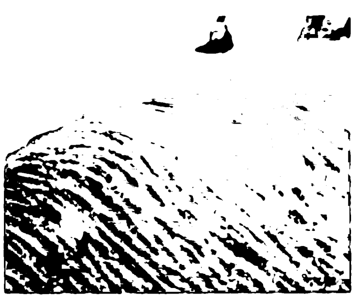


Рис. 15.18. **Преломление (рефракция) волн на воде. (Фото помещено с любезного разрешения U.S. Air Force, Cambridge Research Laboratories.)**

гаться в другом направлении чем падающая (рис. 15.17). Это явление называется **преломлением** (или **рефракцией**). Примером этого служат волны на воде; на мелководье скорость волны уменьшается и происходит преломление волн (рис. 15.18). На рис. 15.17 скорость волны в среде 2 меньше, чем в среде 1. В этом случае направление движения волны изменяется так, что она движется почти перпендикулярно границе раздела. Иными словами, угол преломления θ_r меньше угла падения θ_i. Чтобы объяснить, почему так происходит, представим себе каждый фронт волны как ряд солдат, идущих строем. Строй солдат пересекает границу между твердым грунтом (среда 1) и болотом (среда 2), так что скорость их движения, естественно, уменьшается. Солдаты, первыми подошедшие к болоту, первыми и замедлят шаг, так что ряды их изогнутся, как показано на рис. 15.19, *а*. Рассмотрим волновой фронт (или строй солдат), обозначенный на рис. 15.19, *б* буквой *A*. За одно и то же время t точка A_1 пройдет расстояние $l_1 = v_1 t$, а точка A_2 – расстояние $l_2 = v_2 t$. Два треугольника, показанные на рисунке, имеют общую сторону, обозначенную через a. Таким образом, мы имеем

$$\sin\theta_1 = l_1/a = v_1 t/a$$

и

$$\sin\theta_2 = l_2/a = v_2 t/a.$$

Разделив эти два выражения одно на другое, получим

$$\sin\theta_2/\sin\theta_1 = v_2/v_1; \qquad (15.17)$$

здесь θ_1 – угол падения (θ_i), а θ_2 – угол преломления (θ_r). Таким образом, выражение (15.17) устанавливает связь

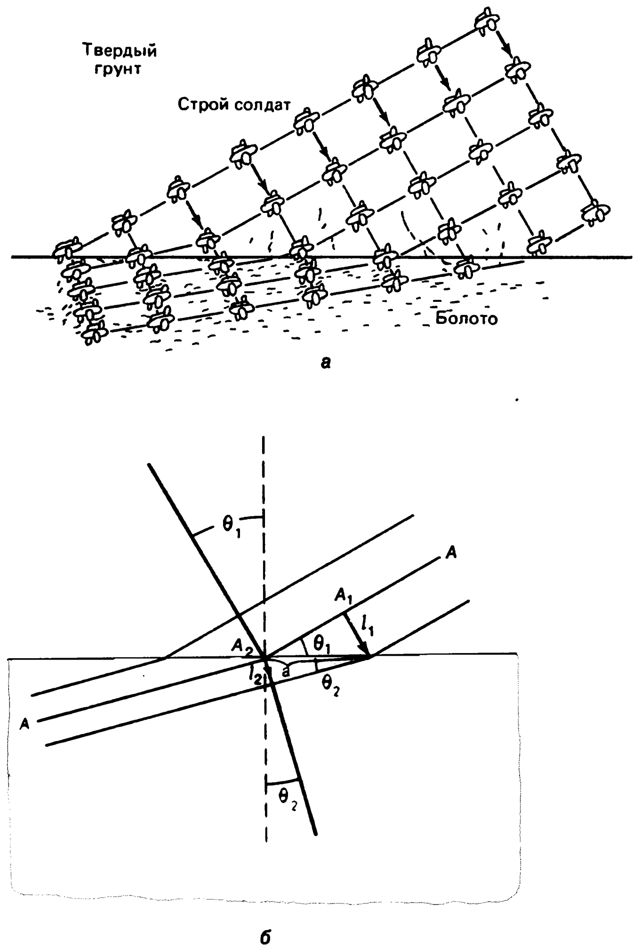


Рис. 15.19. *а* – движение строя солдат; *б* – к выводу закона преломления волн.

между углом падения и углом преломления. Разумеется, если бы волна распространялась в противоположном направлении, то наши рассуждения остались бы неизменными; только теперь углы θ_1 и θ_2 поменялись бы ролями: угол θ_2 был бы углом падения, а θ_1 – углом преломления. Ясно, что, если волна переходит в среду, где ее скорость больше, она отклоняется в противоположном направлении: $\theta_r > \theta_i$. Из (15.17) мы видим, что, чем больше скорость волны в среде, тем больше угол преломления и наоборот.

Сейсмические волны преломляются в глубинах Земли, когда они распространяются через породы с различными плотностями (и, следовательно, с различными скоростями). Преломляются волны на воде, а также световые волны; при изучении распространения света нам очень пригодится формула (15.17).

Пример 15.6. Сейсмическая P-волна проходит через границу между породами, где ее скорость увеличивается с 6,5 до 8,0 км/с. Чему равен угол преломления, если волна падает на границу под углом 30°?

Решение. Поскольку $\sin 30° = 0{,}50$, формула (15.17) дает

$$\sin \theta_2 = \frac{8{,}0 \text{ м/с}}{6{,}5 \text{ м/с}}(0{,}50) = 0{,}62,$$

откуда находим $\theta_2 = 38°$.

15.8. Интерференция

Интерференцией называется явление, которое имеет место, когда две волны в один и тот же момент времени проходят через одну и ту же область пространства; это один из примеров, когда действует принцип суперпозиции[1]. Рассмотрим, например, два волновых импульса, распространяющихся по веревке навстречу друг другу, как показано на рис. 15.20. На рис. 15.20, *а* оба импульса имеют одинаковые амплитуды, но один представляет собой гребень, а другой – впадину; на рис. 15.20, *б* оба импульса являются гребнями. В обоих случаях они встречаются и проходят дальше, каждый сам по себе. Однако, когда они перекрываются, результирующее смещение в каждой точке равно алгебраической сумме их отдельных смещений, как это следует из принципа суперпозиции. На рис. 15.20, *а* смещения направлены противоположно друг другу, и происходит **гасящая (деструктивная) интерференция**. Показанная же на рис. 15.20, *б* интерференция называется **усиливающей (конструктивной) интерференцией**[2].

Круговые волны, расходящиеся от двух брошенных

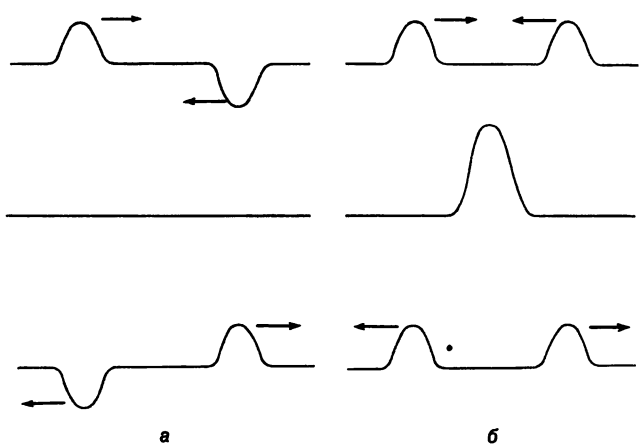
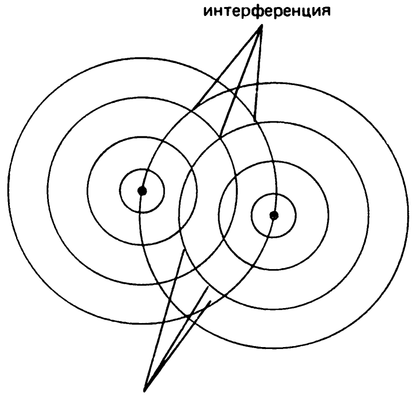


Рис. 15.20. Два волновых импульса, распространяющихся навстречу друг другу. В том месте, где импульсы перекрываются, происходит интерференция. *а* – гасящая интерференция; *б* – усиливающая интерференция.

[1] Здесь следует заметить, что необходимым условием интерференции является *когерентность* складывающихся волн, т. е. постоянство сдвига фаз в любой точке.– *Прим. ред.*

[2] Гасящую и усиливающую интерференцию называют также интерференцией соответственно с ослаблением и усилением.– *Прим. ред.*

а



б

Рис. 15.21. **Интерференция волн на воде.**

одновременно в воду камней, интерферируют, как показано на рис. 15.21. В некоторых местах гребни одной волны встречаются с гребнями другой (а впадины – с впадинами) и происходит усиливающая интерференция: частицы воды колеблются вверх-вниз с большей амплитудой, чем в каждой из волн в отдельности. В других областях происходит гасящая интерференция и вода вообще не движется; это имеет место там, где гребни одной волны встречаются с впадинами другой. В первом случае (при усиливающей интерференции) интерферирующие волны находятся *в фазе*; при гасящей же интерференции они находятся в *противофазе*, т. е. различаются на половину длины волны, или на 180°. Разумеется, разность

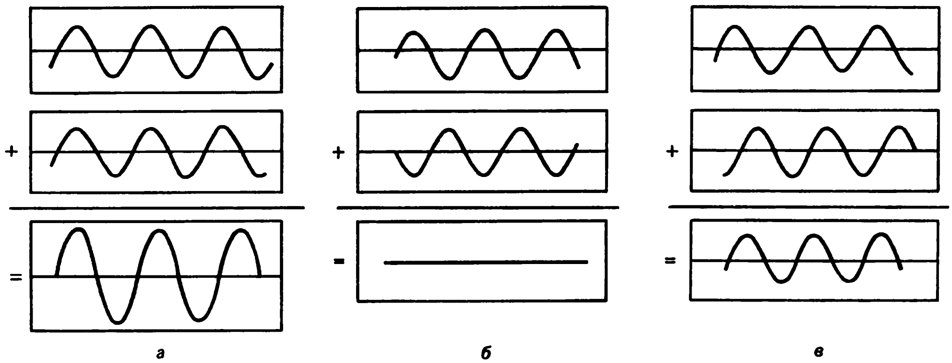


Рис. 15.22. **Интерференция двух волн.** *а* – усиливающая; *б* – гасящая; *в* – частично гасящая.

фаз в большинстве случаев оказывается где-то между этими двумя предельными случаями, и интерференция тогда называется интерференцией с частичным ослаблением. Все три этих случая проиллюстрированы на рис. 15.22, на котором показана зависимость амплитуды от времени для данной точки пространства. Мы рассмотрим интерференцию более подробно в т. 2, где будут изучаться звуковые и световые волны.

15.9. Дифракция

Еще одно важное явление, связанное с волновым движением, называется **дифракцией**. Здесь мы будем говорить лишь о качественной стороне дифракции (математическое описание мы дадим, когда будем изучать свет). Под дифракцией понимают способность волн огибать встречающиеся на их пути препятствия и заходить в область позади них, что иллюстрируется на рис. 15.23 для волн на воде.

Дифракция зависит от соотношения между длиной волны и размерами препятствия. Это иллюстрируется на рис. 15.24. Если длина волны много больше размеров препятствия (например, для листьев осоки на рис. 15.24, *а*), то волна проходит так, как если бы его вовсе не было. За более крупными препятствиями (рис. 15.24, *б* и *в*) существует область тени. Заметим, однако, что на рис. 15.24, *г*, где препятствие такое же, как и на рис. 15.24, *в*, но длина волны больше, дифракция волны в область тени сильнее. Следует запомнить правило, что значительная область тени будет лишь в том случае, когда длина волны меньше размеров препятствия.

Необходимо заметить, что это правило относится и к *отражению* волны от препятствия. На рис. 15.24, *а* и *б* отражается очень малая часть волны. Лишь когда длина волны меньше размеров препятствия, как на рис. 15.24, *в*, отражение будет существенным (на рисунке это, впрочем, не показано).

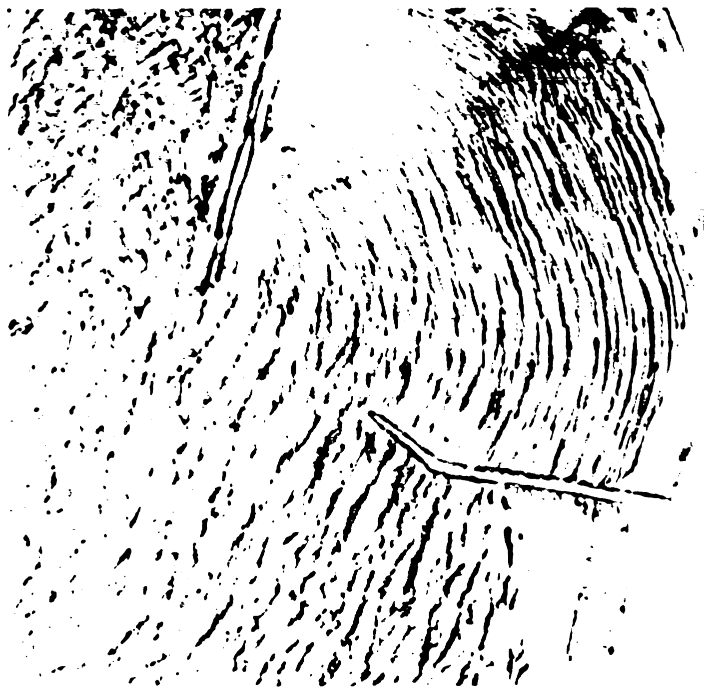


Рис. 15.23. Дифракция волн. (Из книги: *Wiegel R. L.*, Oceanographical Engineering.– Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.)

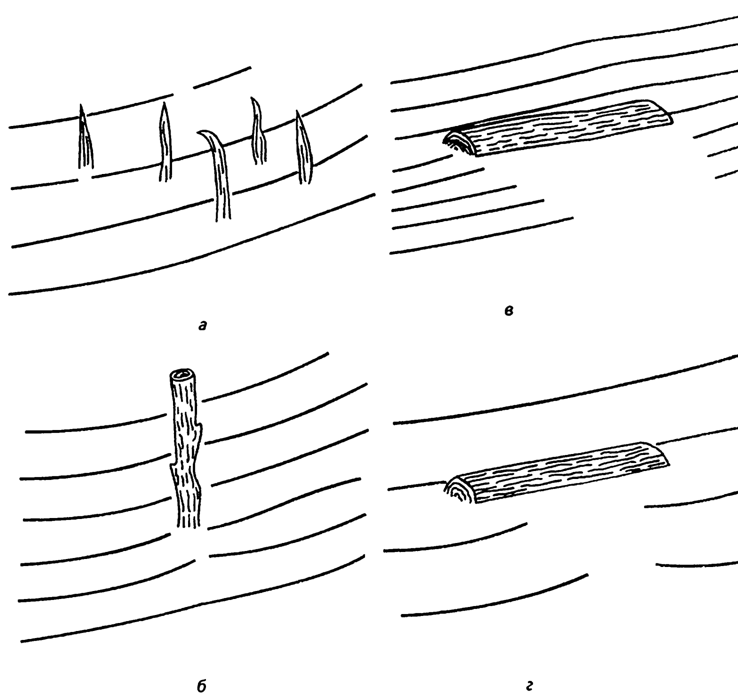


Рис. 15.24. Волны на воде при наличии препятствий различных размеров. Чем больше длина волны по сравнению с размером препятствия, тем сильнее выражена дифракция в области «тени». *а* – листья осоки; *б* – палка, торчащая из воды; *в* – плавающее бревно (малая длина волны); *г* – плавающее бревно (большая длина волны).

Способность волн огибать препятствия и переносить энергию в области, лежащие за препятствием, отличает их от частиц вещества, переносящих энергию. Приведем такой пример: стоя за забором, вы не рискуете получить удар бейсбольным мячом, брошенным с другой стороны, крики же болельщиков и другие звуки вам хорошо слышны, так как звуковые волны огибают забор, или, как говорят, дифрагируют на краю препятствия.

Как интерференция, так и дифракция – это свойства волн, а не материальных тел. Подобное различие между энергией, переносимой волнами, и энергией, переносимой частицами вещества, оказалось очень важным для понимания природы света и вещества, как мы увидим в последующих главах (см. т. 2 настоящей книги).

15.10. Стоячие волны; резонанс

Если раскачивать один конец веревки, когда другой ее конец закреплен, то к закрепленному концу побежит непрерывная волна, которая затем отразится назад. Если продолжить качания, то возникнут волны, распространяющиеся в обоих направлениях, причем падающая волна будет интерферировать с отраженной. Как правило, при этом возникает полный беспорядок. Однако если раскачивать конец веревки с правильно подобранной частотой, то интерференция падающей и отраженной волн приведет к возникновению **стоячей волны** со значительной амплитудой (рис. 15.25). Стоячей эта волна называется потому, что она выглядит неподвижной. Точки гасящей интерференции, называемые **узлами**, и точки усиливающей интерференции, называемые **пучностями**, не изменяют своих положений. Стоячие волны возникают не только на одной частоте. При самой низкой из частот, возбуждающих стоячую волну, получается картина, изображенная на рис. 15.25, *а*. Стоячие волны, показанные на рис. 15.25, *б* и *в*, возникают на частотах, равных в точности удвоенной и утроенной низшей частоте, при условии что натяжение веревки остается постоянным. Если частота вчетверо

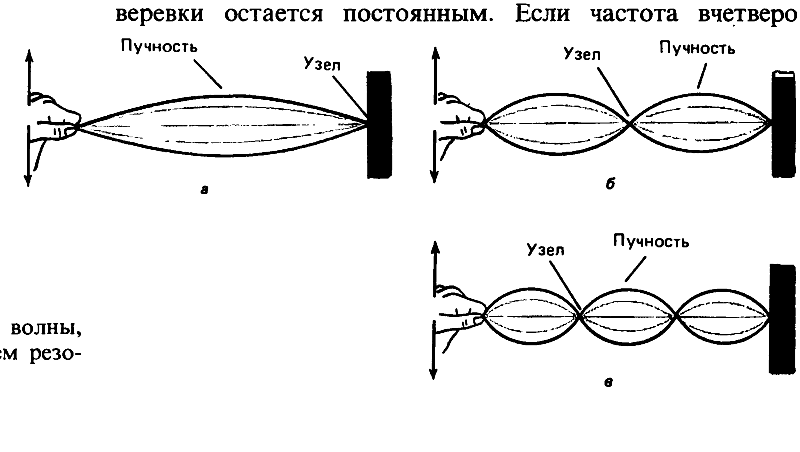


Рис. 15.25. Стоячие волны, соответствующие трем резонансным частотам.

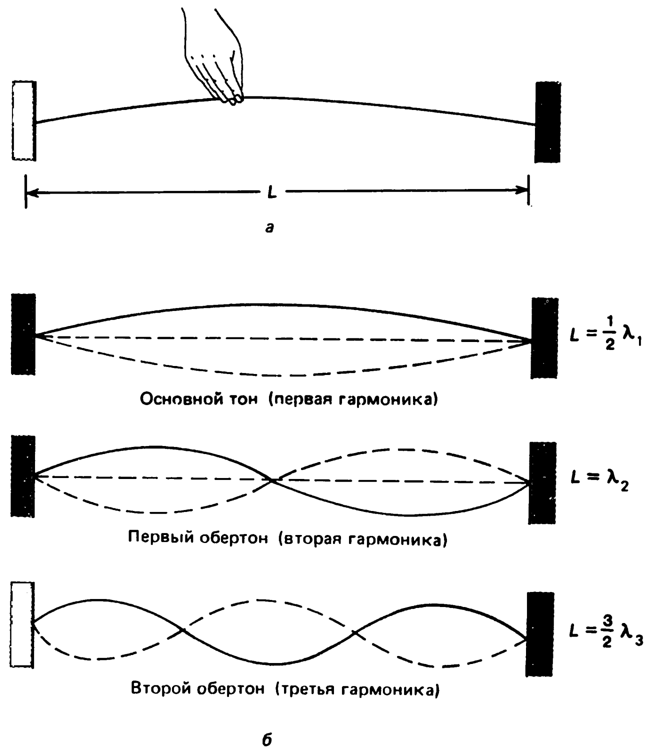


Рис. 15.26. *а* – **возбуждение струны; *б* – лишь стоячие волны, соответствующие резонансным частотам, могут существовать долго.**

выше, то стоячая волна будет иметь четыре пучности и т. д.

Частоты, на которых возникают стоячие волны, называются **собственными** или **резонансными частотами**, а различные картины колебаний, показанные на рис. 15.25, это различные резонансные моды колебаний. Хотя стоячая волна является результатом интерференции двух волн, движущихся в противоположных направлениях, она оказывается также примером резонансных колебаний тела. Когда в веревке образуется стоячая волна, на частотах, на которых имеет место резонанс, не требуется больших усилий, чтобы поддерживать колебания со значительной амплитудой. Таким образом, стоячие волны относятся к тому же типу явлений, что и резонансные колебания груза на пружине или маятника, обсуждавшиеся в предыдущей главе. Единственная разница в том, что пружина и маятник имеют одну резонансную частоту, в то время как у натянутой веревки бесконечно много резонансных частот, каждая из которых кратна низшей резонансной частоте.

Рассмотрим теперь гитарную или скрипичную струну, натянутую между двумя опорами (рис. 15.26, *а*). Когда струну оттягивают и отпускают, в ней возбуждаются волны с самыми различными частотами[1]. Волны движутся по струне в обоих направлениях, отражаются на концах и меняют направление своего движения. Большинство возбужденных волн интерферируют друг с другом случайным образом и быстро затухают. Длительное время сохраняются только те волны, которые соответствуют резонансным частотам струны. На концах струны, поскольку они закреплены, будут узлы колебаний (на струне могут быть и другие узлы). Некоторые возможные резонансные моды колебаний (стоячие волны) показаны на рис. 15.26, *б*. Вообще говоря, колебательное движение будет представлять собой комбинацию этих различных резонансных мод, но лишь на тех частотах, которые соответствуют резонансной частоте.

Для того чтобы найти резонансные частоты, заметим сначала, что длины стоячих волн связаны с длиной L струны простым соотношением. Низшая частота – **основная мода**, или **первая гармоника**[2], соответствует единственной пучности на струне, и, как видно из рис. 15.26, *б*, длина струны L равна половине длины волны, т. е. $L = \lambda_1/2$, где λ_1 – длина волны основной моды. Следующая мода колебаний соответствует двум пучностям и называется **второй гармоникой**; в этом случае $L = \lambda_2$. Для третьей и четвертой гармоник мы имеем соответственно $L = (3/2)\lambda_3$ и $L = 2\lambda_4$ и т. п. В общем случае мы можем написать

$$L = n\lambda_n/2, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Целое число n обозначает номер гармоники: $n = 1$ соответствует основной моде, $n = 2$ – второй гармонике и т. д. Вторая гармоника называется также первым *обертоном*, третья гармоника – вторым обертоном и т. д. Таким образом, мы имеем

$$\lambda_n = 2L/n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15.18}$$

Чтобы определить частоту колебаний f, воспользуемся формулой (15.1), согласно которой $f = v/\lambda$.

Поскольку стоячая волна эквивалентна двум бѐгущим волнам, движущимся в противоположных направлениях, понятие скорости сохраняет смысл; скорость волны в струне можно выразить с помощью (15.2) через натяжение струны F_T и линейную плотность μ: $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

---

[1] Фурье-анализ (разд. 15.5) показывает, что импульс треугольной формы на рис. 15.26, *а* можно рассматривать как сумму синусоидальных волн с различными частотами.

[2] Термин «гармоника» пришел из музыки, поскольку звуки с целыми кратными частотами являются гармоничными, т. е. созвучными.

Пример 15.7. Рояльная струна имеет длину 1,10 м и массу 9,0 г. а) С какой силой должна быть натянута струна, чтобы основная частота (частота основного тона) была равна 131 Гц? б) Чему равны частоты первых четырех гармоник?

Решение. а) Длина волны основной моды равна $\lambda = 2L = 2{,}20$ м [формула (15.18)]. При этом скорость бегущей волны $v = \lambda f = (2{,}20\ \text{м})(131\ \text{с}^{-1}) = 288$ м/с. Таким образом, из (15.2) имеем

$$F_{\text{T}} = \mu v^2 = \left(\frac{0{,}0090\ \text{кг}}{1{,}10\ \text{м}}\right)(288\ \text{м/с})^2 = 679\ \text{Н}.$$

б) Частоты второй, третьей и четвертой гармоник в 2, 3 и 4 раза выше основной частоты и равны соответственно 262, 393 и 524 Гц.

В разд. 15.4 мы узнали, как представить смещение D одномерной бегущей волны в виде функции координаты x и времени t. То же самое можно сделать и для стоячей волны на струне. Как уже упоминалось, стоячую волну можно представить в виде суммы двух бегущих волн, которые движутся навстречу друг другу. Для каждой из них можно записать [см. выражения (15.10в) и (15.13в)]

$$D_1 = D_{\text{М}} \sin(kx - \omega t), \qquad D_2 = D_{\text{М}} \sin(kx + \omega t),$$

поскольку мы предполагаем, что затухание отсутствует и, следовательно, амплитуды, а также частоты и длины волн у этих двух волн одинаковы. Сумма этих двух бегущих волн, образующих стоячую волну, дается выражением

$$D = D_1 + D_2 = D_{\text{М}}[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)].$$

Пользуясь тригонометрическим тождеством для суммы синусов двух углов: $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin[{}^1/_2(\theta_1 + \theta_2)] \times \cos[{}^1/_2(\theta_2 - \theta_1)]$, последнее выражение можно переписать в виде

$$D = 2D_{\text{М}} \sin kx \quad \cos\omega t. \tag{15.19}$$

Полагая $x = 0$ для левого конца струны, для правого конца мы имеем $x = L$, где L – длина струны. А поскольку концы струны закреплены, $D = 0$ при $x = 0$ и при $x = L$. Выражение (15.19) уже удовлетворяет первому условию ($D = 0$ при $x = 0$), второе же условие будет выполнено, если

$$kL = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ n\pi,\ \ldots,$$

где n – целое число, или, поскольку $k = 2\pi/\lambda$,

$$\lambda = 2L/n \qquad (n\ \text{целое}).$$

Таким образом, мы вновь пришли к формуле (15.18).

Формула (15.19) вместе с условием $\lambda = 2L/n$ является математической записью стоячей волны. Мы видим, что частица в любой точке x совершает гармонические колебания (поскольку в формуле имеется $\cos\omega t$). Все частицы струны колеблются с одной и той же частотой $f = \omega/2\pi$, причем амплитуда зависит от x и равна $2D_M \sin kx$. (Сравните это со случаем бегущей волны, в которой все частицы колеблются с одинаковыми амплитудами.) При $kx = \pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ и т.д. амплитуда имеет максимум, равный $2D_M$. Иными словами, максимум амплитуды соответствует точкам

$$x = \lambda/4,\ 3\lambda/4,\ 5\lambda/4,\ \ldots,$$

которые, очевидно, представляют собой не что иное, как положения пучностей (см. рис. 15.26).

Стоячая волна действительно кажется неподвижной, в то время как бегущая волна совершает видимое движение вперед. Название «стоячая» волна соответствует также и тому, что происходит в этом случае с энергией. Поскольку в узлах частицы струны покоятся, через них не переносится энергия. Следовательно, энергия как бы «стоит» на месте и не переносится вдоль струны.

Стоячие волны возбуждаются не только в струнах, но и в любых телах, способных совершать колебания. Даже ударив молотком по камню или доске, мы возбуждаем в них стоячие волны, соответствующие собственным резонансным частотам данного тела. Резонансные частоты зависят от размеров тела точно так же, как резонансные колебания струны зависят от ее длины. Например, собственные частоты небольшого тела не могут быть такими же низкими, как собственные частоты больших тел. Во всех музыкальных инструментах звуки образуются благодаря стоячим волнам в струнах у струнных, в столбах воздуха у духовых, в барабанах и других ударных. Более обстоятельно мы разберемся в этом в следующей главе.

Заключение

Колеблющиеся тела представляют собой источники волн, распространяющихся от источника во внешнюю среду. Примерами этого являются волны на воде и на струне. Волна может представлять собой *импульс* (единичный гребень), а может быть *непрерывной* (т.е. состоять из многих гребней и впадин). *Длина волны* – это расстояние между двумя соседними гребнями (или вообще между двумя любыми колеблющимися в одной фазе точками волнового профиля). *Частота* – это число гребней, проходящих через данную точку за единицу времени. *Скорость волны* (т.е. скорость, с которой перемещается гребень или любая другая точка волны) определяется как произведение длины волны на частоту: $v = \lambda f$. *Амплитуда волны* – это максимальная высота гребня или глубина впадины относительно среднего (или равновесного) уровня.

В *поперечной волне* колебания происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны; примером этого является волна, бегущая по струне. В *продольной волне* колебания происходят параллельно направлению движения волны; звук – это пример продольной волны. Скорость как поперечной, так и продольной волн в среде пропорциональна корню квадратному из отношения величины упругой силы к величине инертности (или плотности) среды.

Волны переносят энергию из одной области пространства в другую, не перенося при этом вещество. Энергия, переносимая волной, мощность (энергия, переносимая за единицу времени) и *интенсивность* (энергия, переносимая через единичную площадь поверхности за единицу времени) пропорциональны квадрату амплитуды волны. Для волны, распространяющейся в трех измерениях от точечного источника, интенсивность (если пренебречь затуханием энергии) убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника, а амплитуда линейно убывает с расстоянием.

Одномерная поперечная волна, бегущая вправо вдоль оси x, может быть записана в виде функции от координаты и времени: $D = D_M \sin[(2\pi/\lambda)(x - vt)] = D_M \sin(kx - \omega t)$, где $k = 2\pi/\lambda$ и $\omega = 2\pi f$. Если волна движется в противоположном направлении, то $D = D_M \sin(kx + \omega t)$.

Когда две или больше волн проходят через одно и то же место в пространстве в одно и то же время, то смещение в любой данной точке равно векторной сумме смещений каждой из волн. Это называется *принципом суперпозиции*. Принцип суперпозиции справедлив для механических волн в том случае, когда амплитуды волн не настолько велики, чтобы нарушалась пропорциональность между смещением и величиной возвращающей силы.

Волны отражаются от препятствий. Когда *волновой фронт* двух- или трехмерной волны встречает на своем пути препятствие, угол отражения равен углу падения. Волна, падающая на границу двух сред, в которых она может распространяться, частично отражается, а частично переходит из одной среды в другую. Фронт прошедшей волны испытывает *преломление* или изгиб. Углы, которые фронты падающей и преломленной волн составляют с границей раздела двух сред, связаны со скоростями распространения волны в каждой из сред соотношением $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = v_1/v_2$. Когда две когерентные волны в одно и то же время проходят через одну и ту же область пространства, они *интерферируют*. В силу принципа суперпозиции результирующее смещение в каждой точке равно векторной сумме смещений каждой из волн; в зависимости от соотношения фаз и амплитуд двух волн интерференция может быть *усиливающей (конструктивной)*, *гасящей (деструктивной)* или промежуточной. Способность волн огибать препятствия и заходить в область «тени» называется *дифракцией*. Чем меньше длина волны по сравнению с размерами препятствия, тем слабее проявляется дифракция.

Волны, бегущие по струне (или в другом теле) постоянной длины, интерферируют с волнами, отраженными от границ и идущими во встречном направлении. На некоторых частотах при этом образуются *стоячие волны*. Струна (или другое тело) колеблется как единое целое. Образование стоячих волн является резонансным явлением и происходит на *резонансных* или *собственных частотах* тела. Точки гасящей интерференции (в них отсутствуют колебания) называются *узлами*, а точки усиливающей интерференции (максимальная амплитуда колебаний) – *пучностями*.

Вопросы

1. Равна ли частота простой периодической волны частоте возбуждающих ее колебаний? Почему?
2. Объясните различие между скоростью поперечной волны, бегущей по веревке, и скоростью частиц на малом участке веревки.
3. Почему басовые струны фортепиано имеют навивку из проволоки?
4. Волны какого типа будут возбуждены в горизонтальном металлическом стержне, если ударить по его концу молотком а) сбоку; б) в торец?
5. Плотность воздуха уменьшается с повышением температуры, а модуль всестороннего сжатия B почти не зависит от температуры. Как должна изменяться с температурой скорость звука в воздухе?
6. Два сплошных стержня имеют одинаковые модули всестороннего сжатия, но плотность одного вдвое больше плотности другого. В каком стержне скорость продольных волн больше и во сколько раз?
7. Приведите дополнительные примеры одно-, двух- и трехмерных волн.
8. Скорость звука в твердых телах обычно в несколько раз выше, чем в воздухе, плотность же твердых тел в 10^3-10^4 раз больше. Объясните.
9. Назовите две причины, которые обусловливают уменьшение амплитуды волн на воде по мере их удаления от источника.
10. Две одномерные волны имеют одинаковые амплитуды, а в остальном они идентичны, за исключением лишь того, что длина волны одной в два раза больше, чем другой. Которая из них переносит большую энергию? Во сколько раз?
11. Оказывается, что интенсивность звука убывает не в точности обратно пропорционально квадрату расстояния до источника, как это следует из (15.8). Почему?
12. Любая ли функция от величины $x - vt$ [см. выражение (15.14)] будет описывать волновое движение? Объясните. Если не любая, то проиллюстрируйте это примером.
13. Когда синусоидальная волна пересекает границу между двумя участками веревки на рис. 15.16, частота не изменяется, хотя меняются длина волны и скорость. Объясните.
14. Если синусоидальная волна при отражении от границы между участками веревки на рис. 15.16 переворачивается, то какой будет длина прошедшей волны – больше или меньше длины падающей волны?
15. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн? Объясните.
16. Если известно, что из одной области в другую переносится энергия, то как определить, переносится ли она волнами или частицами вещества?
17. Средневолновую радиостанцию, находящуюся за горой, обычно удается принимать, а станцию УКВ-диапазона нет. Иными словами, средние волны огибают гору, а ультракороткие не огибают. Объясните. (Радиосигналы переносятся электромагнитными волнами, длина волны которых в средневолновом диапазоне составляет обычно 200–600 м, а в УКВ-диапазоне – около 3 м.)
18. Если колеблющаяся струна имеет три пучности, можно ли где-либо прикоснуться к ней ножом, не нарушая ее движения?
19. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно погашаются. Означает ли это, что исчезает энергия?
20. Почему вы можете заставить воду плескаться в тазу, только если вы покачиваете его с некоторой определенной частотой?
21. Может ли амплитуда стоячих волн на рис. 15.25 быть больше, чем амплитуда возбуждающих их колебаний (например, движения руки или механического вибратора)?
22. Когда колебания передаются шнуру на рис. 15.25 рукой или механическим вибратором, «узлы» стоячей волны не являются в

строгом смысле узлами (абсолютно неподвижными точками). Объясните. (*Подсказка*: учтите затухание и передачу энергии от руки или вибратора.)

Задачи

Раздел 15.1

1. (I) Рыбак заметил, что гребни волн проходят мимо носа стоящей на якоре лодки каждые 5 с. Расстояние между гребнями он оценивает в 15 м. С какой скоростью движутся волны?

2. (I) Частоты средневолнового диапазона находятся в интервале 550–1600 кГц (килогерц); радиоволны (электромагнитные волны) распространяются со скоростью $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. Чему равны соответствующие этому диапазону длины волн? Чему равны длины волн УКВ-диапазона, частоты которого занимают интервал 88–108 МГц?

3. (I) Веревка массой 0,85 кг натянута между двумя опорами, находящимися на расстоянии 30 м друг от друга. Пусть сила натяжения веревки равна 1950 Н. Сколько времени идет импульс от одной опоры до другой?

4. (II) Веревка массой 0,40 кг натянута между двумя опорами, находящимися на расстоянии 4,8 м. Когда по одной опоре ударяют молотком, в веревке возбуждается поперечная волна, которая доходит до второй опоры через 0,85 с. Чему равна сила натяжения веревки?

5. (II) В канавке грампластинки, вращающейся со скоростью 33 об/мин, на расстоянии 12,5 см от центра «бугорки» идут с интервалом 2,45 мм. Чему равна частота записанного в этом месте звука?

6. На рис. 15.27 показан профиль волны, которая распространяется по струне вправо со скоростью 1,20 м/с. а) Изобразите профиль волны через 1,20 с и покажите стрелками, какие точки идут вниз, а какие – вверх. б) Чему равна скорость точки A на струне в вертикальном направлении в момент времени, зафиксированный на рисунке?

Раздел 15.2

7. (I) Вычислите скорость продольных волн а) в воде; б) в граните.

8. (I) Найдите длину звуковой волны с частотой 7000 Гц, распространяющейся вдоль железного стержня.

9. (II) Моряк в трюме ударяет по борту корабля чуть ниже уровня воды. Эхо (волна, отраженная от дна моря) приходит ровно через 2,1 с. Чему равна глубина моря в этом месте?

10. (II) Сейсмические S- и P-волны распространяются с различными скоростями, и это позволяет определять положение очага землетрясения. а) Считая скорости P- и S-волн равными соответственно 9,0 и 5,0 км/с, определите расстояние до очага землетрясения от сейсмической станции, которая зарегистрировала приход этих волн с интервалом 2,0 мин. б) Достаточно ли данных одной станции для определения положения (координат) очага землетрясения? Объясните.

11. (II) Однородная веревка массой m и длиной L подвешена вертикально. а) Покажите, что скорость поперечных волн в этой веревке равна $\sqrt{gh}$, где h – высота от нижнего конца. б) Сколько времени идет волновой импульс от нижнего конца до верхнего?

Раздел 15.3

12. (I) В одном и том же участке земной коры две сейсмические волны имеют одну и ту же частоту, но энергия одной вдвое больше, чем другой. Каково отношение амплитуд этих двух волн?

13. (I) Сравните а) интенсивности и б) амплитуды сейсмической P-волны на расстояниях 10 и 20 км от очага землетрясения.

14. (I) На расстоянии 100 км от очага землетрясения зарегистрирована сейсмическая волна интенсивностью $1{,}4 \cdot 10^6$ Дж/м$^2 \cdot$с. а) Чему была равна интенсивность в точке, расположенной на расстоянии 2,0 км от очага землетрясения? б) Чему равна мощность, приходящаяся на

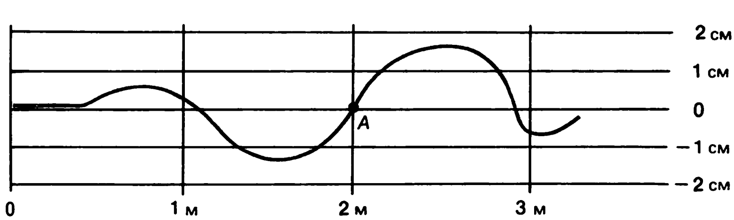


Рис. 15.27.

поверхность площадью 5,0 $м^2$, в точке, удаленной на 2,0 км от очага землетрясения?

15. (II) Покажите, что если пренебречь затуханием, то амплитуда круговой волны на воде $D_М \sim 1/\sqrt{r}$, где r – расстояние от источника.

16. (II) а) Покажите, что интенсивность волны равна плотности энергии (т.е. энергии на единицу объема) волны, умноженной на скорость волны. б) Чему равна плотность энергии в точке, расположенной на расстоянии 10 м от электрической лампочки мощностью 100 Вт? Скорость света равна $3{,}0 \cdot 10^8$ м/с.

17. (II) Покажите, что смещение в сферической волне, расходящейся равномерно во все стороны от точечного источника, можно записать в виде

$$D = \frac{A}{r}\sin(kr - \omega t),$$

где r – расстояние по радиусу от источника, а A – постоянная (см. разд. 15.4).

Раздел 15.4

18. (I) Пусть при $t = 0$ профиль волны описывается выражением $D = D_М \sin(2\pi x/\lambda + \phi)$, которое отличается от (15.9) наличием постоянного фазового сдвига ϕ. Каким запишется смещение той же волны, движущейся влево вдоль оси x, как функция от x и t?

19. (I) Покажите, что волновые профили, описываемые выражениями (15.13) и (15.15), удовлетворяют волновому уравнению (15.16).

20. (II) Поперечная бегущая волна в веревке описывается выражением $D = 0{,}42\sin(7{,}6x + 94t)$, где D и x измеряются в метрах, а t - в секундах. Определите для этой волны а) длину волны; б) частоту; в) скорость (величину и направление); г) амплитуду; д) максимальную и минимальную скорости частиц веревки.

21. (II) Рассмотрите точку на струне в примере 15.5, расположенную на расстоянии 1 м от левого конца. Найдите: а) максимальную скорость этой точки; б) максимальное ускорение. в) Чему равны скорость и ускорение этой точки в момент времени $t = 2{,}0$ с?

22. (II) Продольная волна с частотой 262 Гц распространяется в воздухе со скоростью 345 м/с. а) Чему равна ее длина волны? б) За какое время фаза в данной точке пространства меняется на 90°? в) Чему равна разность фаз (в градусах) между точками, отстоящими друг от друга на 6,4 см?

23. (II) Запишите выражение для смещения волны в задаче 22, если ее амплитуда равна 0,020 см, а при $t = 0$ и $x = 0$ $D = -0{,}020$ см.

24. (II) Для синусоидальной поперечной волны, бегущей по струне, покажите, что наклон касательной к струне в любой ее точке равен отношению поперечной скорости частицы в этой точке к скорости волны.

Раздел 15.5

25. (II) Пусть две одномерные волны описываются соответственно функциями $D_1 = f_1(x, t)$ и $D_2 = f_2(x, t)$. Покажите, что если эти две функции удовлетворяют волновому уравнению (15.16), то и любая их линейная комбинация $D = C_1D_1 + C_2D_2$ также удовлетворяет этому волновому уравнению (C_1 и C_2 – постоянные).

Раздел 15.6

26. (II) Пусть имеется синусоидальная волна, распространяющаяся по растянутому шнуру, состоящему из двух участков (рис. 15.16). Напишите формулу а) для отношения v_2/v_1 скоростей волн в двух участках шнура; б) для отношения длин волн в двух участках шнура. (Частота в обоих участках шнура одинакова. Почему?) в) На каком участке шнура длина волны больше – на более легком или на более массивном?

27. (III) Шнур, натянутый с силой $F_Т$, состоит из двух участков (рис. 15.16) с линейными плотностями соответственно μ_1 и μ_2. Пусть в точке, где соединяются части шнура, $x = 0$, причем μ_1 - это плотность левого участка, а μ_2 – правого. В левом конце шнура возбуждается синусоидальная волна $D = A\sin[k_1(x - v_1t)]$. Когда волна достигает точки соединения участков шнура, часть ее отражается, а часть проходит. Пусть отраженная волна описывается выражением $D = A_R\sin[k_1(x + v_1t)]$, а прошедшая – выражением $D = A_Т\sin[k_2(x - v_2t)]$. Поскольку частоты волн в обоих участках шнура должны быть одинаковы, мы имеем $\omega_1 = \omega_2$ или $k_1v_1 = k_2v_2$. а) Пользуясь непрерывностью шнура (т.е. тем, что отклонения точек на бесконечно малом расстоянии справа и слева от точки соединения одинаковы), покажите, что $A = A_Т + A_R$. (Учтите, что отклонение любой точки шнура слева от точки соединения обусловлено падающей и отраженной волнами, а отклонение любой точки справа – только прошедшей волной.) б) Считая тангенсы углов наклона (dD/dx) шнура в точках, расположенных справа и слева от точки соединения, одинаковыми, покажите, что амплитуда отраженной волны дается выражением

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)A = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\right)A.$$

в) Напишите выражение для $A_Т$ в зависимости от A.

Раздел 15.7

28. (I) Сейсмическая P-волна, распространяющаяся со скоростью 14,5 км/с, падает на границу раздела между двумя разными породами под углом 42°. Волна при этом преломляется под углом 26° к границе раздела. Чему равна скорость волны во второй среде?

29. (II) Продольная сейсмическая волна падает на границу раздела двух пород под углом 10°. Относительные плотности первой и второй породы равны соответственно 3,6 и 4,9. Определите угол преломления, считая модули упругости этих пород одинаковыми.

30. (II) Для любого типа волны, например для сейсмической волны, обнаружено, что при переходе волны в среду, где ее скорость увеличивается, преломленная волна пройдет во вторую среду лишь в том случае, если угол падения не превышает некоторого максимального. Этот максимальный угол падения θ_{iM} соответствует углу преломления, равному 90°. Если же $\theta_i > \theta_{iM}$, то волна полностью отражается на границе раздела сред и не преломляется (иначе синус угла преломления θ_r оказался бы больше единицы, что невозможно). Это явление называется *полным внутренним отражением*. а) Пользуясь соотношением (15.17), запишите формулу для θ_{iM}. б) В каком интервале углов должна приходить сейсмическая P-волна к границе раздела двух пород, в которых ее скорости равны соответственно 6,5 и 8,2 км/с, чтобы она полностью отразилась от границы раздела?

Раздел 15.8

31. (I) Два волновых импульса на рис. 15.28 движутся навстречу друг другу. а) Нарисуйте форму струны в момент времени, когда волновые импульсы перекрываются. б) Какой вид имеет струна спустя несколько мгновений? в) В тот же момент времени, когда импульсы на рис. 15.20, *а* в точности перекрываются, струна выпрямляется. Что происходит в этот момент времени с энергией?

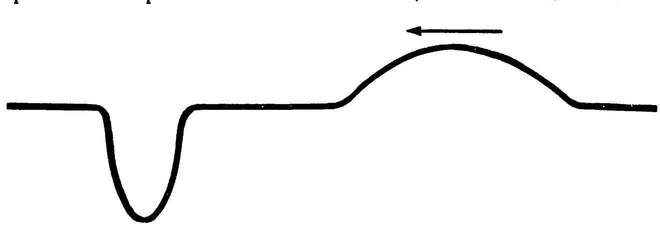


Рис. 15.28.

32. (II) Пусть две одномерные волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются в одной и той же среде с разностью фаз ϕ. Эти волны можно записать следующим образом:

$$D_1 = D_M \sin(kx - \omega t),$$
$$D_2 = D_M \sin(kx - \omega t + \phi).$$

а) Используя тригонометрическое тождество $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin[(\theta_1 + \theta_2)/2]\cos[(\theta_1 - \theta_2)/2]$, покажите, что результирующая волна имеет вид

$$D = \left(2D_M \cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right).$$

б) Чему равна амплитуда результирующей волны? Является ли волна чисто синусоидальной? в) Покажите, что усиливающая интерференция наблюдается при $\phi = 0, 2\pi, 4\pi$ и т.д., а гасящая – при $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi$ и т.д. в) Опишите результирующую волну (с помощью математического выражения и словесно) при $\phi = \pi/2$.

Раздел 15.10

33. (I) Не прижатая пальцем скрипичная струна колеблется с частотой 196 Гц. С какой частотой она будет колебаться, если прижать ее на 1/4 длины от конца?

34. (I) Струна резонирует с четырьмя пучностями на частоте 220 Гц. Назовите еще хотя бы три частоты, на которых она будет резонировать.

35. (I) Скорость волны в струне равна 480 м/с. На каком расстоянии друг от друга находятся узлы стоячей волны с частотой 86,0 Гц?

36. (II) Частоты двух последовательных обертонов струны равны 320 и 360 Гц. Чему равна частота основного тона?

37. (II) Покажите, что частота стоячей волны в струне длиной L и линейной плотностью μ, натянутой с силой F_T, дается выражением

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}},$$

где n – целое число.

38. (II) Один конец горизонтальной струны с линейной плотностью $4{,}2 \cdot 10^{-4}$ кг/м соединен с механическим вибратором, колеблющимся с частотой 60 Гц и с небольшой амплитудой. Струна перекинута через блок, находящийся на расстоянии $L = 2{,}40$ м от вибратора, а к свободному концу струны подвешивается груз. Какой массы следует подвесить груз, чтобы стоячая волна в струне имела а) одну пучность; б) две пучности; в) пять пучностей? Считайте, что узел стоячей волны расположен у вибратора. Это близко к реальности. Почему амплитуда стоячей волны может значительно превзойти амплитуду колебаний возбуждающего ее вибратора?

39. (II) Смещение стоячей волны дается выражением $D = 5{,}6 \sin(0{,}66x) \cos(53t)$, где x и D измеряются в сантиметрах, а t – в секундах. а) Чему равно расстояние (в сантиметрах) между узлами? б) Определите амплитуду, частоту и скорость каждой из двух волн, образующих стоячую волну. в) Найдите скорость частицы струны в точке $x = 2{,}10$ см в момент времени $t = 1{,}25$ с.

40. (II) Смещение поперечной волны, бегущей по струне, дается выражением $D = 4{,}2 \times \sin(0{,}71x - 47t + 2{,}1)$. Запишите выражение для волны, которая, двигаясь навстречу, образует вместе с первой стоячую волну.

41. (II) Если раскачивать воду в ванне с определенной частотой, то на каждом из двух концов ванны вода начнет поочередно то опускаться, то подниматься. Предположите, что частота такой стоячей волны в ванне шириной 50 см равна 0,85 Гц. С какой скоростью распространяется волна в воде?

42. (II) Гитарная струна имеет длину 90 см и массу 3,6 г. Расстояние между верхним и нижним порожками $L = 60$ см, и струна натянута с силой 520 Н. Чему равны частоты основного тона и первых двух обертонов?

43. (II) Скрипичная струна звучит на частоте 294 Гц. С какой частотой она будет звучать, если увеличить ее натяжение на 10%?